方程式を図で解くはなし

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科) †

§1　序文 —方程式を解くとは ?—

今日は「方程式を解く」ということについてお話します. そもそも「方程式」とは何でしょう. x, y などの文字 (変数) を使った $4x = 6$ とか $y^2 = x^3$ とか $3^x - 2^y = 1$ の様な等式や, それらの組 (連立) が思い浮かびます. 四則演算の範囲を超えて, 数学 II, III で習う三角関数, 指数・対数関数, 微分・積分など, 難しい概念を使った「方程式」がたくさんあります. 「方程式」とは「幾つかの対象の性質・特徴について述べた等式 (命題) およびそれらの組」です. この意味で「方程式」は我々数学者の扱う数学だけでなく, 科学・工学・医学などの理系分野, 経済・政治・文学などの文系分野など, あらゆる分野に現れます. 「解く」とはどういうことでしょう. 素朴には, 答えを見つけること,「方程式」を成り立たせる値を求めたり, 既知の対象で表すことです. しかし, 様々な分野における「方程式」の多くは明確な答えを得ることが難しく, このような「解き方」ができません. 「解く」とは本来, 応用のために必要かつ十分な情報を得ることです. 今日は, 1変数代数方程式 (ひとつの変数の多項式 (整式) で表された等式) の解 (その等式を成り立たせる数) について理解を深めることについてお話しします.

§2　代数方程式

2.1　多項式 (整式)　　文字 x, y などのを変数とする $x^2 + 2xy$ とか $\sqrt{3}y^2 + 2xy + \pi$ などのように,「(数) × (幾つかの変数の積)」の形の**単項式** (一つの項の式という意味) の幾つかの和を, **多項式** (たくさんの項の式という意味) と言います. 教科書に合わせて「**整式**」と呼ぶべきかもしれませんが, より進んだ書物などで勉強する際の助けになるように「多項式」ということにします. 変数が一つ (x とします) のとき, 単項式は $a\,x^n$ (a は数, n は 0 以上の整数) と表されます. a を係数, n を次数といいます. 多項式は, 次数ごとに一つの項にまとめ, 次数の大きい順 (降べきの順) もしくは小さい順 (昇べきの順) に並べられます. 多項式に表れる項で次数の最も大きい項を選び, その項の次数を**多項式の次数**といい, その項の係数を多項式の**最高次係数**といいます. 次数が 0 の項を**定数項**といいます. 多項式は, 次数を添えて, 1次多項式, 2次多項式, n 次多項式などということもあります. 最高次係数が 0 なら, 実際の次数は小さくなってしまいますから, 次数を指定した多項式では多くの場合, 最高次係数は 0 でないと仮定します. 多項式を表すのに関数の様に $f(x)$ と表すこともあります. 多項式で書かれた方程式を**代数方程式**といい, すべての項を左辺に移項することで $f(x) = 0$ ($f(x)$ は多項式) と表せます. 多項式 $f(x)$ の次数に合わせて, 代数方程式 $f(x) = 0$ を1次方程式, 2次方程式などといいます.

2.2　代数学の基本定理　　代数方程式を解くというのは, 解 (その方程式を成り立たせる変数 x の値) を求めることです. $3x - 4 = 0$ の場合は $x = 4/3$ で, $x^2 = 1$ の場合は $x = \pm 1$ です. $x^2 = -1$ の場合, 二乗して負の数 -1 になる実数は存在しませんから, 解はありません. 少し間違えました. $x^2 = -1$ には実数の解はありません. 数学 II で複素数について勉強し, 数の世界が実数から複素数に拡がります. 複素数とは, 二乗して -1 になる虚数単位 ($\sqrt{-1}$ もしくは i と書く) を導入し, 実数と i の実数倍の和, $1 + i$ や $\pi - \sqrt{2}\,i$ のような形で表される数です. 数の世界を複素数に拡げると, 2次方程式 $x^2 = -1$ は $x = \pm i$ を解にもちます. 解を探す範囲を複素数に拡げるのであれば, 代数方程式の係数 (方程式に現れるすべての項の係数) もまた複素数に拡げるべきかもしれません.

