数学科における課題学習のセンスアップ研修講座

課題学習の題材となる数学

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科) †

§1　序

新しい高等学校学習指導要領で, 数学 I, 数学 A に「課題学習」と「整数問題」が導入されました. 中学校学習指導要領では既に「課題学習」が導入されており, 実践されていることと思います. この講義「課題学習の題材となる数学」では, 「課題学習」実践のために, 「実験数学」と呼ばれる研究および学習方法について紹介し, それを応用した発見的学習法, 問題および問題意識の作り方についてお話します. 「整数問題」に向けて, 整数論の考え方についてお話します. 私が以前, 高校生向けの講演会で使ったレジュメを 2 つ添えます (「実験数学入門」「対数関数と計算の歴史」).

§2　実験数学

2.1　「実験数学」とは, 数学において多くの実験により新しい知見を得る研究方法です (山本芳彦著「実験数学入門」). ただ与えられた課題をこなしていても, 新しい知見を得ることはできません. 明確な問題意識のもと, ある種の期待を持ってこれから起こるであろうことを予測し, 必要な実験をする必要があります. 常に自ら考え, 自らの意思で実行することが求められます. 文部科学省の高等学校学習指導要領解説数学編によると,

> 課題学習の実施については，内容との関連を踏まえ，適切な時期や場面を考慮することが大切である。必ずしも，それぞれの項目の終りに実施する必要はなく，複数の項目にわたる課題を学習したり，場合によってはより早い時期に課題学習を行いそれ以後の内容ではどのようなことを学習するのかを感じ取らせ，関心や意欲をもって学習を進めさせることも可能である。
>
> 実施に当たっては，一方的に知識を与えるのではなく，数学的活動を一層重視することが大切である。例えば，課題を理解する，結果を予想する，解決の方向を構想する，解決する，解決の過程を振り返ってよりよい解決を考えたり，更に課題を発展させたりする，という一連の過程に沿って，必要な場面で適切な指導を工夫するとともに，適宜自分の考えを発表したり議論したりするなどの活動を取り入れるよう配慮する。
>
> また，課題については，日頃から生徒が関心をもちそうな話題や生徒に育てたい能力とその能力を育てるために相応しい話題などを考えておくこと，生徒の疑問を課題として取り上げたり，生徒の疑問を課題として設定させたりすることなどが大切である。

とあります. これは「実験数学」そのものです.

2.2　別紙「実験数学入門」をご覧ください. 「実験数学」の考え方について解説し, 分数の小数展開を例にそれを実践して見せたものです. たった 3 ページで, 現在の最先端の数学研究に到達し, 多くの数学者が束になっても未だ解決できない予想を垣間見ることになります. 小数は小学校 3 年生で学習しますから, 小学生 (高学年) でも扱える内容ではあります. 小さな疑問をたくさん書きました. 思ったこと, 感じたことを, 数学の知識を使って定式化を試みたことすべてが問題となります. こうして幾らでも問題を創りだすことが出来ます. 上手く解ける問題もありますが, どうやっても解けない問題も当然出て来ます. 実際に解けるかどうかはどちらでも良いのです. 数学知識が足りないだけなら, 勉強を進めていけばいずれ解くことができます. 既存の数学概念では太刀打ちできないものもありますから, その中の良い問題にであったなら, これは一生の宝となります.

2.3　別紙「実験数学入門」の 1 ページのフローチャートをご覧ください. 「実験数学」の考え方・研究の進め方を流れ図にしました. まずは, どの様な些細なことでも, どの様な内容, どの様な対象でもかまいません. 問題意識や動機を持つこと, あるいは何かを見つめて観察し, 面白いなと感じること, 漠然とした興味, 関心が出発点となります. その興味, 関心, 問題意識を整理し, そのためには何をすればいいのか, 方向付けを考えます. 簡単な場合に実験をし, 良い方を向いているのか検討します. そして, 定式化・モデル化を試みます. 定式化・モデル化できるのは, 既知の数学で取り扱えるかどうかを問う, 最初の難所です. 既知の数学で扱えないなら, 新しい数学を創造することになります. 全く新しい数学を創りだす必要はなく, 知識として知らない数学を発見的に学習していく

† 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1-1　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp
2013 年 8 月 9 日　於　奈良県立教育研究所

