対数関数と計算の歴史　— アナログ計算機を作ろう —

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科)†

於　西宮東高等学校　2011 年 6 月 22 日

§1　序文

1594 年, John Napier (1550–1617) は, 天文学における膨大な計算を簡単に行う道具として対数を発明しました. 今日は, 対数関数について発見的な手法でお話しします.

自然科学を記述する言語である数学を用いて未知の現象を解明する際に, 計算の果たす役割は大きい. 電卓などの簡易な計算道具がありますが, それも 1970 年代以降のことです. 古くからの計算道具としては算盤 (そろばん) があります. 算盤の起源は古く, メソポタミア文明の頃, 砂の上に石を置いた砂算盤がありました. 算盤には慣れと練習が必要で, 誰でも手軽に計算できるものではありません. 計算したい人が, 計算できる人とは限りません.

電卓が登場する前, 機械式計算機がありました. 1642 年, Pascal (1623–1662) は機械式加減算計算機を発明しました. 機械工作技術が未熟で, 繰り上がりなどに不備がありました. Leibniz (1646–1716) は Pascal の計算機の不具合を直し, 更に乗除算も計算できるものを 1694 年に発明しました. 以後の機械式計算機はこれらが原型となっています. 19 世紀半ばにある程度普及した Arithmometer が登場しました. Odhner はそれを改良し, 1874 年に特許を公開しました. その後, Odhner 型計算機の特許を基に様々な改良を加えた機械式計算機が生まれ, 日本でもタイガー計算器株式会社により製造販売されました. 大阪大学でもタイガー手廻し計算器を数台所有しています. 数学教室所蔵のものは終戦直後の製造ですが, 今でも完全に動作します. 大学祭などで公開しています.

Napier の対数は計算機登場以前の発明で, 四則演算を筆算など手で計算していた頃のことです. §2 で Euclid 原論「比例論」から四則演算の幾何学的側面について話し, 定規を使って加減算アナログ計算機を作ります. §3 で乗除算計算のための道具を考案し, 乗除算アナログ計算機を作ります. Napier が対数発明に至った思考の道筋を辿ってみてください.

§2　Euclid 原論「比例論」

Euclid の原論には「比例論」の巻があり, 四則演算をはじめとした実数の性質を幾何学の公理から幾何学的に導き出しています. 加減算も乗除算も作図で定義されています. 十分に良い精度で作図し, 量を数値として読み取れれば, 計算に利用することができます.

2.1　符号付き長さ (数直線)

平面上に直線 ℓ をとり, その上に点 O を定めます. ℓ 上に O と異なる点 E を取り, 線分 OE の長さを 1 と定め, O から見て E の向きを正の向き, その反対側を負の向きとします. 直線 ℓ 上の点 P について, 線分 OP の長さは OE の長さを基準に測り, P が正の向きにあるときは正の数で, P が負の向きにあるときは負の数で表すことにします. 通常の長さとは異なり符号が付くので, 符号付き長さと呼ぶことにします. 面倒な説明ですが, 起点 O を 0 とし, E を 1 とする数直線のことです.

2.2　加減算の作図

実数 a と b について, 和 $a+b$ を作図します. 皆さんがこれまで習った平面図形のすべての性質を前提条件とし, 予め図形的に与えられた 2 つの実数 a, b に対して, 和 $a+b$ に対応する実数を図形的に表すことを目標とします. 直線 ℓ 上に起点 O をとり, 符号付き長さを考えます. 直線 ℓ 上に O から見た符号付き長さが a の点 A と, O から見た符号付き長さが b の点 B を取ります. 始点を O から A にずらして, A から見た符号付き長さが b の点 C を ℓ 上に取ると, 点 C の O から見た符号付き長さは $a+b$ に等しい. 差 $a-b$ は $a+(-b)$ ですから, a と $-b$ の和を求めればいい. 符号付き長さが $-b$ の点は, 符号付き長さが b の点と O に関して対称の位置にある. C は A から見た符号付き長さが b の点なので, A に関して C と対称な点 D が O から見た符号付き長さが $a-b$ になる.

