

# アナログ計算機を作ろう

小川 裕之 (大阪大学大学院 理学研究科)<sup>†</sup>

## §1 序文

数学を勉強する目的は、論理的な思考力を養うことにあります。数学では、数を使った計算を伴う問題に多く出会います。論理的思考力に計算力が伴えば正しい答えに達します。答えが合うようにすることで正しい論理の道筋をたどれるようになります。数学は難しいと言われることがあります。難しいのは論理(考え方)であって、計算ではありません。小学校以来、九九を習い、筆算を習い、四則演算(加減乗除)の計算練習を繰り返してきました。習いたての小学生ならまだしも、高校生の皆さんで、四則演算を難しいと表現することは少ないでしょう。難しいかどうか、答えが合うかどうかは違います。100桁を超える数の四則演算で、いつでも正しい答えを求められるでしょうか。私には無理です。そんな面倒な計算、そもそもやる気が起こりません。何度やっても答えが合う気がしません。計算は難しいのではなく、面倒なのです。

さて今回は、面倒な四則演算を道具にやらせよう、と言うお話です。面倒でも、やる気がでなくても、たくさん計算しなければならぬ場面に出会うことがあります。少しでも楽に計算する方法を考えてみましょう。§2でEuclid原論「比例論」から四則演算を幾何学で説明し、定規を使って加減算アナログ計算機を作ります。§3で乗除算計算のための道具を考案し、乗除算アナログ計算機を作ります。§4は少し難しいお話です。数学IIIで解析学を勉強します。それを勉強する前の皆さんに、大学で学ぶ解析学の発想で§3で見たものが指数関数の逆関数(これは、数学II)であることを説明します。少し雑に見えますが、すべてをきちんとした数学の議論にすることができます。

## §2 Euclid 原論「比例論」

Euclidの原論には「比例論」の巻があり、四則演算をはじめとした実数の性質を幾何学の公理から幾何学的に導き出しています。加減算も乗除算も作図で定義されています。十分に良い精度で作図し、量を数値として読み取れば、計算に利用することができます。

### 2.1 符号付き長さ(数直線)

平面上に直線 $l$ をとり、その上に点 $O$ を定めます。 $l$ 上に $O$ と異なる点 $E$ を取り、線分 $OE$ の長さを1と定め、 $O$ から見て $E$ の向きを正の向き、その反対側を負の向きとします。直線 $l$ 上の点 $P$ について、線分 $OP$ の長さは $OE$ の長さを基準に測り、 $P$ が正の向きにあるときは正の数で、 $P$ が負の向きにあるときは負の数で表すことにします。通常の間とは異なり符号が付くので、符号付き長さと呼ぶことにします。面倒な説明ですが、起点 $O$ を0とし、 $E$ を1とする数直線のことです。

### 2.2 加減算の作図

実数 $a$ と $b$ について、和 $a+b$ を作図します。皆さんがこれまで習った平面図形のすべての性質を前提条件とし、予め図形的に与えられた2つの実数 $a, b$ に対して、和 $a+b$ に対応する実数を図形的に表すことを目標とします。直線 $l$ 上に起点 $O$ をとり、符号付き長さを考えます。直線 $l$ 上に $O$ から見た符号付き長さが $a$ の点 $A$ と、 $O$ から見た符号付き長さが $b$ の点 $B$ を取ります。始点を $O$ から $A$ にずらして、 $A$ から見た符号付き長さが $b$ の点 $C$ を $l$ 上に取ると、点 $C$ の $O$ から見た符号付き長さは $a+b$ に等しい。差 $a-b$ は $a+(-b)$ ですから、 $a$ と $-b$ の和を求めればよい。符号付き長さが $-b$ の点は、符号付き長さが $b$ の点と $O$ に関して対称の位置にある。 $C$ は $A$ から見た符号付き長さが $b$ の点なので、 $A$ に関して $C$ と対称な点 $D$ が $O$ から見た符号付き長さが $a-b$ になる。

