ピタゴラス数のはなし

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科) †

§0　序

3, 4, 5 や 5, 12, 13 のように、直角三角形の三辺になる整数の三つ組みをピタゴラス数と言います. ピタゴラス数 3, 4, 5 を一斉に 2 倍, 3 倍した 6, 8, 10 や 9, 12, 15 などもピタゴラス数ですが, 互いに素 (1 より大きい共通の約数をもたない) ものを主に考えることにします. このときピタゴラス数は、二つの整数 m. n を使って m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 で表されます. ピタゴラス数について、整数論研究者の立場からお話しします.

§1　ピタゴラス数の定義と求め方

1.1　ピタゴラス数は直角三角形の三辺になる整数の三つ組のことです. ピタゴラスの定理により, 直角三角形の三辺の長さを a, b, c (斜辺の長さを c とする) とすると $a^2+b^2=c^2$ となり, また逆に, $a^2+b^2=c^2$ なる三つの正の数 a, b, c を三辺の長さにもつ三角形は直角三角形になります. ピタゴラス数は整数の三つ組 a, b, c で $a^2+b^2=c^2$ となるものです. 3, 4, 5 や 5, 12, 13 は, $3^2+4^2=9+16=25=5^2$, $5^2+12^2=25+144=169=13^2$ なのでピタゴラス数です. 整数 m, n に対して, 整数の三つ組 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 も $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2$ なので, ピタゴラス数です. $m=2$, $n=1$ とすると $m^2-n^2=2^2-1^2=4-1=3$, $2mn=2\times2\times1=4$, $m^2+n^2=2^2+1^2=4+1=5$ なので, ピタゴラス数 3, 4, 5 が現れます. $m=3$, $n=2$ とすると $m^2-n^2=3^2-2^2=9-4=5$, $2mn=2\times3\times2=12$, $m^2+n^2=3^2+2^2=9+4=13$ なので, ピタゴラス数 5, 12, 13 が現れます. この m, n を使ったピタゴラス数はどの様にしてみつかったのでしょうか. すべてのピタゴラス数がこの様にして表されるのでしょうか. また, 与えられたピタゴラス数に対してその三つ組を与える m, n の選び方は一通りなのでしょうか.

1.2　ピタゴラス数 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 の見つけ方を二つ話しましょう. 数式の展開 $(x+1)^2=x^2+2x+1$ において, 右辺の後ろ二項 $2x+1$ が平方数 (例えば $2x+1=y^2$ とします) なら $(x+1)^2=x^2+y^2$ となります. $2x+1=y^2$ なので x を消去すると, $(y^2+1)^2=(y^2-1)^2+(2y)^2$ となります. y が有理数のとき $y=\frac{m}{n}$ (m, n は整数) と書けるので, $((\frac{m}{n})^2+1)^2=((\frac{m}{n})^2-1)^2+(2\frac{m}{n})^2$ となります. 分母を払うと $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$ となり, ピタゴラス数 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 が得られました.

ピタゴラス数 a, b, c は $a^2+b^2=c^2$ となる整数の三つ組のことでした. 両辺を c^2 で割ると $(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$ となります. $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ とおくと, x, y は有理数で $x^2+y^2=1$ を満たします. $x\neq0$ とすると $k=\dfrac{y+1}{x}$ は有理数です. $y=k\,x-1$ なので, $x^2+y^2=1$ に代入し整理すると $(k^2+1)x^2-2k\,x=0$ となります. $x\neq0$ なので, $x=\dfrac{2k}{k^2+1}$ で $y=\dfrac{k^2-1}{k^2+1}$ です. $k=\dfrac{m}{n}$ (m, n は整数) とおくと, $x=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$, $y=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ となります. $x^2+y^2=1$ に代入して分母を払うとピタゴラス数 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 が現れました. 数学 II 「図形と方程式」を習うと, ここでの計算は円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=k\,x-1$ の交点の計算であることがわかるでしょう.

1.3　ピタゴラス数 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 を見つける異なる方法を紹介しました. 前者は何となく式変形してたら見つかったって感じです. 後者をよく見ると, ピタゴラス数を全部見つけていることになっているまる. 少し考えてみてください.

