大学で学ぶ数学　『実数とは何か. — 筆算のしくみ, 小数と級数 —』

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科) †

於　西宮東高等学校　2009 年 6 月 19 日

§1.　小学校以来, 足し算引き算を習い, 九九を覚え, 割り算や分数を習い, 何度となく数の計算練習を繰り返してきたことでしょう. 計算は結構面倒なものですが, 落ち着いて筆算でやれば必ず正解にたどり着きます. 根気強く計算を続けていく力 (計算力) はとても大切で, 頑張って数学の問題を解いていても, ちょっとした計算ミスで水の泡になってしまうこともよく有ることでしょう. 計算ミスを無くすにはどの様にしたら良いのでしょうか？ 計算力を向上させる特効薬のような物は無いのでしょうか？

一般に数学が得意な人は計算力のあると思われがちですが, 私自身そうですが, 数学者の多くは計算が苦手です. 小さいころにそろばんを習ったことのある数学者で, きちんと級や段を取った人はあまりいないようです. そんな私達数学者が, 上の問いに答えていいものか ···. 実は大事な大事なことがあります.

『難しいことと, 面倒なことを 一緒にしない』

今日の話しが難しいなと感じたなら, この言葉だけでも心に留めておいてください. 勉強などこれからの生活の中で, いろいろな困難にぶつかることと思います. どうしても打開できない壁なのか, 多少面倒であっても諦めずに頑張れば乗り越えられるものなのか.

§2.　計算力の話しに戻りましょう. 普通の数の四則演算は『難しい』問題ではなく『面倒な』問題です. 小さい整数 (1 桁や 2 桁) の和や差なら反射的に答えが浮かぶでしょうけど, 大きな整数の和や差ではすぐには答えられないと思います. こういうときには筆算を使えばよいのですが, 実際に計算するのはちょっと面倒です. 面倒であってもやり方がわかっているので, ゆっくり落ち着いてやれば必ず正解にたどり着けます. 四則演算は『難しい』問題ではなく『面倒な』問題なのです. 例を計算してみましょう.

$$\begin{array}{r} 364 \\ +\quad 23 \\ \hline \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 364 \\ +\quad 78 \\ \hline \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3948121231344 \\ +\ 1223894917238 \\ \hline \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 904893243895 2354 \\ +\quad 958098234272358 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 364 \\ -\quad 23 \\ \hline \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 364 \\ -\quad 78 \\ \hline \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3948121231344 \\ -\ 1223894917238 \\ \hline \boxed{} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9048932438952354 \\ -\quad 958098234272358 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

こんなの簡単って言いたい所ですが. 計算手順に難しさはありませんが, いつでも正解できるかどうか ···. 上下ともに最初の筆算は簡単ですね. 2 つ目のも簡単ですが, 筆算を習いたての時に一度は悩んだ繰り上がりや繰り下がりが出てきます. 3 つ目, 4 つ目は桁が大きくなって, 繰り上がり繰り下がりもたくさんあり, 数字もチラチラ目移りしそうです. 筆算の計算手順をまとめてみましょう.

㋐　計算する数の桁を揃える. 演算を下の数の左側に書き, 全体に長い下線を引く.

㋑　右の桁から順にひと桁ずつ計算する. 繰り上がりのあるときはそれも加える.

㋒　繰り上がりがあるときは, 繰り上がる数を繰り上がる桁の下線の下に小さく書く.

㋓　繰り下がりの必要なときは, 左隣の桁の最も上に書かれた数から必要な分を引く.
足りないときは更に左の桁から繰り下げる.　それでも足りないときは ···

㋔　最も左の桁まで計算を進める.

† 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1　　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

この文章だけ読んで筆算を理解できたなら, ものすごく頭がいいか, ものすごく勘のいい人でしょう. 筆算の慣れている人にとってこの文章は, まどろこしい. 何を意味しているのかわかり難いことでしょう. 筆算は理屈をこねる前に, 何度もやって手が覚えているものなのです. 高校で習っている数学も同じです. 大学で習う数学も同じです. わかり難いときは, ともかくやってみて, 手が覚えてしまうぐらいにやってみて, それから書いてあることを見ると前よりよくわかるはずです. もう一つ大事なことがあります.

『ただ単にまねるのではなく, 考えながら まねましょう』

だんだん説教くさくなってきました. 数学者の多くは計算が苦手です. それと同じように, 覚えることも苦手です. 覚えることを少なくするには, 要するにこう言う事と言い切れるぐらいに要点を見抜けばよいのです. 小学生の頃, 鶴亀算とか旅人算とか「○○算」にたくさん出会ったことでしょう. 変数を使った連立一次方程式の問題と思えば, それぞれ個有の解き方を知らなくても全部解けます. 数学者はこう言うことが得意なのです. とは言っても, 最初から本質を見抜けるほど数学者は偉くありません. 数学者は根気強いのです. 何時間でも何日でも, 寝ても覚めてもご飯を食べてても, コツコツ手を動かし続け, コツコツ考え続けています. そしてあるときフッと, どこからともなくフッと見えてくる. 数学者はその感覚が好きなのです.