ことも含まれます. 別紙「対数関数と計算の歴史」は, 乗除算を計算するための道具 (対数尺を使った計算尺) を作ると言う動機のもと, 対数関数を発見的に学ぶことを目指したものです. 定式化・モデル化が成功したなら, 上手くいけば原理の説明や証明ができますが, そのための道筋の見えない場合も多くあります. そこで大規模実験などで, 実際に起こりうる現象であるかどうか, 期待される結果が得られるかどうか確かめ, 問題点があればそれを洗い出し, 上手くいけば問題解決となります. この一連の手続きが「実験数学」です. 「実験」と言う言葉から, 計算機などを使った実習授業の様な形態を想像されているかもしれませんが, 必ずしも計算機は必要としません. 「実験数学」と特別な研究・教育手法であるかの様に紹介しましたが, ごく自然な思考手続きにすぎません.

2.4　学習指導要領解説にある文章に想定されているものが, 「実験数学」そのものであることがおわかりいただけたかと思います. 「実験数学」を取り入れれば, 興味, 関心さえあれば問題をたくさん作りだすことができます. 少し勉強すれば手の届くところにある問題をどんどん見つかるような題材に出会えれば, 学習効果としてはこの上ないものとなります. 難しい問題, 難しい題材であっても, 解決に向けて少しでも近づける方向性を与えることができれば, その問題や題材を解決できなくても十分に学習効果があります. 私は, 大阪大学での講義, 学生指導において「実験数学」を実践しています. 一定の効果があると実感しています. 学生の興味, 関心の方向は多種多様です. 大勢を一度に指導するのは難しく, 各々に好きなことをさせていては手に余ることになりかねません. 私の取っている方法は, 「実験数学」の考え方を教えた後で, 幾つかの漠然とした題材を提示し, 4, 5 名のグループで一つの題材について一ヶ月ほど考えさせ, 20 分程度の発表を課すものです. その際に重要な注意として最初に断っていることがあります. 必ずしも題材を解決に導く必要がないこと. 題材は自由にアレンジして良いこと. 独自の進展を含むものは特に良い評価を与えること. 必ず全員の意見が入り, 全員で討論した結果であること. 題材を面白いと感じていること.

§3　整数問題と整数論

3.1　高等学校学習指導要領によると, 数学 A で導入された「整数の性質」は, 「約数と倍数」「ユークリッドの互除法」「整数の性質の活用」と 3 つの項目に分けて履修すべき内容が記載されています. そもそも整数論とは何なのでしょうか. 大雑把な分類ですが, 学問には「○○学」と言うものと, 「○○論」と言うものがあります. 「○○学」は研究手法を指すことが多く, 「○○論」は研究対象を指すとこが多い. 整数論は整数を扱う学問で, そのための研究手法は問いません. 整数論は「数学の女王」と呼ばれています. 「女王」つまり, 使えるものなら何でも使う, と言うことです. 代数学的, 解析学的, 幾何学的手法の何を使ってでも, 整数に向かっていればいいのです. 何らかの意味で整数が現れ, 整数論だと納得させせることができれば, それが整数論なのです.

3.2　整数論研究者の立場から見て, 今回の「整数の性質」では次の 2 点の理解が重要と考えます. 整数は, 実数の中で等間隔に並び, 離散的であること. 余りのある割り算をもつこと. 前者は, 数学の他の分野に整数が関わる際に重要な視点です. 後者は, 「約数と倍数」「ユークリッドの互除法」「整数の性質の活用」のすべての項目の核となるものです. 余りのある割り算とは, 正の整数 a と整数 b に対して $b = aq + r$, $0 \leq r < a$ なる整数 q, r が唯一組とれることで, q を商, r を余りと言います. 余り r は割る数 a より小さいことから, ユークリッドの互除法が上手く働く (有限回の手数で終了する). 大小関係を次数に置き換えれば多項式でも余りのある割り算ができるので, 「約数と倍数」「ユークリッドの互除法」の多項式版が得られ, 「整数の性質の活用」はテイラー展開, 部分分数展開などに読み替えることができます.