1.4　最後の疑問. 与えられたピタゴラス数に対して, その三つ組を与える m, n の選び方は一通りであるかどうか. ピタゴラス数 a, b, c について偶数か奇数か調べてみましょう. 三つすべてが奇数になると 奇数の自乗は奇数なので $a^2+b^2=c^2$ は奇数足す奇数が奇数になり, 不合理です. どれか二つが偶数なら残りの数も偶数になります. 互いに素が整数の組を考えたかったので, この場合ピタゴラス数には偶数が丁度一つ含まることになります. c が偶数で, a と b が奇数だったとしましょう. $a=2\,k+1$ (k は整数) とおくと, $a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$ なので a^2 を 4 で割った余りは 1 です. 奇数 b についても b^2 を 4 で割った余りは 1 なので, a^2+b^2 を 4 で割った余りは 2 です. c は 2 で割り切れるので c^2 は 4 で割り切れます. $a^2+b^2=c^2$ の左辺と右辺で 4 で割った余りが異なるので, 不合理です. 従って, 唯一の偶数となるのは a か b です. a と b は交換して順序を変えてもピタゴラス数の本質は変わらないので, b を偶数とし, a, c は奇数と考えてよいことになります. このピタゴラス数が m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 で表せるなら, 偶数は $2mn$ だけなので, $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ となりま

---

† 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1-1　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp
2013 年 10 月 2 日　 於　奈良県立奈良高等学校

す. $c+a=2m^2$ だから $m=\sqrt{\frac{c+a}{2}}$ で, $c-a=2n^2$ だから $n=\sqrt{\frac{c-a}{2}}$ です. ピタゴラス数 a, b, c に対して, m, n にあたる数がただ一通りに書き表せました.

1.5　合同式と言う考え方があります. 整数 x を整数 p で割った余りを r とするとき, $x \equiv r \pmod{p}$ と書き, 合同式と言います. 1.4 節の内容を合同式で説明しましょう. 奇数 x について $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ で, 偶数 y について $y^2 \equiv 0 \pmod{4}$ です. $a^2+b^2=c^2$ を満たす整数 a, b, c について, 右辺を 4 で割った余りは 0 か 1 なので, a と b は共に奇数にはならない. a, b, c が互いの素とすると, a と b は偶奇が異なり, c は奇数になる.

§2　ピタゴラス数の関係式

2.1　すべてのピタゴラス数を表す式が見つかったので, ピタゴラス数をどんどん作っていくことができます. 整数 m, n $(m>n)$, $m \le 6$ を表にまとめると,

m, n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m, n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m, n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2
2, 1	3 , 4 , 5	4, 3	7 , 24 , 25	6, 1	35 , 12 , 37
3, 1	8 , 6 , 10	5, 1	24 , 10 , 26	6, 2	32 , 24 , 40
3, 2	5 , 12 , 13	5, 2	21 , 20 , 29	6, 3	27 , 36 , 45
4, 1	15 , 8 , 17	5, 3	16 , 30 , 34	6, 4	20 , 48 , 52
4, 2	12 , 16 , 20	5, 4	9 , 40 , 41	6, 5	11 , 60 , 61

m と n の偶奇が揃っていたり (3, 1 や 4, 2 など), m と n が互いに素でない場合 (6, 3 など), m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 は互いに素ではありません. 合同式で簡単に証明できます. その様な場合を除きましょう.

m, n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m, n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m, n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2
2, 1	3 , 4 , 5	5, 4	9 , 40 , 41	7, 6	13 , 84 , 85
3, 2	5 , 12 , 13	6, 1	35 , 12 , 37	8, 1	63 , 16 , 65
4, 1	15 , 8 , 17	6, 5	11 , 60 , 61	8, 3	55 , 48 , 73
4, 3	7 , 24 , 25	7, 2	45 , 28 , 53	8, 5	39 , 80 , 89
5, 2	21 , 20 , 29	7, 4	33 , 56 , 65	8, 7	15 , 112 , 113

この表にはすべて異なるピタゴラス数が現れています. 証明しませんが, この表に現れる整数の三つ組 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 は互いに素で, 互いに素な整数の三つ組からなるピタゴラス数はすべてこの表に現れます.

さて, $(m, n) = (7, 4), (8, 1)$ を見てみましょう. 対応するピタゴラス数はそれぞれ 33, 56, 65 と 63, 16, 65 です. 最も長い辺 (直角に向かい合う斜辺) の長さがどちらも 65 です. 斜辺の長さが 65 で他の辺の長さが整数の直角三角形で合同でないものが見つかりました. また, $(m, n) = (3, 2), (6, 1)$ では偶数の長さの辺が共に 12 で同じ. $(m, n) = (4, 1), (8, 7)$ では斜辺でない奇数の長さの辺が共に 15 で同じ. この様に一部に同じ長さの辺をもつピタゴラス数の組はたくさんあるのでしょうか. 何か仕組みがあるのでしょうか.