少し面倒ですが, 図を描いてみれば簡単です. OB と同じ (符号付き) 長さの点を, A から取っただけです. 平面を直線 ℓ で上側と下側に切り分けてみます. 起点 O を上側, 下側の両方に, A を上側に, B を下側に書きます. 下側の面を切り口 ℓ に沿ってずらして, 下側の面の起点 O を上側の面の点 A に重ねます. 下側の面の起点 O から見た符号付き長さが b の点 B は, 上側の面で見ると A から見た符号付き長さが b の点 C に重なり, C は O から見た符号付き長さが $a+b$ の点になります.

† 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1-1　　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

直線 ℓ の上側の面と下側の面を定規で置き換えてみましょう. 起点の 0 をはさんで正の数と負の数が, 数の大きさの距離のところに目盛りを刻んだ普通の定規を 2 つ用意します. 上の定規の目盛り a に下の定規の起点 0 を合わせると, 下の定規の目盛り b に重なる上の定規の目盛りが $a+b$ になります. 原理的には正確ですが, 長さというアナログ量に置き換えたため誤差が生じます. この意味で, 加減算アナログ計算機と呼ばれます.

2.3 乗除算の作図

実数 a, b から, 作図により積 $a\times b$ 求めます. 点 O のみで交わる 2 直線 ℓ, m をとります. 直線 ℓ 上に点 E を線分 OE の長さが 1 となるように, 直線 m 上に点 F を線分 OF の長さが 1 となるように取り, これらを基準に ℓ と m に O から見た符号付き長さを定めます. 直線 ℓ 上に O から見た符号付き長さが a の点 A を, 直線 m 上に O から見た符号付き長さが b の点 B を取ります. 点 F と点 A を結び, 点 B を通り FA に並行な直線と ℓ との交点 C の, O から見た符号付き長さが $a\times b$ になります.

図を描いてみると, 言葉での説明より簡単です. $\triangle OFA$ と $\triangle OBC$ は相似比が $1:b$ の相似図形なので, OC の (符号付き) 長さが $a\times b$ になります. この作図法を計算機として実現し実際の計算に応用するのは少し問題があります. 定規をずらす加減算アナログ計算機に比べて, 作図に手間がかかり, 誤差が大きくなってしまうのです. ですが, 少し面白いことの説明に使えます. 負の数と負の数の積が正の数になることが作図により説明できるのです. 説明は略しますが, 商 a/b も三角形の相似を使って作図できます.

§3 掛け算を計算する定規

機械式計算機は乗法も除法も計算できますが, 乗法は加法を基にしています. 例えば 2×3 は 2+2+2 と考え, 加法を繰り返します. 加減算アナログ計算機で 2+2+2 として積 2×3 を計算できますが, 数が大きくなると手数がかかり, 誤差も大きくなります. 加減法アナログ計算機のように目盛りのある定規をずらして乗除算を計算する, 乗除算計算定規というものを作ることはできないであろうか. 話を簡単にするため正の数同士の積とします.

3.1 足し算との比較

どの数に 0 を加えても値は変わらないので, 加法は 0 が起点です. 0 より大きい正の数, 0 より小さい負の数があり, 正の数を加えると元の数より大きくなり, 負の数を加えると元の数より小さくなる. 加える数が大きいほど値は大きくなり, 小さいほど値は小さくなる. どの数に 1 を掛けても値は変わらないので, 乗法の起点は 1 です. 1 より大きい数を掛けると元の数より大きくなり, 1 より小さい正の数を掛けると元の数より小さくなります. 掛ける数が大きいほど値は大きくなり, 掛ける数が小さいほど値は小さくなる. 乗除算計算定規は 1 を起点に, 1 より大きい数, 1 より小さい正の数を相反する側に並べることになります.

