大学で学ぶ数学　—火のない所に煙を起こすわけではないけれど—

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科)†

於　西宮東高等学校　2008 年 6 月 4 日

§1.　次の計算をみてください.

$$1 = \frac{1}{3} \times 3 = 0.3333\cdots \times 3 = 0.9999\cdots$$

見たことがあるかもしれませんが, ちょっと不思議に思いませんか. この計算を見て, 何か変と感じる人もいれば, 何もおかしなところはないと言う人もいるでしょう.

小学校以来いろいろな計算方法を習ったことと思います. 大阪大学の数学科 1 年生向けの私の授業では, この様な計算を題材に物事を数学的に理解する目を養うことを目的にしています. 易しい計算に見えますが, 等号の一つ一つにとても深い意味が隠れています. すべてを数学的に解き明かすのは結構大変です. 数を代数的に体系化すること, 数を解析的に扱うこと, 解析的に四則演算を理解することなど, この計算から学ぶことがたくさんあります. ここでは, 両端をとった $1 = 0.9999\cdots$ について話します. 数学とは何であるかを考え, 極限という概念について少し掘り下げて考えてみるための一助になればと思います.

§2.　上の計算を $\frac{1}{3} \times 3$ で左と右に分けてみましょう. 左側は, 分数の式として計算して

$$\frac{1}{3} \times 3 = 1$$

となります. 右側は, 電卓などを使って小数で計算した

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.3333\cdots \times 3 = 0.9999\cdots$$

のことです. 同じ数式を分数として計算するか, 小数を使うかで答えが違って見えます. 途中の計算が正しいなら, 1 と $0.9999\cdots$ は見かけが違うだけで同じ値のはずです. 電卓で計算すると誤差が現れます. 小数として異なる形になったのは, 誤差があったからなのでしょうか. $0.9999\cdots$ を適当な桁で打ち切って四捨五入すれば 1 になりますが, これでは上の計算の意味を解き明かしたことにはなりません. 数学でいう小数は数の表し方の一つであって, 実験などで計測した量とは異なり誤差を含みません. 計算結果の表示の違いを, 誤差のせいにしてはいけません.

§3.　さて, $0.9999\cdots$ ですが . . .

$0.9999\cdots$ を x とおきます.
x を 10 倍すると, $10x = 9.9999\cdots$ です.
$10x$ の小数点以下が x に等しいので,
辺々引いて $\cdots$

$$\begin{array}{rrcl} & 10x & = & 9.9999\cdots \\ -) & x & = & 0.9999\cdots \\ \hline & 9x & = & 9 \\ \therefore & x & = & 1 \end{array}$$

こうして $0.9999\cdots$ が 1 に等しいことが確められました. しかしちょっと待ってください. 数学というは, どのように易しく見える事でもすべてを納得いくまで考え抜くことから始まります. 一つ一つの計算について意味を考えようとすると, これがなかなか難しい. ともかく, 正しい計算であるか, いちいち疑ってみましょう. $0.9999\cdots$ の 10 倍は, 本当に $9.999\cdots$ なのでしょうか. $9.999\cdots$ から $0.9999\cdots$ を引くと, 本当に 9 なのでしょうか. その引き算を筆算で計算してもよいのでしょうか. そもそも筆算ってどういう計算手続きなのでしょうか . . .

§4.　対象を変えてみます. $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ という形の 1 と -1 を交互に足したものを考えましょう. これを x とおきます. $-x$ は x の -1 倍なので,

† 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1　　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

$$
\begin{aligned}
-x &= (-1)\,x \\
&= (-1)\,\{1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots\} \\
&= (-1)\,1 + (-1)\,(-1) + (-1)\,1 + (-1)\,(-1) + (-1)\,1 + (-1)\,(-1) + \cdots \\
&= (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots
\end{aligned}
$$

となります. 右辺は, x の式の 2 項目以降と同じ形をしているので, 辺々引いて

$$
\begin{array}{rrcl}
 & x & = & 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\
-) & -x & = & \qquad\quad (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots \\
\hline
 & 2\,x & = & 1 \\
\therefore & x & = & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