代数学の基本定理 (Gauss)　代数多項式は複素数の解をもつ.

因数定理　多項式 $f(x)$ について, $f(\alpha) = 0$ ならば $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ となる多項式 $g(x)$ が存在する.

定理　n 次代数方程式の解はすべて複素数で表され, n 個以下である.

複素数を係数とする多項式 $f(x)$ について, その係数をすべて複素共役 (虚数単位 i の係数の符号を変えること. 例えば $1 + i$ の複素共役は $1 - i$ です) に変えたものを $\overline{f}(x)$ とします. 複素数に関する少し面倒な計算ですが, 多項式 $f(x)\,\overline{f}(x)$ の係数はすべて実数になります. 次数が大きくなることを気にしなければ, 代数方程式の係数は実数で十分です. 以下, 代数方程式は係数が実数のものを考えます.

§3　代数方程式の解の公式

3.1　2次方程式の解の公式　　1次方程式 $ax + b = 0$ の解は $x = -b/a$ で簡単です. 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ では, $(ax + b/2)^2 = a^2x^2 + abx + b^2/4 = -ac + b^2/4 = D/4$ ($D = b^2 - 4ac$) なので, 平方根をとって整理すると $x = (-b \pm \sqrt{D})/2a$ を得ます. **2次方程式の解の公式**といいます. $D \geq 0$ ならば, $\sqrt{D}$ は実数なので, 解も実数です. $D < 0$ ならば, $\sqrt{D}$ は虚数単位の実数倍で, 解は複素数になります. 数学 III で**複素数平面**について勉強します. 複素数を平面上の点で表し, 複素数の四則演算や負の数や複素数の平方根などを複素数平面上で視覚的にとらえることができるようになります.

---

† 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1-1　　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp
2017 年 11 月 6 日　於 奈良県立 奈良高等学校

3.2　３次方程式の解の公式　　３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ にも解の公式 (カルダノの公式, タルタリアの公式) があります. $(ax+b/3)^3=a^2(ax^3+bx^2)+(ab^2/3)x+b^3/27=a^2(-cx-d)+(ab^2/3)x+b^3/27$ より, 右辺は x の１次式になります. $ax+b/3=X$ とおくと $X^3-3pX-2q=0$ (p, q は a, b, c, d で表される数) が成り立ちます. $X=u+p/u$ とおくと $2q=X^3-3pX=(u+p/u)^3-3p(u+p/u)=u^3+p^3/u^3$ なので, u は $u^6-2qu^3+p^3=0$ をみたします. $U=u^3$ とおくと $U^2-2qU+p^3=0$ なので, $U=q\pm\sqrt{D}$ $(D=q^2-p^3)$ です. U の３乗根をとって $u=\sqrt[3]{U}$ より $X=u+p/u=\sqrt[3]{U}+p/\sqrt[3]{U}$ を得ます.

3.3　４次方程式の解の公式・５次方程式の解の公式 ⋯

４次方程式にも, 四則演算とべき根 (平方根, ３乗根, ４乗根) を使って表される解の公式 (フェラーリの公式) があります. ５次方程式や６次方程式なども多少複雑であっても解の公式が欲しくなりますが, ５次以上の代数方程式は, 四則演算とべき根を使った解の公式が存在しないことが証明されています (アーベルの定理, ガロアの定理).

３次方程式, ４次方程式に, 上とは趣の違う解の公式があります. 数学 I で**三角比**を習ったところでしょうか. 数学 II でこの三角比を角度の関数とみて, **三角関数**を定義します. 三角関数を使った解の公式があります. 非常に見通しがよく計算自体は簡単ですが, 三角関数について準備が必要です. 三角関数を習ったときにでも,「$\cos(3\theta)$ を $\cos\theta$ で表すと ⋯ 」を思い出してみてください. **角の３等分**の作図問題とも関係があります.