加法の作図で直線 ℓ に起点 O と異なる点 E をとり, OE の長さで 1 を, O から見た E の方向での正の向きを定め, ℓ 上の点に数値 (目盛り) を対応させました. 乗除算計算定規では, 1 の次に大きい自然数 2 を基準に, 目盛りを定めてみましょう. 定規の上の実際の長さと目盛りの数が混乱しないように, 便宜上ですが, 実際の長さには単位の cm を付けることにします. 乗除算計算定規の 1 から見て長さ 10cm のところに 2 の目盛りを置きます. 加減法アナログ計算機では, 上の定規の a の目盛りに下の定規の起点 0 を合わせ, 下の定規の b にあたる上の定規の目盛りが $a+b$ になります. 乗除算計算定規では, 上の定規の a の目盛りに下の定規の起点 1 を合わせ, 下の定規の b にあたる上の定規の目盛りが $a\times b$ になって欲しい.

3.2 2 の累乗の目盛り

乗除算計算定規を 2 つ上下に並べます. 上の定規の 2 の目盛りに下の定規の起点 1 の目盛りを合わせます. 下の定規の 2 の目盛りに対応する上の定規の目盛りは 4 (=2×2) にするのが適当です. 4 の目盛りは起点 1 から見て 20cm (=10cm+10cm) のところになります. 下の定規の起点 1 の目盛りを上の定規の 4 の目盛りに合わせると, 下の定規の 2 の目盛りに対応する上の定規の目盛りは 8 (=4×2) で, 1 から見て 30cm (=20cm+10cm) のところになります. 16 (=8×2) の目盛りは 40cm に, 32 (=16×2) の目盛りは 50cm に, 64 (=32×2) の目盛りは 60cm になります. 2 の累乗の目盛りを乗除算計算定規に刻むことができました.

上の乗除算計算定規の起点 1 に下の乗除算計算定規の 2 を合わせるとき, 下の定規の起点 1 に合う上の定規の目盛りは幾つが適当でしょうか. $\square \times 2 = 1$ の $\square$ にあたる数ですから, 1/2 です. 1/2 の目盛りは, 起点 1 から見て 2 とは逆の方向で, 起点 1 から 10cm のところになります. 上の定規の起点 1 のところに下の定規の 4 を合わせるとき, 下の定規の起点 1 に合う上の定規の目盛りは 1/4 になり, 起点 1 から 20cm のところになります. $1/2 = 2^{-1}$, $1/4 = 2^{-2}$ なので, 2 の負の整数乗の目盛りも乗除法計算定規の上に刻むことができました.

3.3 3 はどこに？

3 の目盛りは, 乗除法計算定規のどこに刻めばよいのでしょうか. 3 は 2 と 4 の丁度まん中の数ですから, 試しに 2 と 4 の目盛りの丁度まん中, 起点 1 から見て 15cm のところに置いてみましょう. $3{\times}2{=}6$ ですから, 上の定規の 3 のところに下の定規の起点 1 を合わせ, 下の定規の 2 にあたる上の定規の目盛りが 6 になります. 6 は起点 1 から見て 25cm (=15cm+10cm) のところで, 4 の目盛り (20cm) と 6 の目盛り (30cm) の間にあります. 9 ($=3{\times}3$) の目盛りを取りましょう. 上の定規の 3 のところに下の定規の起点 1 を合わせ, 下の定規の 3 にあたる上の定規の目盛りが 9 なのですが, そこは起点 1 から見て 15cm+15cm=30cm のところで, 既に 8 の目盛りがあります. ひとつの位置に異なる数があっては計算機としての意味をなしません.