となります. 従って

$$
1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \frac{1}{2} \;\; !!
$$

前節 (§3) と比べてみてください. 全く同じ計算手順をとっていることに気づくことでしょう. 計算結果については如何ですか. 前節のはともかく, ここでの結果は少し不自然に感じませんか. 同じ手順で得た 2 つの結果について, 評価が異なるのはとてもおかしい. 何か根本的な勘違いがあるからかもしれません. この違和感の原因を感じとった人もいることでしょう. 感じたことを, 論理的に説明するにはどうしたらいいのでしょうか.

続きは講義で話します. 幾つかの易しい計算を眺めているだけですが, 背後にある数学をあぶり出す一例をお見せします. 数学的に正しい論証をするためには, 細かい計算技術を記憶することよりも, その計算手続きをとる理由を追及することの方が重要です. 正解に到達するまでの道のりは長くなるかもしれませんが, こうやって身につけた考え方は, 数学だけでなくあらゆる物事に真摯に取り組むための指針になることでしょう.

§5. 前々節 (§3) の計算に, 疑いを差し挟む余地があるとは思わなかったことでしょう. 前節 (§4) で同じ計算をしているのは, $x\ (= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots)$ を -1 倍するところ, x と $-x$ の差をとるところ, その差を筆算で計算するところです. どれも単純な計算に見えますが, 和がどこまでも続く「$\cdots$」の部分がちょっと気になります. 無限個の数の和を無限級数といいます. 次の性質は基本的で重要です.

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するとき,

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} k\,a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad$ (k は定数)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

これらを使った計算演習の多くは, 無限級数に (1) や (2) の左辺の形を探して右辺に書きかえるものだったと思います. この等式を右辺から見ると, 何を意味するのでしょう.

$0.9999\cdots$ にも「$\cdots$」の部分があります. 小数を一つの数と思えば, 四則演算は単なる数の計算です. 具体的に計算するには筆算 (数の位を揃え, 位ごとに計算する) を使うよう習ったことでしょう. 小数の「$\cdots$」の部分を正確に書くには, 各桁の数の和の形にすれば良い. 小数は無限級数なのです. 無限級数の項の添字 n を小数の桁 (小数第 n 位) と思えば, 無限級数の性質を右辺から眺めたものが筆算の計算手続きなのです.

小数 $0.9999\cdots$ を無限級数で表しましょう.

$$
0.9999\cdots = 9\,\frac{1}{10} + 9\,(\frac{1}{10})^2 + 9\,(\frac{1}{10})^3 + 9\,(\frac{1}{10})^4 + \cdots
$$

初項 $\frac{9}{10}$, 公比 $\frac{1}{10}$ の無限等比級数なので収束します. 和の公式より

$$
0.9999\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 9\,(\frac{1}{10})^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 9\,(\frac{1}{10})^n = \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{9}{10}(1-(\frac{1}{10})^N)}{1-\frac{9}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1
$$

これまでと異なる手順で $0.9999\cdots = 1$ が示されました. 無限等比級数は公比の絶対値が 1 未満のときに収束し, 和の公式で値がわかります. よく見ると §4 の $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ も無限等比級数ですが, 公比

の絶対値が丁度 1 なので収束しません. このことは, いくつか項を足して 1 になったり 0 になったり決まった数にならないことからもわかります.

ここに至り, 違和感の原因が明らかになりました. $0.9999\cdots$ はある数を定めるので x とおいて計算していけます. $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$ は特定の数にならないので x とおいても仕方なく, 無意味なものから始まる議論で何を導いても, 結論に価値はありません. 価値のない $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots = \frac{1}{2}$ に心悩ます必要はなかったのです.

§6. 要するに x とおいたところが問題だったのです. 数として確定する小数を適当な文字でおいて計算するのはいいのですが, 何だかわからないものを数の如く計算してはいけないのです.