新しい関数を使ってよいのなら, もっと高い次数の代数方程式にも解の公式があります. ５次方程式, ６次方程式には楕円関数を使った解の公式が, もっと高い次数の代数方程式にはテータ関数を使った解の公式があります.

§4　実数の演算と作図

4.1　再び, ３次方程式　　３次方程式 $x^3-21x+20=0$ の解を解の公式で求めてみます. $p=7$, $q=-10$ ですから $D=q^2-p^3=-3^5$, $U=-10\pm9\sqrt{3}\,i$, $u=\sqrt[3]{-10\pm9\sqrt{3}\,i}$ で, $x=\sqrt[3]{-10+9\sqrt{3}\,i}+7/\sqrt[3]{-10+9\sqrt{3}\,i}$ となります. ところで $x^3-21x+20=(x-1)(x-4)(x+5)$ ですから, 解は $x=1, 4, -5$ です. 解はすべて実数なのに, 複素数で表されています. $\sqrt[3]{-10+9\sqrt{3}\,i}+7/\sqrt[3]{-10+9\sqrt{3}\,i}$ は $1, 4, -5$ のどれを表しているのでしょう. 解の公式から値を得るのは簡単ではありません. 実数であるか複素数であるかの判別さえ難しいときがあります. 代数方程式の解を直感的にとらえるにはどうしたらいいでしょうか.

少し補足します. $\sqrt[3]{\square}$ は $\square$ の３乗根で, ３乗して $\square$ になる数のことです. ２乗して $\square$ になる平方根の場合には $\pm\sqrt{\square}$ と符号の異なる２数がありました. $\pm$ は $x^2=1$ の根 ±1 に由来します. ３乗根 $\sqrt[3]{\square}$ の場合にも, **３乗根の符号** ($x^3=1$ の解 $x=1, (-1\pm\sqrt{3}\,i)/2$) の異なる３つの数があります. ３乗根のすべてを表すには符号を添えて書くべきですが, ややこしくなるので符号は省略して単に $\sqrt[3]{\square}$ と書きました. $\sqrt[3]{-10+9\sqrt{3}\,i}+7/\sqrt[3]{-10+9\sqrt{3}\,i}$ は１つの式ですが, ３乗根の符号の違いからくる３つの数を表しています.

$U=-10+9\sqrt{3}\,i$ の３乗根 $u=\sqrt[3]{U}$ ですが, ３つの複素数 $(1-3\sqrt{3}\,i)/2$, $2+\sqrt{3}\,i$, $(-5+\sqrt{3}\,i)/2$ は３乗すると U になります. u としてそれら３つの複素数を代入すると, $x=u+7/u$ の値はそれぞれ $1, 4, -5$ となります. 複素数の計算に慣れれば, この様に解の公式から数値を読み取れることもあります.

4.2　定規とコンパスを使った作図　　定規は, 与えられた２点を通る唯一つの直線を描くこと, 与えられた１点を通る直線を描くことができます. コンパスは, 与えられた点を中心とした円を描くこと, 与えられた２点間の長さをうつし取ること, 指定された半径をもつ円を描くことができます. 直線と直線の交点, 直線と円の交点, 円と円の交点で新たな点を指定することができます. 定規とコンパスを使った作図とは, 直線と円を組み合わせて描くことです. 例えば次の様な作図ができます.

(あ)　線分や角を２等分する. 三角形の内接円, 外接円を描く.
(い)　与えられた直線に垂直な直線を描く. 平行な直線を描く.
(う)　円の外部の点を通り円に接する接線を描く.

4.3　和差の作図　　２つの数 a, b が２点間の長さとして描いてあるものとします. 長さは正の数ですから, 負の数を扱うためには向きの考え方が必要となります. a も b も正の数の場合を考えましょう. 定規で直線を描き, 長さ a を直線上にうつし取り, 長さ a の線分を描きます. その線分の端点から長さ b を同じ直線上にうつし取り, 長さ b の線分を描きます. ２つの線分が重ならないように取れば, 全体の長さは $a+b$ になります. ２つの線分を重ねて描けば, 重ならない部分の長さは $|a-b|$ になります. a, b の大小に応じて符号を調節すれば, 絶対値をはずせます. a, b の両方もしくは一方が負の数の場合は, 絶対値を取ったものの和と差を作図し, 符号を調整すればよい.