3.3　小学 4 年で習った分数について, 小学 5 年で, 分母の異なる分数の和差を習います. 分数の和差には, 約数, 倍数, 最大公約数, 最小公倍数を知っておく必要があり, 約数, 倍数を求めるために, 素数, 素因数分解とその一意性が必要となります. 素数は, 1 とその数自身以外に正の約数を持たない自然数として定義されます. 素因数分解とその一意性については, 具体的・経験的に知ることとされ, 数学的な証明は小中高を通して学ぶ機会はありません. 大学では, 代数学で学びます. 代数学の講義は, 数学科で代数系を選択した学生向けのであることが多いので, 素因数分解とその一意性の証明はごく一部の人たちのものとなってしまっています. 素因数分解が可能であることは, 素数でない数の定義と, 約数と元の数の大小関係からわかります. 一意性には, 「素な数」が必要です. 「素な数」とは, 「1 より大きい自然数 p で $a \times b$ を割り切るなら p は a か b を割り切る」もののことです. 素数と「素な数」の定義が同値であることを示すのに, 余りのある割り算が必要です. 使われる道具は小学生でも知っているものばかりですが, 実際に証明するのは結構骨が折れます. 難しいですが面白い課題研究になるかもしれません. 上手く証明 (説明) の手順を与えれば, 多項式についても同じことを証明 (説明) できるでしょう. これも課題研究になるかもしれません.

3.4　「互いに素」と言う概念があります. 学習指導要領には明記されていないようですが, とても有用な概念です. 定義は, 最大公約数が 1 となる整数の組です. 学習指導要領の解説編には, ユークリッドの互除法を使って, 二元一次不定方程式で 1 を表すことと同値であることを, 具体例で理解させることとされています. 証明はさほど難しくはないのですが, 添え字がたくさん出てきてちょっと面倒です. 有理数 (分数) は普通, 互いに素な 2 整数を分母分子にとった既約分数で表します. その 2 つの整数に対してユークリッドの互除法を使うとき, 計算途中に現れる整数の組と最初の分数との関係を調べてみるのも面白い課題研究になるでしょう. 連分数, 最良近似分数など少し難しいけど小学生にでも計算可能な対象で, 問題を少しずつアレンジすることで幾らでも面白い現象に出会えることでしょう. 円周率の近似値としてなぜ 3.14 がよく使われるのか? もっと使いやすい近似値はあるのか? $\sqrt{2}$ の近似値は何か適当か? 野球やソフトボールで塁間の長さなど, どうしてあんな数なのか? 話題に事欠きません.

3.5　二元一次不定方程式は, 50cc の升と 30cc の升を使って正確に 40cc の水を測れ, と言った良くあるパズルに置き換えれます. グッと身近な実用問題に見えて来ませんか. そしてその二元一次不定方程式にユークリッドの互除法がからんできます. 先ほどの升の問題ですが, 50 と 30 の最大公約数は 10 ですから, 互除法により $50\,a + 30\,b = 10$ となる整数 a, b が得られます. 全体を 4 倍すると $50\,(4a) + 30\,(4b) = 40$ なので, 50cc の升を $4a$ 回, 30cc の升を $4b$ 回 (負の数のときは, 汲み出すことになります) 使って 40cc を測ることができます. でもこれは, パズルの答えとしては不十分です. パズルの正解は最短手数のものが選ばれます. みなまで話しませんが, 幾らでも話を膨らませ, 幾らでも面白い話題, 面白い問題, 面白い課題にできると思います.

§4　課題学習の題材となる数学

4.1　大学生を対象にしたものですが, 私がこれまで出したことのある題材の一例をあげましょう. この様なものなら, いくつでも作れると思います.