少し面倒ですが、図を描いてみれば簡単です。 $OB$ と同じ(符号付き)長さの点を、 $A$ から取っただけです。平面を直線 $l$ で上側と下側に切り分けてみます。起点 $O$ を上側、下側の両方に、 $A$ を上側に、 $B$ を下側に書きます。下側の面を切り口 $l$ に沿ってずらして、下側の面の起点 $O$ を上側の面の点 $A$ に重ねます。下側の面の起点 $O$ から見た符号付き長さが $b$ の点 $B$ は、上側の面で見ると $A$ から見た符号付き長さが $b$ の点 $C$ に重なり、 $C$ は $O$ から見た符号付き長さが $a+b$ の点になります。

直線 $l$ の上側の面と下側の面を定規で置き換えてみましょう。起点の0をはさんで正の数と負の数が、数の大きさの距離のところに目盛りを刻んだ普通の定規を2つ用意します。上の定規の目盛り $a$ に下の定規の起点0を合わせると、下の定規の目盛り $b$ に重なる上の定規の目盛りが $a+b$ になります。原理的には正確ですが、長さというアナログ量に置き換えたため測定誤差が生じます。この意味で、加減算アナログ計算機と呼ばれます。

### 2.3 乗除算の作図

実数 $a, b$ から、作図により積 $a \times b$ 求めます。点 $O$ のみで交わる2直線 $l, m$ をとり、直線 $l$ 上に点 $E$ を線分 $OE$ の長さが1となるように、直線 $m$ 上に点 $F$ を線分 $OF$ の長さが1となるように取り、これらを基準に $l$ と $m$ に $O$ から見た符号付き長さを定めます。直線 $l$ 上に $O$ から見た符号付き長さが $a$ の点 $A$ を、直線 $m$ 上に $O$ から見た符号付き長さが $b$ の点 $B$ を取ります。点 $F$ と点 $A$ を結び、点 $B$ を通り $FA$ に並行な直線と $l$ との交点 $C$ の、 $O$ から見た符号付き長さが $a \times b$ になります。

<sup>†</sup> 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp  
2016年10月28日 於 奈良県立 奈良高等学校

図を描いてみると、言葉での説明より簡単です。△OFA と △OBC は相似比が  $1:b$  の相似図形なので、OC の (符号付き) 長さが  $a \times b$  になります。この作図法を計算機として実現し実際の計算に応用するのは少し問題があります。定規をずらす加減算アナログ計算機に比べて、作図に手間がかかり、誤差が大きくなってしまいます。ですが、少し面白いことの説明に使えます。負の数と負の数の積が正の数になることが作図により説明できるのです。説明は略しますが、商  $a/b$  も三角形の相似を使って作図できます。

### §3 掛け算を計算する定規

機械式計算機は乗法も除法も計算できますが、乗法は加法を基にしています。例えば  $2 \times 3$  は  $2+2+2$  と考え、加法を繰り返します。加減算アナログ計算機で  $2+2+2$  として積  $2 \times 3$  を計算できますが、数が大きくなると手数がかかり、誤差も大きくなります。加減算アナログ計算機のように目盛りのある定規をずらして乗除算を計算する、乗除算計算定規というものを作ることはできないであろうか。話を簡単にするため正の数同士の積とします。

#### 3.1 足し算との比較

どの数に 0 を加えても値は変わらないので、加法は 0 が起点です。0 より大きい正の数、0 より小さい負の数があり、正の数を加えると元の数より大きくなり、負の数を加えると元の数より小さくなる。加える数が大きいほど値は大きくなり、小さいほど値は小さくなる。どの数に 1 を掛けても値は変わらないので、乗法の起点は 1 です。1 より大きい数を掛けると元の数より大きくなり、1 より小さい正の数を掛けると元の数より小さくなります。掛ける数が大きいほど値は大きくなり、掛ける数が小さいほど値は小さくなる。乗除算計算定規は 1 を起点に、1 より大きい数、1 より小さい正の数を相反する側に並べることになります。

加法の作図で直線  $\ell$  に起点  $O$  と異なる点  $E$  をとり、 $OE$  の長さで 1 を、 $O$  から見た  $E$  の方向での正の向きを定め、 $\ell$  上の点に数値 (目盛り) を対応させました。乗除算計算定規では、1 の次に大きい自然数 2 を基準に、目盛りを定めてみましょう。定規の上の実際の長さ目盛りの数が混乱しないように、便宜上ですが、実際の長さには単位の cm を付けることにします。乗除算計算定規の 1 から見て長さ 10cm のところに 2 の目盛りを置きます。加減算アナログ計算機では、上の定規の  $a$  の目盛りに下の定規の起点 0 を合わせ、下の定規の  $b$  にあたる上の定規の目盛りが  $a+b$  になります。乗除算計算定規では、上の定規の  $a$  の目盛りに下の定規の起点 1 を合わせ、下の定規の  $b$  にあたる上の定規の目盛りが  $a \times b$  になって欲しい。