4.4　積商の作図　　相似な三角形の辺の比を使います. ２辺の長さが x と a の三角形と, 対応する２辺の長さが b と c の相似な三角形をとると, 比例関係 $x:a=b:c$ が成り立ち, $x=ab/c$ となります. c を 1 にとると $x=ab$ より積が, b を 1 にとると $x=a/c$ より商が得られます. 作図には平行線を使うのがよいでしょう.

4.5　平方根の作図　　平方根の作図にも相似な三角形の辺の比を使います. 辺 OP を共有する相似な三角形 $\triangle OAP$ と $\triangle OPB$ を考えます. 辺の長さの間に比例関係 $OA:OP=OP:OB$ が成り立ちます. $OP=x$, $OA=a$, $OB=b$ とすると, $a:x=x:b$ なので $x^2=ab$ すなわち $x=\sqrt{ab}$ です. 特に b を 1 にとると $x=\sqrt{a}$ となります. 作図には直角三角形を使うのが簡単でしょう.

4.6　数を長さに　　四則演算を作図するために数を長さで描いておく必要がありました. 例えば, 円周率 π を長さにもつ線分を描くにはどうすればいいでしょうか. 半径 1 の円を描けば, 周の長さは 2π で, 面積は π です. 曲がった円の周の長さを直線にうつし取るには ⋯ . 円の面積を長さに変換するには ⋯ .

これは, **円積問題**です. 円積問題とは,「与えられた円の面積と同じ面積を持つ正方形を作図せよ」と言う問題で, 立方体倍積問題, 角の３等分とともに有名な３大作図問題です. これら３大作図問題は作図不可能であることが証明されています. ここでいう作図は, 基準単位長 1 をもとに定規とコンパスを使って図を描くことです. 基準単位長 1 というのは, 作図における長さを数という量に対応させるための基準となる長さです. ここまで, 積商の作図, 平方根の作図などで断りなく登場した 1 が作図の基準となる長さの単位となるもので, 基準単位長といいます. 長さの作図は, 作図により基準単位長との比較を行う作業になります. 円積問題より, 円周率 π の長さをもつ線分は作図できないのです. 基準単位長との明確な比較を行わずに, これが π です, などということはできないのです.

4.7　方べきの定理　　**方べきの定理**は, 数学 A で学ぶ重要な定理のひとつで, 交点をもつ２直線と円との交わりにおける長さの関係式です. 点 P で交わる２直線をとり, P 以外の点でその２直線に交わる円をとります. 円と, 一方の直線との交点を A, B, 他方の直線との交点を C, D とすると, $PA \times PB = PC \times PD$ が成り立ちます. 円が直線に接しているときは $A = B$ あるいは $C = D$ となりますが, このときも同じ等式が成り立ちます.

方べきの定理で, 積商の作図, 平方根の作図をしましょう. $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$ とすると $PD = ab/c$ で, 積商が得られます. C で円と接すると $D = C$ となり, $PA = a$, $PB = b$ とすると $PC = \sqrt{ab}$ で, 平方根が得られます. 積商の作図には外接円の作図を, 平方根の作図には接線の作図を使えばいいでしょう.

§5　２次方程式の解の作図

5.1　解の公式を使った解の作図　　２次方程式の解の公式は, 係数の四則演算と平方根で書かれていますから, すべての係数と基準単位長 1 をもとに定規とコンパスで解を作図できます. ２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式 $x = (-b \pm \sqrt{D})/2a$ $(D = b^2 - 4ac)$ より, 四則演算で $D = b^2 - 4ac$ を描き, 平方根 $\sqrt{D}$ を描いて, $1/2a$ 倍すればいい. 平方根 $\sqrt{D}$ を描くためには $D = b^2 - 4ac \geq 0$ でなければなりません. a, b, c の正負により場合分けが必要かもしれませんが, 基本的にはこれでおしまい.