§3. 掛け算割り算はどうでしょう. 割り算は面倒なので, 今日は掛け算にしましょう. そこで問題.

「半径 2.4 cm の円周の長さを求めよ. ただし, 円周率は 3.14 とせよ」

答え： 円周の長さは, 半径の 2 倍 (直径) に円周率を掛ければよい. 半径の 2 倍は 4.8 なので, 4.8×3.14 が求める円周の長さである. 筆算で計算すると,

$$4.8 \times 3.14 = 15.072$$

よって求める円周の長さは 15.072 cm である.

$$\begin{array}{r} 4.8 \\ \times \quad 3.14 \\ \hline 192 \\ 48 \\ 144 \\ \hline 15.072 \end{array}$$

きちんと筆算で計算して, 正しい答えが得られました. でも, 何か気になりませんか？

先に足し算引き算に関する筆算の計算手順をまとめましたが, 最初の項目に「桁を揃える」とありました. 4.8 と 3.14 のそれぞれの最も小さい桁で揃えたのですが, 小数点で揃えた方が合ってる気もします. やってみましょう (①). 困りました. 4.8 に 4 を掛けた 192 をどこに書けばよいのでしょう. 上の計算のように下から揃えて書いてみましょう (②). だめです. 小数点の位置がずれました. 無理やり合うようにずらしてみると (③). 今度は 192 をどうしてその桁に書くことになったのでしょう. そうだ. $4.8 = 48 \div 10$, $3.14 = 314 \div 100$ だから, $4.8 \times 3.14 = 48 \times 314 \div 1000$ となります. 48×314 を計算してから 1000 で割ればいい (④). これなら小数点で悩まなくても計算できます. 小数点がどこに来るかは後でゆっくり考えればいい ...

① $\begin{array}{r} 4.8 \\ \times \quad 3.14 \\ \hline \cdots \end{array}$ ② $\begin{array}{r} 4.8 \\ \times \quad 3.14 \\ \hline 192 \\ 48 \\ 144 \\ \hline 15.072 \end{array}$ ③ $\begin{array}{r} 4.8 \\ \times \quad 3.14 \\ \hline 192 \\ 48 \\ 144 \\ \hline 15.072 \end{array}$ ④ $\begin{array}{r} 48 \\ \times \quad 314 \\ \hline 192 \\ 48 \\ 144 \\ \hline 15072 \end{array}$

§4. 問題をちょっと変えて見ましょう. 最近はやりのナノテクに習って,

「半径 2.4 cm の円周の長さ 1 nm (ナノメートル) の単位まで求めよ」

1 nm (ナノメートル) というのは, 10^{-9} m のことです. 半径の 2.4 cm は非常に正確な長さだとして, ともかく 0.024 m です. 円周率ですが 3.14159265358979323846264 このくらい準備しておきましょうか.

$$2 \times 0.024 \times 3.14159265358979323846264 = \cdots ?$$

筆算で計算することになりますが, さぁどうしましょう. $2\times0.024 = 0.048$ は簡単です. それに円周率を掛ければ, 円

周の長さが m 単位で出てきます. 筆算で計算しましょう. 前節 (§3) の ④ を真似てみましょう. $0.048 = 48 \times 1000$ の 48 と, 円周率の $314159\cdots264$ を掛ければよい. 円周率の方が長いからそっちを上に 48 を下に書いて筆算で計算して $\cdots$. そして掛け算が済んだら小数点の位置を求めるために, $\cdots$ 幾らで割ればいいのだろう $\cdots$.

前節 (§3) の ③ に習って小数点の位置を揃えて計算すれば, 後から悩まなくても済みそうです. そもそも ③ はうまくいくように適当に並べたものだったのですが, しくみをきちんと説明できれば小数点以下たくさんの桁をもつ小数の計算に応用できそうです. 計算の最初, 48×4 の 192 を書く位置 (桁) が問題でした. 結果をみれば, 192 は小数第 3 位に最下位桁の 2 が置かれています. $48\times4 = 192$ はそもそも $4.8\times0.04 = (48\times0.1)\times(4\times0.01) = 192\times0.001$ $(= 0.192)$ だったので, 小数第 3 位から上位の桁に向かって置かれるのです. 一応の説明にはなりますが, 取って付けたようでまだまだ $\cdots$.