#### 3.2 2 の累乗の目盛り

乗除算計算定規を 2 つ上下に並べます。上の定規の 2 の目盛りに下の定規の起点 1 の目盛りを合わせます。下の定規の 2 の目盛りに対応する上の定規の目盛りは  $4 (=2 \times 2)$  にするのが適当です。4 の目盛りは起点 1 から見て 20cm ( $=10\text{cm}+10\text{cm}$ ) のところになります。下の定規の起点 1 の目盛りを上の定規の 4 の目盛りに合わせると、下の定規の 2 の目盛りに対応する上の定規の目盛りは  $8 (=4 \times 2)$  で、1 から見て 30cm ( $=20\text{cm}+10\text{cm}$ ) のところになります。16 ( $=8 \times 2$ ) の目盛りは 40cm に、32 ( $=16 \times 2$ ) の目盛りは 50cm に、64 ( $=32 \times 2$ ) の目盛りは 60cm になります。2 の累乗の目盛りを乗除算計算定規に刻むことができました。

上の乗除算計算定規の起点 1 に下の乗除算計算定規の 2 を合わせるとき、下の定規の起点 1 に合う上の定規の目盛りは幾つが適当でしょうか。□  $\times 2 = 1$  の □ にあたる数ですから、 $1/2$  です。1/2 の目盛りは、起点 1 から見て 2 とは逆の方向で、起点 1 から 10cm のところになります。上の定規の起点 1 のところに下の定規の 4 を合わせるとき、下の定規の起点 1 に合う上の定規の目盛りは  $1/4$  になり、起点 1 から 20cm のところになります。 $1/2 = 2^{-1}$ ,  $1/4 = 2^{-2}$  なので、2 の負の整数乗の目盛りも乗除算計算定規の上に刻むことができました。

#### 3.3 3 はどこに？

3 の目盛りは、乗除算計算定規のどこに刻めばよいのでしょうか。3 は 2 と 4 の丁度まん中の数ですから、試しに 2 と 4 の目盛りの丁度まん中、起点 1 から見て 15cm のところに置いてみましょう。3  $\times 2 = 6$  ですから、上の定規の 3 のところに下の定規の起点 1 を合わせ、下の定規の 2 にあたる上の定規の目盛りが 6 になります。6 は起点 1 から見て 25cm ( $=15\text{cm}+10\text{cm}$ ) のところで、4 の目盛り (20cm) と 8 の目盛り (30cm) の間にあります。9 ( $=3 \times 3$ ) の目盛りを取りましょう。上の定規の 3 のところに下の定規の起点 1 を合わせ、下の定規の 3 にあたる上の定規の目盛りが 9 です。そこは起点 1 から見て  $15\text{cm}+15\text{cm}=30\text{cm}$  ですが、そこには既に 8 の目盛りがあります。ひとつの位置に異なる数があっては意味をなしません。