5.2　方べきの定理を使ってみると …　　方べきの定理を使うと見通しの良い解の作図ができます. ２次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の解は $x = (-b \pm \sqrt{D})/2$ $(D = b^2 - 4c)$ ですから, ２つの解の和は $-b$ で積は c です. これは「**解と係数の関係**」といい, 数学 II で学びます. 解の公式を使って説明しましたが,「解と係数の関係」は解の公式を使わずに多項式の計算で証明されます. 「解と係数の関係」からは, そのような２数はもとの２次方程式の解であることもわかります. 話しを簡単にするために $b < 0$, $c > 0$ とします. ２次方程式の２つの解の和 $-b$ も積 c も正なので, ２つの解がともに実数なら, 正の実数です. §4.7 と同じ記号で, P で交わる２直線が円と A, B, C, D (A と B, C と D がそれぞれ同じ直線上) で交わっているとき, 方べきの定理より, $PA \times PB = PC \times PD$ が成り立ちます. $PC = 1$, $PD = c$, $PA + PB = -b$ となるように描ければ, PA と PB は和が $-b$, 積が c の正の実数なので,「解と係数の関係」より, ２次方程式 $x^2 + bx + c = 0$ の解となります.

$a > 0$ とします. $PC = a$ とすると, PA, PD の和が $-b$, 積が ac になります. PA, PB の相似により $1/a$ 倍すると, 和が $-b/a$, 積が c/a になるので,「解と係数の関係」より２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が得られます.

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ において, $a < 0$ のとき方程式全体を -1 倍すれば x^2 の係数を正にできます. $b > 0$ のとき, $y = -x$ は $ay^2 + (-b)y + c = 0$ をみたし, x^1 の係数が負になります. ２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ として $a > 0$, $b < 0$ の場合を考えれば十分です. $c = 0$ の場合は解は $x = 0$, $-b$ で簡単です. 上で考えた $c > 0$ の場合, 実数の解はともに正の数でした. §4.3 の和差の作図において正の２数の和は線分をつないで伸ばすので, 点 P は A と B の間にあり, 円の内部に位置します. $c < 0$ の場合は, ２つの解の符号が異なります. 符号の異なる２数の和は線分を重ねるように描くので, 点 P は A と B の外側にあり, 円の外部に位置します. P を通るもう一つの直線上でも, 点 P は C と D の外側です. $-c > a$ のときは P, C, D の順に, $a > -c > 0$ のときは P, D, C の順に並びます. $-c = a$ のときは C と D が重なるので, 直線 PC は円に接します.

5.3　解の作図　　２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a > 0,\ b < 0,\ c > 0)$ の２つの解を作図しましょう. 水平方向に長さ $-b$ の線分 AB を描きます. 点 A を通り AB に垂直な直線上に A からみて下方に $AA_- = a$ の点 A_- を, 上方に $AA_+ = c$ の点 A_+ をとります. 点 B でも同様に AB に垂直な直線上に $BB_- = a$, $BB_+ = c$ となる B_-, B_+ を, AB に対して B_- を下方 (A_- と同じ側) に B_+ を上方 (A_+ と同じ側) にとります. 四角形 $A_+A_-B_-B_+$ は辺の長さが $-b$, $a + c$ の長方形になります. 長方形の中心 (対角線の交点) を O とします. O を中心とし A, B を通る円を描き, 円と A_-B_- の交点のひとつを C とおきます. C を通り AB と垂直に交わる直線と, 直線 A_+B_+ との交点 D は, 円の上にあります. AB と CD の交点を P とおくと, $PC = a$, $PD = c$, $PA + PB = -b$ です. 方べきの定理より $PA \times PB = ac$ となります. 「解と係数の関係」より, PA, PB は $x^2 + bx + ac = 0$ の２つの解で, 積商の作図により $1/a$ 倍すれば $ax^2 + bx + c = 0$ の２つの解が得られます. $c < 0$ の場合は, A_+, B_+ を AB から見て下方にとれば, 後は同様です.