3 の目盛りはどこに刻めばよいのでしょうか. 2 と 4 の間の, 起点 1 から見て a cm のところに置いてみましょう. このとき $10{<}a{<}20$ です. $9{=}3{\times}3$ なので 9 は $2a$ cm ($=a$ cm$+a$ cm) のところです. 乗除算計算定規には 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\cdots$ の目盛りが 10cm おきに書かれています. $8{<}9{<}16$ なので 9 は 8 と 16 の間の, 起点 1 から見て 30cm と 40cm の間にあるべきなので $30{<}2a{<}40$ です. 2 で割ると $15{<}a{<}20$ となります. 27 ($=9{\times}3$) は $3a$ cm ($=2a$ cm$+a$ cm) のところで, $16{<}27{<}32$ なので $40{<}3a{<}50$ となります. 従って $40/3{<}a{<}50/3$ となります. ここまでのことから, a は 10, 15, 40/3 より大きく, 20, 50/3 より小さい. $15{<}a{<}16.66$ ($=50/3$) となります. 81 ($=27{\times}3{=}3^4$), 243 ($=81{\times}3{=}3^5$), 729 ($=243{\times}3{=}3^6$) の位置を, 2 の累乗 (1, 2, 4, 8 ($=2^3$), 16 ($=2^4$), 32 ($=2^5$), 64 ($=2^6$), $\cdots$) の目盛りと比較すると, 目盛りの比較 $64{<}81{<}128$ から位置の比較 $60{<}4a{<}70$ が, $128{<}243{<}256$ から $70{<}5a{<}80$ が, $512{<}729{<}1024$ から $90{<}6a{<}100$ が得られます. $60/4{<}a{<}70/4$, $70/5{<}a{<}80/5$, $90/6{<}a{<}100/6$ なので, $15{<}a{<}16$ ($=80/5$) となる. 3 の累乗 3^m を 2 の累乗 2^n, 2^{n+1} ではさみ ($2^n{<}3^m{<}2^{n+1}$), 2^n は 1 から見て $10n$ cm のところにあり 3^m は $m\,a$ cm のところにあるので, $10n{<}m\,a{<}10(n{+}1)$ となる. $10n/m{<}a{<}10(n{+}1)/m$ なので, $m{=}1, 2, 3, \cdots$ と動かせば a の範囲が限定されていく.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^m	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
n	1	3	4	6	7	9	11	12	14	15
2^n	2	8	16	64	128	512	2048	4096	16384	32768
$10n/m$	10	15	40/3	15	14	15	110/7	15	140/9	15
$10(n{+}1)/m$	20	20	50/3	35/2	16	50/3	120/7	65/4	50/3	16

以上より, $110/7\,(=15.71){<}a{<}80/5\,(=16)$ となる. 普通の 8 桁の電卓でもう少し計算してみる. $m{=}12$ に対して, $2^{19}\,(=524288){<}3^{12}\,(=531441){<}2^{20}\,(=1048576)$ なので $190/12{<}a{<}200/12$, よって $95/6\,(=15.83){<}a$ となる. $3^{16}{=}43046721$ は 8 桁一杯で, $3^{17}{=}1.291{\times}10^9{}_{\mathrm{E}}$ (最後の E はオーバーフローエラー) となる. $2^{26}{=}67108864$ で, $2^{27}{=}1.342{\times}10^9{}_{\mathrm{E}}$ なので, $2^{26}{<}3^{17}{<}2^{27}$ となる. よって $260/17{<}a{<}270/17$ より $a{<}270/17\,(=15.88)$ となる. 以上より, $15.83{<}a{<}15.88$ を得た. 作業精度を考えれば, 乗除算計算定規に 3 の目盛りを取るのにはこれで十分でしょう. もう少し工夫すると 8 桁の電卓で $m{\leq}32$ まで計算できますが, 頑張っても $15.83{<}a{<}15.86$ の程度です.

同じことを 5 でやってみましょう. 普通の 8 桁の電卓で $m \leq 13$ まで計算できます. 5 の目盛りの位置 $a_5$cm は $300/13\,(=23.07){<}a_5{<}70/3\,(=23.33)$ の範囲になります. 普通の電卓では難しいのですが, $m{\leq}31$ まで計算すると $325/14\,(=23.21){<}a_5{<}720/31\,(=23.22)$ が得られます. 乗除算計算定規に 5 の目盛りが取れます.

6 の目盛りは $6{=}2{\times}3$ なので, 25.8cm (=10cm+15.8cm) のところに取ればよい. 合成数の目盛りは, 素因数分解に従って取れる. 素数 7 では 3 や 5 と同様に目盛りの置く範囲を絞っていけばいい. 8 桁の電卓で $m{\leq}11$ まで計算して, 7 の位置 $a_7$cm は $28{<}a_7{<}310/11\,(=28.18)$ となる. 幾つかの素数について, 目盛りの範囲を 8 桁の電卓で計算したものを表にします. こうしてみると, 目盛りの範囲の巾が少し大きい. 後でこれを改善する方法を与えます.