3 の目盛りはどこに刻めばよいのでしょうか。2 と 4 の間の、起点 1 から見て  $a$  cm のところに置いてみましょう。このとき  $10 < a < 20$  です。9  $= 3 \times 3$  なので 9 は  $2a$  cm ( $= a \text{ cm} + a \text{ cm}$ ) のところ です。乗除算計算定規には 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... の目盛りが 10cm おきに書かれています。8  $< 9 < 16$  なので 9 は 8 と 16 の間の、起点 1 から見て 30cm と 40cm の間にあるべきなので  $30 < 2a < 40$  です。2 で割ると  $15 < a < 20$  となります。27 ( $= 9 \times 3$ ) は  $3a$  cm ( $= 2a \text{ cm} + a \text{ cm}$ ) のところで、16  $< 27 < 32$  なので  $40 < 3a < 50$  となります。従って  $40/3 < a < 50/3$  となります。ここまでのことから、 $a$  は 10, 15,  $40/3$  より大きく、20,  $50/3$  より小さい。15  $< a < 16.66 (=50/3)$  となります。81 ( $= 27 \times 3 = 3^4$ ), 243 ( $= 81 \times 3 = 3^5$ ), 729 ( $= 243 \times 3 = 3^6$ ) の位置を、2 の累乗 (1, 2, 4, 8 ( $= 2^3$ ), 16 ( $= 2^4$ ), 32 ( $= 2^5$ ), 64 ( $= 2^6$ ), ...) の目盛りと比較すると、目盛りの比較  $64 < 81 < 128$  から位置の比較  $60 < 4a < 70$  が、 $128 < 243 < 256$  から  $70 < 5a < 80$  が、 $512 < 729 < 1024$  から  $90 < 6a < 100$  が得られます。60  $/ 4 < a < 70 / 4$ , 70  $/ 5 < a < 80 / 5$ , 90  $/ 6 < a < 100 / 6$  なので、15  $< a < 16 (=80/5)$  となる。3 の累乗  $3^m$  が 2 の累乗  $2^n$ ,  $2^{n+1}$  に間 ( $2^n < 3^m < 2^{n+1}$ ) にあったとします。2<sup>n</sup> は 1 から見て  $10n$  cm のところにあり 3<sup>m</sup> は  $ma$  cm のところにあるので、 $10n < ma < 10(n+1)$ , よって  $10n/m < a < 10(n+1)/m$  をなります。m=1, 2, 3, ... とすることで a の範囲が限定されていきます。

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3^m$	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
$n$	1	3	4	6	7	9	11	12	14	15
$2^n$	2	8	16	64	128	512	2048	4096	16384	32768
$10n/m$	10	15	40/3	15	14	15	110/7	15	140/9	15
$10(n+1)/m$	20	20	50/3	35/2	16	50/3	120/7	65/4	50/3	16

以上より、 $110/7 (=15.71) < a < 80/5 (=16)$  となる。普通の 8 桁の電卓でもう少し計算してみましょう。  $m=12$  に対して、 $2^{19} (=524288) < 3^{12} (=531441) < 2^{20} (=1048576)$  なので  $190/12 < a < 200/12$ 、よって  $95/6 (=15.83) < a$  となる。 $3^{16} = 43046721$  は 8 桁一杯で、 $3^{17} = 1.291 \times 10^9$  E (最後の E はオーバーフローエラー) となる。 $2^{26} = 67108864$  で、 $2^{27} = 1.342 \times 10^9$  E なので、 $2^{26} < 3^{17} < 2^{27}$  となる。よって  $260/17 < a < 270/17$  より  $a < 270/17 (=15.88)$  となる。以上より、 $15.83 < a < 15.88$  を得た。作業精度を考えれば、乗除算計算定規に 3 の目盛りを取るのにはこれで十分でしょう。もう少し工夫すると 8 桁の電卓で  $m \leq 32$  まで計算できますが、頑張っても  $15.83 < a < 15.86$  の程度です。

同じことを 5 でやってみましょう。普通の 8 桁の電卓で  $m \leq 13$  まで計算できます。5 の目盛りの位置  $a_5$  cm は  $300/13 (=23.07) < a_5 < 70/3 (=23.33)$  の範囲になります。普通の電卓では難しいのですが、 $m \leq 31$  まで計算すると  $325/14 (=23.21) < a_5 < 720/31 (=23.22)$  が得られます。乗除算計算定規に 5 の目盛りが取れます。

6 の目盛りは  $6=2 \times 3$  なので、25.8cm (=10cm+15.8cm) のところに取ればよい。合成数の目盛りは、素因数分解に従って取れる。素数 7 では 3 や 5 と同様に目盛りの置く範囲を絞っていけばいい。8 桁の電卓で  $m \leq 11$  まで計算して、7 の位置  $a_7$  cm は  $28 < a_7 < 310/11 (=28.18)$  となる。幾つかの素数について、目盛りの範囲を 8 桁の電卓で計算したものを表にします。目盛りの範囲の巾が少し大きい。後でこれを改善する方法を考えます。

素数	3	5	7	11	13	17	19
目盛り	15.83~15.88	23.07~23.33	28.0~28.18	34.44~35.0	36.66~37.14	40.0~41.42	42.0~42.50
$m$ の範囲	$m \leq 17$	$m \leq 13$	$m \leq 11$	$m \leq 9$	$m \leq 8$	$m \leq 7$	$m \leq 7$