この作図において, 円が A_-B_- と交点をもたなかったらどうなるのでしょうか. ２次方程式 $x^2 + bx + ac = 0$ に実数の解があればその解が PA, PB となるように点 P を直線 AB 上に取れます. 「解と係数の関係」から $PA \times PB = ac$ となります. P を通り AB に垂直に交わる直線を描き, A_-B_-, A_+B_+ との交点をそれぞれ C, D とすると $PC = a$, $PD = c$ なので $PC \times PD = PA \times PB$ が成り立ちます. このとき方べきの定理により A, B, C, D を通る円が存在します. 平面幾何の簡単な議論でこの円の中心と長方形の対角線の交点が一致することがわかります. 円が A_-B_- と交点をもつことための必要十分条件は２次方程式が実数の解をもつことなのです.

円が A_-B_- と交点を持つためには, 円の中心と A_-B_- との距離 h が円の半径 r を越えなければいい. $h=(c+a)/2$ で $r^2=((c-a)/2)^2+(b/2)^2$ なので, 条件 $h \leq r$ は $(c+a)^2 \leq (c-a)^2+b^2$ なので, $b^2-4ac \geq 0$ を得ます. これは §3.1 で 2 次方程式の解が実数であるかどうか解の公式で調べたことの別証になっています.

ちなみに, $c<0$ のときは, 円と A_-B_- が必ず交わることが簡単に示され, 2 次方程式が実数の解をもちます. またこのとき, $a>0$ より $b^2-4ac>0$ です.

5.4 作図の方法はたくさんありますが … 原理となる「解と係数の関係」がはっきり見える形で解の作図を与えました. 山ほどある作図のほとんどは, 上の作図と同様に方べきの定理を使っています. 「解と係数の関係」を原理として意識していないものが多く, 方べきの定理で計算できることに触れていないものも多く, 解が作図できたことの説明のために座標計算や長さ計算で解の公式通りの式を導いています. 原理を理解していれば, 解が得られることは必然なので, その様な計算はいりません. 数学とはこういうものです. 手順が多少込み入っていたとしても, 単なる技術の問題であってそれは数学の問題ではない. ガウスによる正 17 角形の作図は, 数学の世界が変わる転機となる大発見でした. 現代数学では $3=2^1+1$, $5=2^2+1$, $17=2^4+1$ という等式にそのすべてが含まれています. ガウスが発表した当時, それでは意味が通じないので, 正 17 角形を作図して見せました. それに対する反応の多くは「ガウス氏の作図法は込み入っていて不完全なのでより単純な新しい作図法を与える」というものでした. 余程のアイデアが含まれない限り, 数学としてこれらに意味はありません. 当然のようにガウスは無視しました. ガウスは, $257=2^8+1$, $65537=2^{16}+1$ の正多角形も作図可能であることを理論的に示しました (作図法は与えていない). これが, §3.3 のアーベル, ガロアらの研究につながっていきます.

§6 デカルトの符号律

6.1 実数の解の個数 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式, 解の作図において $D=b^2-4ac$ が現れました. 解の公式では平方根をとるという代数的な要請から, $D>0$ なら実数の解が 2 つ, $D=0$ なら実数の解が 1 つ, $D<0$ なら複素数の解が 2 つであることが導かれました. **2 次方程式の解の判別**といい, 数学 II で学びます. 解の作図では実数の解をもてば図形が描け, 図形が描けるためには $D \geq 0$ でなければなりませんでした. 解の作図からも 2 次方程式の解の判別が示されました. $\boldsymbol{D=b^2-4ac}$ を**2 次方程式の判別式**といいます.

§2.2 の代数学の基本定理より, 代数方程式の解はすべて複素数で, 解の個数は方程式の次数以下であることがわかっています. 次数の高い代数方程式において, 実数の解がいくつあるのかどうやって調べればいいでしょうか.