ところで $48 \times 4 = 192$ はどの様に計算したのでしょう. 筆算で計算したなら, $8 \times 4 = 32$ を一の位 (と十の位) に $4 \times 4 = 16$ を十の位 (と百の位) に書いて足したのでした. 数式でこのことを見ると

$$48 \times 4 = (4 \times 10 + 8) \times 4 = (4 \times 10) \times 4 + 8 \times 4 = (4 \times 4) \times 10 + (8 \times 4) = 16 \times 10 + 32 = 192$$

となります. 4.8×0.04 ですと,

$$\begin{aligned} 4.8 \times 0.04 &= (4 + 8 \times 0.1) \times (4 \times 0.01) = 4 \times (4 \times 0.01) + (8 \times 0.1) \times (8 \times 0.01) \\ &= (4 \times 4) \times 0.01 + (8 \times 4) \times 0.001 = 16 \times 0.01 + 32 \times 0.001 = 0.16 + 0.032 = 0.192 \end{aligned}$$

だんだん計算のしくみが見えてきました. 整数と整数の積は整数, 整数と小数第 1 位の数の積は小数第 1 位が最下位の桁になり, 小数第 1 位と小数第 1 位の積は小数第 2 位に置かれ $\cdots$, ですから一般に小数第 m 位の数と小数第 n 位の数の積は小数第 $m{+}n$ 位に書けばいいのです. いつでも最下位の桁から計算する必要はなさそうです. 最下位の桁は積をとる 2 つの小数の小数位の合計ですが, 数え間違えたら全然違う答えになってしまいます. もし, 上位の桁, 整数の位から計算したなら, 小数点の位置が初めに決まり, 一つずつ桁を下げて書けばよい (⑤). これなら目的の $0.048 \times 3.14159265\cdots$ が筆算で計算できそうです (⑥).

⑤

4.8		
× 3.14		
12	4×3	整数
2 4	8×3	小数第 1 位
4	4×1	小数第 1 位
8	8×1	小数第 2 位
1 6	4×4	小数第 2 位
3 2	8×4	小数第 3 位
12	4×3	整数
2 8	4×1＋8×3	小数第 1 位
2 4	4×4＋8×1	小数第 2 位
3 2	8×4	小数第 3 位
15.072		

⑥

```
     3. 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 ···
×    0. 0 4 8
-----------------------------------------
        1 2
            4
          2 4
            1 6
              8
                4
              3 2
                2 0
                  8
                  3 6
                  4 0
                  ·····················
-----------------------------------------
     0. 1 5 0 7 9 6 4 9 5 3 7 2 3 0 ···
```

§5. これまで学校で習った筆算は整数の四則演算を計算する方法で, 後から適当に小数位を数えることで有限小数の四則演算も使えるようにしたものでした. 小数位の小さい数の計算なら何でもないことかもしれませんが, 小数点以下たくさんの数が並んでいる場合だと結構面倒です. 例えば小数点以下 5 桁の実験計測値の積だと小数第 10 位まで現れます. この場合小数第 6 位以下の数は四捨五入に使う程度にわかれば十分で, 小数第 10 位を頑張って計算する必要はありません. 無限小数だと, 桁を揃えるのも大変で, 最下位の桁から計算して数を確定していくこともできません. 例えば, 次の計算を考えてみてください.

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.33333\cdots \times 3 = 0.99999\cdots$$

分数の計算から値は 1 です. 右辺のどこかで繰り上がりが出てきたら, どんどん遡って結局値は 1 になってくれそうです. 繰り上がりが出て来ないなら, ずーっと 9 が並んで, 値は 1 に見えません. 循環小数が有理数であることを調べたことを覚えていますか. $0.99999\cdots$ を 10 倍すると $9.9999\cdots$ になります. 両者は小数点以下同じな

ので差し引きすると, もとの小数の $9\ (= 10-1)$ 倍が $9\ (= 9.9999\cdots - 0.99999\cdots)$ になり, もとの小数は 1 に等しい. これは一見正しい計算に見えますが, 実はとても不安定な地盤の上に載っているのです. 無限小数の「差し引き」って正しい計算なのでしょうか. $0.99999\cdots$ を小数第 5 位で打ち切ってみましょう. 0.99999 の 10 倍は 9.9999 なので, 差し引きすると $8.99991\ (= 9.9999 - 0.99999)$ となり, 9 で割ると 0.99999 です. 弱ったですね. 何にもならない計算でした. 無限に続いていたからこそ上手くいった計算だった訳です. でも, もっともっと根本的な問題があったのです.

そもそも $0.99999\cdots$ は数なのでしょうか ?

何を今更って思わないで下さい.

実数とは何か, 小数とは何か, 無限小数とは何か.

これらはとても難しい問いなのです. 数学者が数学の根幹に関わる問いかけと気づきはじめたのは, 19 世紀でした. 19 世紀後半, 色々な種類の数の特性を研究していたデデキントと, 無限の本質を最初に見極めようとしたカントールによって, 実数論の生み出され, 数学者たちはやっと安心できたのです. 大学 1 年生の解析学の授業で, 実数論を学ぶことになっています.

§6. 小数の真の姿と筆算のしくみは, 当日講演で話します. 副題にある「級数」はまだ登場していませんが, これから, 話の中心になります. 収束する無限級数に関する次の定理がすべての鍵なのです.

定理 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき,

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} k\,a_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (k は定数)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$