### 3.4 分数、平方根など

分数  $3/2$  や  $4/3$ ,  $5/3$  などの目盛りはどの様にとればよいでしょうか。  $3/2$  は  $\square \times 2 = 3$  の  $\square$  ですから、上の乗除算計算定規の目盛り 3 に下の乗除算計算定規の目盛り 2 を合わせるとき、下の定規の起点 1 にあたる上の定規の目盛りが  $3/2$  になります。起点 1 から見て 3 の目盛りまで行って、1 から 2 の目盛り分だけ戻ったところが  $3/2$  です。  $3/2$  の目盛りは起点 1 から見て 5.8cm (=15.8cm-10cm) のところに取ればよい。他の分数も同じように  $a/b$  は目盛り  $a$  から、目盛り  $b$  の分 (1 から  $b$  までの長さ分) 戻ったところにあります。

これまでの議論から、平方根  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  でも、3 乗根  $\sqrt[3]{2} (=2^{1/3})$  でも目盛りがとれます。  $\sqrt{2}$  は起点 1 と 2 の丁度まん中 5cm (=10cm/2) で、3 乗根  $\sqrt[3]{2}$  は起点 1 と 2 の 1:2 の内分点 3.33cm (=10cm/3) にとればよい。

## §4 解析学

乗除算計算定規にたくさんの目盛りが刻まれ、2 つの乗除算計算定規をずらして使って、乗除算アナログ計算機ができました。しかし、§3.3 の計算手続きでは目盛りの誤差範囲が大きく、計算精度を保証できません。単位 cm の小数点以下 2 桁ぐらいを求めておかないと役に立ちません。目盛りの位置を目盛りの数の関数と見て、解析学を使ってその関数の正体を調べてみましょう。

### 4.1 指数関数

話が前後しましたが、累乗の指数を実数に拡張し、指数関数を定義します。  $n$  を自然数とし、実数  $a$  を  $n$  回掛けた数を  $a^n$  で表します。累乗といい、 $a$  を底、 $n$  を指数といいます。累乗の積と商について  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ,  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  が成り立ちます。  $m=0$  とすると、 $a^0 \times a^n = a^n$ ,  $a^0 \div a^n = a^{-n}$  ですから、 $a^0=1$ ,  $a^{-n}=1/a^n$  とするのが妥当で、整数乗が定義されます。  $m$  乗して  $a$  になる実数を  $a$  の  $m$  乗根といい、 $\sqrt[m]{a}$  で表します。  $a$  の  $m$  乗根は、ひとつもないことも、たくさんあることもあります。  $a$  を正の実数とすると、 $m$  乗して  $a$  になる正の実数が存在し、ただ一つに限りません。  $\sqrt[m]{a}$  として  $b^m=a$  となる正の実数  $b$  をとることにします。有理数  $q=n/m$  に対して  $a^q = \sqrt[m]{a^n}$  とすることで、正の実数を底とする累乗の指数を有理数に広げることができます。有理数は実数全体の中に隙間なく分布しているので、実数を指数とする累乗は、有理数を指数とする累乗で近似して定義します。以上で、正の実数を底とする累乗の指数が実数に拡張されました。正の実数  $a$  を底とし指数を変数  $x$  にとった累乗関数  $a^x$  を指数関数といいます。以上の作り方から、指数法則  $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ,  $a^x \div a^y = a^{x-y}$  が成り立ちます。