6.2 ある 3 次方程式 3 次方程式 $x^3-6x+2=0$ を考えます. 解の公式から $x=u+2/u$ $(u=\sqrt[3]{-1+\sqrt{7}\,i})$ ですが, 何だかよくわかりません. 仕方ないので, $f(x)=x^3-6x+1$ に $x=0,1,2,3,4,\cdots$ を代入してみましょう. $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=-2$, $f(3)=11$, $f(4)=42$ となります. 数学 III で習う次の定理があります.

> **中間値の定理** 連続な関数 $f(x)$ を考える. $a<b$ において $f(a)$ と $f(b)$ の符号が異なるなら, a と b の間に $f(x)=0$ の解が存在する.

負から正に, 正から負に向かうためには必ず 0 を通らないといけない, と言うことです. 中間値の定理から 0 と 1 の間, 2 と 3 の間に $f(x)=0$ の解があることになります. **ニュートン法** (方程式の解の近似値を計算する方法. 数学 III で習うかも) でこの 3 次方程式の解を計算すると, -2.60167, 0.33987, 2.26180 となります. この数値の最終桁は四捨五入ではなく切り捨てなので, 最終桁まで正しい値です. x に負の整数を代入すると -2.60167 も見つけられそうですが, とりあえず 0 以上の実数の解を調べることにします.

x に数を代入したときの $f(x)$ が符号がわかれば十分です. $f(0)$ の値は $f(x)$ の定数項の 2 なので $f(0)$ は正です. $f(1)$, $f(2)$ は負, $f(3)$ $f(4)$ は正です. 代入する x の値は正で, x^3 の項と定数項の係数はともに正で, x^2 の項はなく, x^1 の項の係数のみ負ですから, $f(1)$, $f(2)$ が負になったのは x^1 の項の影響です. $f(3)$ と $f(4)$ では, x^3 に $x=3,4$ を代入した 3^3, 4^3 が大きく, 他の項を圧倒して正の数となっています. x^3 の項の影響は, x を大きくすると増えていきますから, 以後 $f(x)$ の値は正になりそうです. 証明には, 数学 II, III の**微分**を学ぶ必要があります. $x=0$ では定数項, $x=1,2$ では x^1 の項, $x \geq 3$ では x^3 の項と, x の値が大きくなるに従って, $f(x)$ の値に影響を与える項の次数が大きくなっています. $f(x)$ の値の符号は影響を与える項の符号に関係がありそうです. x を 0 から大きくしていくときの $f(x)$ の符号の変化は係数の符号の変化に関係がありそうです.

6.3 デカルトの符号律 $f(x)=x^3-2x+2=0$ について §6.2 と同じことを調べてみると, 0 以上の整数 x についても $f(x)$ の値は正の数です. $x \geq 0$ で $f(x)>0$ となることが微分を使って証明できます. 正, 負, 正と係数が並んでおり, 値の符号変化と一致していません. §6.2 の発想は少し安直だったのでしょうか.

> **デカルトの符号律** 代数方程式の 0 でない係数を次数について昇べきの順または降べきの順に並べる. このとき正の実数の解の個数は, 係数の並びの符号変化の回数を越えない.

代数方程式 $f(x)=0$ について, $f^-(x)=f(-x)$ とおくと, $f^-(x)=0$ の正の実数の解は $f(x)=0$ の負の実数の解になります. $f(x)=0$ に $f^-(x)=0$ を合わせて考えることで実数の解をすべて調べることができます.

デカルトの符号律はとても簡単な判定法ですが, 個数の上限しかわかりません. もっと精密な「**スツルムの定理**」があります. 代数方程式からスツルム列という数の並びを定義し, その符号変化で実数の解の個数を正確に計算する方法です. 数学 II, III で, 微分の応用として, 関数の**極大極小**, **最大最小**について学び, 関数の**グラフの概形**を描けるようになります. 「スツルムの定理」は, これら微分の応用とデカルトの符号律の延長線上にあるものです. 理解するには大学で学ぶ解析学の知識が必要となります.