素数	3	5	7	11	13	17	19
目盛り	15.83～15.88	23.07～23.33	28.0～28.18	34.44～35.0	36.66～37.14	40.0～41.42	42.0～42.50
m の範囲	$m \leq 17$	$m \leq 13$	$m \leq 11$	$m \leq 9$	$m \leq 8$	$m \leq 7$	$m \leq 7$

3.4 分数, 平方根など

分数 3/2 や 4/3, 5/3 などの目盛りはどの様にとればよいでしょうか. 3/2 は $\square{\times}2{=}3$ の $\square$ ですから, 上の乗除算計算定規の目盛り 3 に下の乗除算計算定規の目盛り 2 を合わせるとき, 下の定規の起点 1 にあたる上の定規の目盛りが 3/2 になります. 起点 1 から見て 3 の目盛りまで行って, 1 から 2 の目盛り分だけ戻ったところが 3/2 です. 3/2 の目盛りは起点 1 から見て 5.8cm (=15.8cm−10cm) のところに取ればいい. 他の分数も同じよう

に a/b は目盛り a から, 目盛り b の分 (1 から b までの長さ分) 戻ったところにあります.

これまでの議論から, 平方根 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ でも, 3 乗根 $\sqrt[3]{2}$ でも目盛りがとれます. $\sqrt{2}$ は起点 1 と 2 の丁度まん中 5cm (=10cm/2) で, 3 乗根 $\sqrt[3]{2}$ は起点 1 と 2 の 1 : 2 の内分点 3.33cm (=10cm/3) にとればよい.

§4　解析学

乗除算計算定規にたくさんの目盛りが刻まれ, 2 つの乗除算計算定規をずらして使って, 乗除算アナログ計算機ができました. しかし, §3.3 の計算手続きでは目盛りの誤差範囲が大きく, 計算精度を保証できません. 単位 cm の小数点以下 2 桁ぐらいを求めておかないと役に立ちません. 目盛りの位置を目盛りの数の関数見て, 解析学でその関数の正体を見極めましょう.

4.1　指数関数の逆関数

目盛り 2 の位置を 10cm と定めました. 目盛りの数 x に対する目盛りの位置を $10y$ cm とおくと, y は x の関数 $y{=}f(x)$ になります. 目盛りの位置関数 $y{=}f(x)$ を解析学で調べましょう. $f(3)$ の値 (§3.3 の $a/10$ の値) は, $m{=}1, 2, 3, \cdots$ に対して $2^n < 3^m < 2^{n+1}$ なる n を求め, 評価式 $\frac{n}{m}{<}a/10\,({=}f(3)){<}\frac{n+1}{m}$ をたくさん作って範囲を絞っていきました. $\frac{n}{m}{<}f(3){<}\frac{n}{m}{+}\frac{1}{m}$ なので $0{<}f(3){-}\frac{n}{m}{<}\frac{1}{m}$ となります. $m \to \infty$ とすると $f(3){-}\frac{n}{m} \to 0$ なので, $f(3){=}\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$ を得ます. また, $2^n{<}3^m{<}2^{n+1}$ の m 乗根をとると, $2^{\frac{n}{m}}{<}3{<}2^{\frac{n+1}{m}}{=}2^{\frac{n}{m}+\frac{1}{m}}$ なので $1{<}3{\times}2^{-\frac{n}{m}}{<}2^{\frac{1}{m}}$ となります. $m \to \infty$ とすると $2^{\frac{1}{m}} \to 1$ なので, $3{\times}2^{-\frac{n}{m}} \to 1$ となり, $\lim_{m\to\infty} 2^{\frac{n}{m}}{=}3$ を得ます. $f(3){=}\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}$ だったので $2^{f(3)}{=}\lim_{m\to\infty} 2^{\frac{n}{m}}{=}3$ が従います.

同じ議論で, 一般の正の数 x に対して目盛りの位置 $10y$ cm は $x{=}2^y$ を満たします. 目盛りの位置関数 $y{=}f(x)$ は指数関数 $x{=}2^y$ の逆関数なので, 対数関数 $y{=}\log_2 x$ が目盛りの位置関数として現れました.