### 4.2 指数関数の逆関数

目盛り 2 の位置を 10cm と決めました。目盛りの数  $x$  に対する目盛りの位置を  $10y$  cm とおくと、 $y$  は  $x$  の関数  $y=f(x)$  になります。目盛りの位置関数  $y=f(x)$  を解析学で調べましょう。  $f(3)$  の値 (§3.3 の  $a/10$  の値) は、 $m=1, 2, 3, \dots$  に対して  $2^n < 3^m < 2^{n+1}$  なる  $n$  を求め、評価式  $\frac{n}{m} < a/10 (=f(3)) < \frac{n+1}{m}$  をたくさん作って範囲を絞っていきました。  $\frac{n}{m} < f(3) < \frac{n+1}{m}$  なので  $0 < f(3) - \frac{n}{m} < \frac{1}{m}$  となります。  $m$  をどんどん大きくすると、 $\frac{1}{m} \rightarrow 0$  なので、 $f(3) - \frac{n}{m} \rightarrow 0$  となります。また、 $2^n < 3^m < 2^{n+1}$  の  $m$  乗根をとると、 $2^{\frac{n}{m}} < 3 < 2^{\frac{n+1}{m}} = 2^{\frac{n}{m} + \frac{1}{m}}$  なので  $1 < 3 \times 2^{-\frac{n}{m}} < 2^{\frac{1}{m}}$  となります。ここでも  $m$  をどんどん大きくすると、 $2^{\frac{1}{m}} \rightarrow 1$  となります。1 と  $2^{\frac{1}{m}}$  の間の数  $3 \times 2^{-\frac{n}{m}}$  も 1 に近づき、 $2^{\frac{n}{m}} \rightarrow 3$  となります。  $f(3) = \frac{n}{m}$  だったので、 $2^{f(3)} = 2^{\frac{n}{m}} \rightarrow 3$  となります。従って  $2^{f(3)} = 3$  がわかります。

同じ議論で、一般の正の数  $x$  に対して目盛りの位置  $10y$  cm は  $2^y = x$  を満たします。目盛りの位置関数  $y=f(x)$  は指数関数  $x=2^y$  の逆関数です。これを対数関数と呼び、 $y = \log_2 x$  で表します。

### 4.3 目盛りの位置関数 (対数関数) の近似値計算

乗除算計算定規の目盛りの位置関数  $y = \log_2 x$  は、指数関数  $x = 2^y$  の逆関数でした。正の数  $x$  に対して  $a < \log_2 x < b$  なる  $a, b$  が見つかったとします。开区間  $(a, b)$  をまん中で切って 2 つの开区間  $(a, \frac{a+b}{2})$ ,  $(\frac{a+b}{2}, b)$  を考えます。  $2^{\frac{a+b}{2}} = x$  ならば  $\log_2 x = \frac{a+b}{2}$  で値が求められました。  $2^{\frac{a+b}{2}} \neq x$  ならば  $\log_2 x \neq \frac{a+b}{2}$  なので  $\log_2 x$  は 2 つの开区間の一方に含まれます。指数関数は単調増加で、その逆関数の対数関数も単調増加です。  $2^{\frac{a+b}{2}} > x$  なら  $a < \log_2 x < \frac{a+b}{2}$  で、  $2^{\frac{a+b}{2}} < x$  なら  $\frac{a+b}{2} < \log_2 x < b$  となります。どちらにせよ、开区間の幅は前の半分になります。これを繰り返して、开区間の幅をどんどん小さくして、  $\log_2 x$  の近似値を計算できます。

$x=3, a=\frac{19}{12}, b=\frac{27}{17}$  で考えてみましょう。  $\frac{a+b}{2} = \frac{647}{408} = 1.586$  で  $2^{\frac{a+b}{2}} = 2^{\frac{647}{408}} = 3.0017 > 3$  なので  $\log_2 3 < \frac{647}{408} = 1.586$  となります。 §3.3 よりも近似の精度がよくなりましたが、  $2^{\frac{647}{408}}$  を計算しなくてはなりません。普通の電卓には一般の指数を計算する機能は付いていません。指数法則を思い出してみましょう。  $2^{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{2^{a+b}} = \sqrt{2^a 2^b}$  なので、  $2^a$  と  $2^b$  がわかっているならばそれらを掛けて平方根を取ればよい。普通の電卓でも平方根は計算できるので、対数関数の値を普通の電卓で計算できるようになりました。計算精度の問題から、普通の 8 桁の電卓でなら 4 桁程度が限界ですが、当初の目的の乗除算計算定規を作るのには十分でしょう。

### 4.4 対数法則

乗除算定規の目盛りの位置関数  $y = f(x)$  は、  $2^y = x$  を満たすことから対数関数  $y = \log_2 x$  と表されました。一般に  $a^y = x$  ( $a$  は正の数) を満たす  $y$  は、  $x$  の関数として  $y = \log_a x$  と表され  $a$  を底とする対数関数といえます。指数関数には指数法則 ( $a^x \times a^y = a^{x+y}$ , 底が同じ累乗の積は指数の和の累乗である) がありました。これを対数関数で言い換えると、底の同じ対数の和は積の対数であるとなります。つまり、  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$  が成り立ちます。これを対数法則といえます。少し言い換えると、積の対数を知りたいければ対数の和を求めればよい、となります。これが乗除算計算定規で乗除算が計算できるための原理だったのです。