- $1 = 3 \times \dfrac{1}{3} = 3 \times 0.33333\cdots = 0.99999\cdots$　何か変？　どこが変？
- $1+1$ は, どうして 2？
- (負の数) × (負の数) は, どうして (正の数)？
- 上のことを, 小学生の弟か妹にどの様に説明すれば, 理解してもらえるだろうか？　中学生の弟や妹では？
- 上のことを, 皆さんのお母さんになら, どの様に説明すればいいだろうか？
- 0^0 って, いくつ？　1？　0？
- 定規とコンパスを使って, 数の和, 差, 積, 商を作図せよ.
- 同じ大きさの正方形 4 つを辺でつないだ図形は, 合同なもの (裏返しを含む) を除いて何種類あるか？
- 同じ大きさの正方形 4 つを辺でつないだ図形すべてを重ならないように並べて, 長方形にできるか？
- 上のことを, 正方形 5 つでやってみよ.　また, 正方形 6 つではどうか？
- 球面をどの様な平面で切っても, その切り口は円となる. 円錐, 円柱ではどの様な曲線が現れるか？
- 円柱を斜めに切り取った時, 側面の切り口にはどの様な曲線が現れるだろうか？　円錐ではどうか？
- 1 辺 10cm の立方体の箱に, 直径 1cm の球を詰める. 最大で何個詰めることができるか？
- 1 辺 10cm の立方体の箱に, 直径 1cm, 3cm の球を適当に混ぜて詰める. 隙間が最も小さい詰め方を考えよ.
- 1 辺 10cm の立方体の箱に, 大小 2 種類の球を適当に混ぜて詰める. 小さい方の直径を 1cm とするとき, 隙間が最も小さい詰め方を考えよ.　そのときの大きい方の球の直径は幾つになるか？
- 地震は波として伝わる. 伝搬速度の速い縦波 (P 波) と伝搬続度の遅い横波 (S 波) で, P 波は固体, 液体ともに使わって行くが, S 波は固体のみ伝わり, 液体では伝わらない. 地球の内部構造は大きく分けて地表から, 固体の地殻, 液体のマントル, 固体の地核となっています. 地球内部をだれも直接見ることはできないから, 地震の研究からわかったことなのですが, さて, どうして液体のマントルの内部に固体の地核があることがわかったのでしょうか?

4.2　少し難しいですか？ では, 次の様な題材は如何でしょう.

- 友だちとお金を出し合って, あるお祭りの日にお店を出すことにしました. 売るのは, ジュースとお菓子です. 仕入れ値はジュース 1 本 30 円, お菓子 1 袋 20 円です. 出し合ったお金の合計は 5000 円です. 売値は自由に設定できるのですが, 高いと売れない, 低いと利益があがらない. お客さんは 1 人 300 円ずつ持ってお祭りに来ているとします. 持っているお金全部使って買ってくれるかもしれないし, 興味がないと買ってくれないかもしれない. ジュースとお菓子を幾つずつ仕入れて幾らで売れば, 最も高い利益が得られそうですか？

余りに漠然とした問題設定なので, 真面目に一所懸命方程式を追いかけても当然答えはでません. 不確定要素が山のようにある最適化問題なので, 答えようがないって思われるかもしれませんが, 現実にはもっともっと不確定要素の多い中で経験で解いています. ちょっと実践してみたら, どの様なことが起こりそうか想像でき, それを反映させた多種多様な解が出てくるでしょう. どれが正しいのか? 答えは簡単. 初めから正解のあり得ない問題設定なので, どれも正しく, どれも正しくないのです. では, この後どうすればいいのか. 簡単です. みなでお店屋さんごっこをして, 売上上位ランクを付ければいいのです. 上位を得たお店のノウハウを共有すれば, より良いお店になるはずですが, 予想通りにいくかどうか. 予想に反したなら, その原因はどこにあるのか ⋯ .

4.3 話は尽きませんが, §2 で話した「実験数学」の単純な応用です. 教科書にある問いでも例題でも何でもかまいません. 問題設定を少し緩やかにして, 課題にしてみてください. 「解けない！」「解けるはずがない！」って言ってくるのが殆どでしょうから, 各自が良いと思った条件を自由に課して解いて良いと言って, どんな形でも解を得る努力をしてもらう. 数名ずつグループにして, 議論をしてより良い条件を探させる. それぞれのグループの結論同士を戦わせる (上のお店屋さんごっこみたいなこと). いろいろな状況設定で幾らでも応用ができるのではないでしょうか. 予めやってみて面白そうなものを選べば, 恐らく最も単純な「課題研究」の作り方ではないでしょうか. もしどの様な数学を使っていることになるのか疑問に感じたなら, 小学校, 中学校, 高等学校の学習指導要領の次の文章をご覧ください. 数学教育の目的に沿ったものと言えます.

[**小学校**] 算数的活動を通して，数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け，日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え，表現する能力を育てるとともに，算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き，進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。

[**中学校**] 数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。

[**高等学校**] 数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。