4.2　目盛りの位置関数 (対数関数) の近似値計算

乗除算計算定規の目盛りの位置関数 $y{=}\log_2 x$ は, 指数関数 $x{=}2^y$ の逆関数でした. 正の数 x に対して $a{<}\log_2 x{<}b$ なる a, b が見つかっていたとします. 開区間 (a, b) をまん中で切って 2 つの開区間 $(a, \frac{a+b}{2})$, $(\frac{a+b}{2}, b)$ を考えます. $2^{\frac{a+b}{2}}{=}x$ ならば $\log_2 x{=}\frac{a+b}{2}$ で値が求められました. $2^{\frac{a+b}{2}}{\neq}x$ ならば $\log_2 x{\neq}\frac{a+b}{2}$ なので $\log_2 x$ は 2 つの開区間の一方に含まれます. 指数関数は単調増加で, その逆関数の対数関数も単調増加です. $2^{\frac{a+b}{2}}{>}x$ なら $a{<}\log_2 x{<}\frac{a+b}{2}$ で, $2^{\frac{a+b}{2}}{<}x$ なら $\frac{a+b}{2}{<}\log_2 x{<}b$ となります. どちらにせよ, 開区間の幅は前の半分になります. これを繰り返して, 開区間の幅をどんどん小さくして, $\log_2 x$ の近似値を計算できます.

$x{=}3$, $a{=}\frac{19}{12}$, $b{=}\frac{27}{17}$ で考えてみましょう. $\frac{a+b}{2}{=}\frac{647}{408}{=}1.586$ で $2^{\frac{a+b}{2}}{=}2^{\frac{647}{408}}{=}3.0017{>}3$ なので $\log_2 3{<}\frac{647}{408}{=}1.586$ となります. §3.3 よりも近似の精度がよくなりましたが, $2^{\frac{647}{408}}$ を計算しなくてはいけません. 普通の電卓には一般の指数を計算する機能は付いていません. 指数法則を思い出してみましょう. $2^{\frac{a+b}{2}}{=}\sqrt{2^{a+b}}{=}\sqrt{2^a 2^b}$ なので, 2^a と 2^b がわかっていればそれらを掛けて平方根を取ればいい. 普通の電卓でも平方根は計算できるので, 対数関数の値を普通の電卓で計算できるようになりました. 計算精度の問題から, 普通の 8 桁の電卓でなら 4 桁程度が限界ですが, 当初の目的の乗除算計算定規を作るのには十分でしょう.

4.3　対数法則

乗除算計算定規の目盛りの位置関数 $y{=}f(x)$ が, 指数関数 $2^y = x$ の逆関数 (対数関数) $y{=}\log_2 x$ で表されました. 対数法則 $\log_2(ab){=}\log_2 a{+}\log_2 b$ により, 乗除算計算定規で乗除算アナログ計算機が実現されることを証明できます. また, 起点 1 の次に基準点 2 を選びましたが, 基準点には別の数 a を指定することもできます. 底の変換公式 $\log_a x{=}\frac{\log_2 x}{\log_2 a}$ により, 基準点の取り替えは目盛りの拡大または縮小に過ぎないことがわかります.

§5　まとめ

乗除算計算定規なるものを考え, 想定している計算手続きから, 目盛りの位置関数が対数関数で表され, 対数法則により乗除算アナログ計算機が実現されることを見ました. 乗除算計算定規は目盛りが対数なので対数尺と, 2 つの対数尺を組み合わせた乗除算アナログ計算機は計算尺と呼ばれています. 電卓が普及するまで工学的な計算に利用されていました. 対数尺は Gunter (1581–1626) の考案 (1620 年) で, 計算尺は Oughtred (1574–1660) の発明 (1622 年) です. Jost Bürgi (1558–1632) も 1588 年に対数を発明し乗除算に利用していたが, 発表は Napier よりも後であったため, 対数の発明者は Napier とされています.

今日は, 与えられた問題に知ってる知識で取り組むのではなく, 自ら設定した問題意識に対して論理の力で発見的に向き合ってみました. すべての問題に発見的手法が効果的とは限りませんが, うまく働くととても強力な考え方なのです.