前節 (§5) の, 無限級数の性質を見てください. 等式 (1), (2) は収束する無限級数について成り立つものでした. §3, §4 の計算には無限級数の性質を使っていますが, 収束しているかどうか何も書かれていません. §3 では最初に「小数 $0.9999\cdots$ は数なので」を, §4 では「無限級数 $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$ は収束しないけど」を補ってみましょう. §3 は説明が冗長になったように感じるかもしれませんが, §4 の計算の無意味さが際立つことでしょう.

さて, $0.9999\cdots$ などの小数は本当に数なのでしょうか. 小数は無限級数であると言った以上, 無限級数として収束することを示さなければ, 数とは言えません. 次から次へと問いが現れます. こうやって, 数とは何か問い直すことになり, 数についての理解が深まるのです. $0.9999\cdots$ は収束する無限等比級数なので, 数と言えます. 一般の小数では如何でしょう. 循環小数なら, 周期で項をまとめて無限等比級数に表せます. 例えば, 142857 を繰り返す循環小数 $0.142857142857142857\cdots$ は, 6 桁ごとまとめれば初項 $\frac{142857}{1000000}$ 公比 $\frac{1}{1000000}$ の無限等比級数になります. これは収束し, 和の公式より $\frac{1}{7}$ になります. それでは円周率 π はいかがでしょう.

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510\cdots$$

循環しない小数なので, 無限等比級数にはなりません.

§7. この節は少し難しいので, 読み飛ばしてください. 循環小数を上のように適当にまとめてもいいのか疑問に思った人は, やや神経質かもしれませんが, 数学的な勘がとてもいい. 無限級数は初項から順に和をとらねばなりません. 勝手にまとめたり, 適当に順序をかえてはいけません. 例えば $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$ を, 2 項ずつまとめてから和をとってみます. 第 1 項と第 2 項, 第 3 項と第 4 項, 第 5 項と第 6 項, $\cdots$ とまとめるとそれぞれ 0 になるで, 全部の和は 0 です. 第 1 項を別にして, 第 2 項と第 3 項, 第 4 項と第 5 項, $\cdots$ でまとめると, 第 1 項の 1 に 0 を何度も足すので, 和は 1 になります. 和を取る順序を変えると, 和の値が変わりました. 収束しない無限級数でしたが, 収束する場合でも次の例があります. 整数の逆数の和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ は収束しませんが, 偶数項の符号を負にしたものは収束します.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots = \log_e 2$$

奇数項を 2 つ足してから偶数項を 1 つ足すように和の順序を変えたものも収束しますが,

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots = \frac{3}{2}\log_e 2$$

値の計算の仕方はとても面白いのですが, 高校で習う範囲を越えています. こんな面倒で, とっても楽しいものは大学で数学を学ぶまで出てこないようになっています. それまでこれらは忘れてください.

§8. 一般的な小数を扱う前に $0.9999\cdots$ についてもう一度考えてみます. 無限等比級数と思うと円周率など殆どの小数で困ってしまうので, 考え方を変えます. 小数は無限級数でした. 無限級数が収束するとは, 途中までで打ち切った和 (部分和) の数列がある数に収束すること, 部分和の項の数を限りなく増やしていくとある数に限りなく近づくことです. 小数 $0.9999\cdots$ が 1 に等しいとは, 適当な桁で打ち切った小数を考え, 桁数を限りなく増やしていくと 1 に限りなく近づくこと, 1 との差が限りなく小さくなることです. 小数第 n 位で打ち切った小数 $0.999\cdots99$ (最後の 9 は小数第 n 位) と 1 との差は $0.000\cdots01$ $(=(\frac{1}{10})^n)$ です. 打ち切る桁数を増やしていけ

ば, 1 との差は 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, $\cdots$ と限りなく小さくなっていきます. $0.9999\cdots$ を途中で打ち切った小数の列は 1 に収束するので, $0.9999\cdots = 1$ となります.

話が変わってしまいました. $0.9999\cdots$ が収束することを示せば, §3 でその値が 1 になることが言えるはずでした. 収束を示すついでにその値が 1 になることを示したので, §3 の計算は要らなくなりました.