## §5 計算道具の歴史

乗除算計算定規なるものと考え、2 つをすり合わせることで乗除算を計算する道具を作りました。解析学により、その目盛りが指数関数の逆関数 (対数関数) であることを示し、対数法則 (指数法則) が乗除算計算の原理でした。対数の値を目盛にもつこの定規を対数尺といえます。2 つの対数尺を使って、アナログ量の乗除算を計算するもので、乗除算アナログ計算機と言っていいでしょう。三角関数の計算などもできるもっと高度な計算尺というアナログ計算機がありますが、ここで作った乗除算アナログ計算機は計算尺の重要な一部分です。

算盤、計算尺、機械式計算機は、電卓が登場する 1970 年代まで、計算の道具として欠かせないものでした。珠をパチパチはじいて計算する算盤はとても起源の古いもので、長い間、計算の道具として欠かせないものでしたが、ある種の技能を必要としました。計算尺は主に工学計算の場で、機械式計算機は財務管理や建築計算などで使われました。今では、パソコンや電卓、携帯電話やスマートフォン、タブレット端末などで特別な技能を必要とせず、とても手軽に高度な計算ができるようになりました。携帯電話、スマートフォン、タブレット端末などが登場して 5 ~ 15 年ぐらい、パソコンの一般的な普及が 20 年ぐらい前、電卓が登場したのが 1970 年ごろ。

便利な道具を使わなくても、筆算で、一桁ずつ計算を進めてどんな数の四則演算でも答えを求めることができます。掛け算割り算の基本演算単位にあたるのが、九九で、小学校低学年のうちに頭の中に覚えこむ重要な知識です。対数の発見者のひとりである John Napier は、九九の書かれた棒 (ネイピアの骨と呼ばれています) を用意し、九九を覚えていなくてもその棒を並べて筆算が計算できる方法を考案しました。W. Schickard は 1623 年に、ネイピアの骨を並べて歯車でくるくる回して計算する、機械式計算機を発明しました。計算機と呼べる最初の機械ではありませんが、九九の表の必要な段を小窓に出すだけで、後は手で和や差を計算して答えを求めました。

足し算引き算に比べて、掛け算割り算には多くの手数がかかります。Burgi (1588 年) と Napier (1594 年) は独立に、大きな数の掛け算割り算をより簡単に計算するために、対数を考案 (発見) しました。当時、天文学などで膨大な量の計算が必要とされていました。その原理を簡単に説明しましょう。予め多くの数を  $10^x$  の形で書いた表 (対数表といえます) を用意しておきます。2 数の積を求めるには、対数表をみてそれぞれの数を  $10^x, 10^y$  と表し、  $x + y$  を計算し、対数表で  $10^{x+y}$  の値を読み取ればよいのです。数十年前までの科学系、工学系の本の中には、巻末に対数表のあるものがあります。Sunter は対数で目盛を刻んだ対数尺が発明し (1620 年)、Oughtred は計算尺を発明しました (1622 年)。今回作ったのがこの計算尺です。

1642 年 Pascal は、歯車を回して足し算引き算の答えが小窓に表示される、機械式加減算計算機を発明しました。機械工作技術が未熟であったため、繰り上がりなどに不備がありました。1694 年 Leibniz は、パスカルの計算機の不具合を直し、乗除算も計算できる機械式計算機を発明しました。以後の機械式計算機はこれらが原型となっています。19 世紀半ばに最初の量産型機械式計算機 Arithmometer が登場しました。Odhner はそれを改良し 1874 年に特許を公開しました。Odhner 型計算機の特許を基に様々な改良を加えた機械式計算機が生まれ、日本でもタイガー計算器株式会社により製造販売されました。

## §6 まとめ

与えられた問題に知ってる知識で取り組むのではなく、自ら設定した問題意識に対して論理の力で発見的に向き合う一例を示してみました。すべての問題に発見的手法が効果的とは限りませんが、うまく働くととても強力な考え方となります。