§9. 多くの教科書で極限は「限りなく近づく」ことと書かれています. 「限りなく」も「近づく」も曖昧な表現です. どの位なら「近い」といえるのか, 「限りなく」とはどういった状況なのか.

唐突ですが, 数 a, b に対して等式 $a = b$ を導く方法を考えましょう. a でも b でも計算して, 同じ形になれば等しくなります. うまく変形できないときはどうしますか. 見方を変えましょう. $a \neq b$ でないことを示しても $a = b$ が従います. それでは $a \neq b$ とはどういう状況なのでしょうか. 複素数だとちょっと面倒になるので, ここでは数を実数にとります. a と b が異なるなら, $a > b$ か $a < b$ です. $a > b$ なら $a - b > 0$ で, $a < b$ なら $b - a > 0$ です. 従って a と b との差 $|a - b|$ は正の数です. 技巧的ですが, 差 $|a - b|$ の半分を c とおきましょう. c は正の数で $|a - b| > c$ を満たします. 逆に $|a - b| > c$ となる正の数 c が見つかったなら $a \neq b$ です. 以上まとめると,

$$a \neq b \iff |a-b| > c \text{ となる正の数 } c \text{ が見つかる}$$

$a = b$ とは, $a \neq b$ でないことだったので,

$$\begin{aligned} a = b &\iff |a-b| > c \text{ となる正の数 } c \text{ はない} \\ &\iff \text{どんな正の数 } c \text{ をとっても } |a-b| < c \text{ となる} \end{aligned}$$

たった一つの等式を示すために, たくさんの不等式を使うのです. ちょっと不思議で, とても面倒にみえますが, この発想が極限を厳密に定義することにつながります. 「限りなく近づく」とは, 「どんな正の数よりも差を小さくできる」ことなのです. どんな正の数をとっても, 細かい計算を繰り返して, 差がその正の数よりも小さくなることを示せばよいのです.

実数は 3 つの性質「四則演算の公理」「順序の公理」「連続性の公理」をもつ数学的概念のひとつです. 公理というのは数学的議論のための前提となるものです. 各公理の詳細は省きます. 「四則演算の公理」は加減乗除の計算原理をまとめたもので, 実数の大きさの比較や正の数, 負の数を定めるのが「順序の公理」です. 「連続性の公理」はなかなか難しいのですが, 上で述べた等号の言いかえや, 極限の厳密な定義がそこから導かれます. 実数は数直線で表しますが, これらの公理がその根拠です. 「順序の公理」により実数を大きさの順に, 真っ直ぐに並べることができ, 「連続性の公理」によりその並びが途中で途切れないので, 実数が直線状に書けるのです.

§10. まとめしょう. $1 = \frac{1}{3} \times 3 = 0.3333\cdots \times 3 = 0.9999\cdots$ を理解するために, $0.9999\cdots$ が 1 に等しくなることを示す方法を 3 つ述べました. 循環小数としての計算 (§3), 無限等比級数としての計算 (§5), 極限の厳密な定義に基づく説明 (§8, §9). これらの方法を, 数学的に深く考えていく流れの中で紹介し, 数学的に考えるとはどういうことか具体的に話しました. お気づきでしょうが, 小数を無限級数として表し, その無限級数が収束することを示すことが残っています. これは極限の厳密な定義により証明できますが, 煩雑になるので省略します. 完結していませんが, $0.9999\cdots$ の話はこれで終わります.

最後に数学というものについて, 少し話します. 数学の本質は, 答えを求めるための計算や証明の技術にあるのではなく, 物事をどう考えどう捉えるかにあります. 試験などで解答するためには, たくさんの計算技術を習得するのが早道かもしれません. 巧みな計算を覚え, 真似ることよりも, どうしてそのような計算をするのか理由を考えるようにしてみてください. §4 のような無意味な議論をすることがなくなるでしょう. 公式を使うときにも, 間違えることがなくなるでしょう. 数学だけでなく, ありとあらゆる物事を, 論理的に考えることができるようになるでしょう. 数学とは, そういうことを身につけるためのものなのです.