2.2　偶数の長さの辺が 12 のものについて考えてみましょう. 偶数の長さの辺は $2mn$ で表されるので, $2mn=12$ となる互いに素で偶奇の異なる整数 m, n $(m>n)$ を探せばいい. $(m, n) = (6, 1), (3, 2)$ で, 上で見つけたものがすべてです. 一般に, 正の偶数 b を偶数の長さの辺にもつピタゴラス数があるためには, $b=2mn$ となる互いに素で偶奇の異なる二つの正の整数 m, n が見つかればよい. b は 4 の倍数でなければならず, $m=\frac{b}{2}$, $n=1$ とおくと, m, n は互いに素で偶奇が異なり $b=2mn$ を偶数の長さに辺にもつピタゴラス数が与えられます.

斜辺でない奇数の長さの辺の場合も実は殆ど同じ考え方で解決できます. 15 を例に考えましょう. 斜辺でない奇数の長さの辺は m^2-n^2 で表されます. 因数分解すると $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ となります. ちょっと考えれば, $m+n$ と $m-n$ は共に奇数で互いに素です. 15 を互いに素な奇数の積に分けると, $15=15\times 1=5\times 3$ の二通で, それぞれ $(m, n) = (8, 7), (4, 1)$ です. 一般に, 3 以上の奇数 a を斜辺でない奇数の長さの辺にもつピタゴラス数は, $m+n=a$, $m-n=1$, 従って $m=\frac{a+1}{2}$, $n=\frac{a-1}{2}$ で与えることができます. ここで $a \ge 3$ は奇数なので $m=\frac{a+1}{2}$ と $n=\frac{a-1}{2}$ は正の整数で差が 1 です. この m と n は互いに素で偶奇も異なります.

2.3　残るは斜辺の長さに現れる整数です. 斜辺の長さは m^2+n^2 で表されるので, この形の整数の特徴を調べることになります. 残念なことにこの式は因数分解できないので, これまでの方法は使えません. 自乗して -1 になる虚数と言うものを考えれば ($\sqrt{-1}^2=-1$ なる $\sqrt{-1}$) を使って, $m^2+n^2=(m+n\sqrt{-1})(m-n\sqrt{-1})$ と因数分解する考え方もあります. 虚数 $\sqrt{-1}$ を含む数の世界での因数分解を考えねばならず, これがなかなか難しい. 研究者の立場からはとても自然な考え方で, 以下紹介する内容も, この見方ができると神秘性の全くない淡々としたお話になってしまいます. 話をもとに戻しましょう. 困ったときは数を並べて観察してみるのがいい. 斜辺の長さに現れる整数を大きさの順に表から抜き出すと, 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 113 となります. もう少し範囲を広げると, $(m, n) = (9, 2)$ で 85, $(m, n) = (9, 4)$ で 97, $(m, n) = (9, 8)$ で 145 が見つかりま

す. 1.4 節で, ピタゴラス数の偶奇を調べたとき, 4 で割った余りに注目しました. m と n は偶奇が異なり, 斜辺の長さは m^2+n^2 (奇数の自乗と偶数の自乗の和) なので, 4 で割った余りは $1+0$ の 1 です. 実際, 表から抜き出した整数も 4 で割って 1 余る数ばかりです. 9, 21, 33 など出てきてない数もありますが, 不思議なことに 100 以下の素数 (1 と自分自身以外に約数をもたない正の整数) で 4 で割って 1 余るものはすべて現れています. 9 は無理やり $9=3^2+0^2$ とできますが, 21 や 33 はどうやっても m^2+n^2 の形に表せません. $m=1, 2, 3, \cdots$ としてみれば簡単です.

2.4 定理を紹介します.

定理 (フェルマー) p を奇数の素数とする. $p=m^2+n^2$ なる整数 m, n が見つかるための必要十分条件は, p を 4 で割った余りが 1 になることである.

整数論の入門書の多くにこの定理と証明が載っていますが, 平方剰余というちょっと難しい話が使われることが多いので, いきなり読むのは難しいでしょう. 難しい概念を使わない証明もありますが, 趣味で数学をやるか, 余程の天才で未知の分野を切り開くのでもなければ, その様な証明を見てお茶を濁しても仕方ありません. 証明に興味があるなら, 少し難しい本ですが, 高木貞治「初等整数論講義」を勧めます. 理論的背景まで丁寧に書かれています.

ピタゴラス数の斜辺の長さに現れる素数, 現れない素数が定まりました. ところでそもそもの問いは 65 で, $65=5\times 13$ と素因数分解されるので素数ではありません. 素因数の 5 も 13 も 4 で割って 1 余る素数で, ピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 の斜辺の長さに現れます. 次節で, 四つのピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 と 33, 56, 65 と 63, 16, 65 の不思議な関係をお見せしましょう.

2.5 唐突ですが, 次の等式が成り立ちます.

$$(ax-by)^2+(ay+bx)^2=(a^2+b^2)\,(x^2+y^2)$$

両辺をそれぞれ展開して比べればいいのですが, どうしてこんな等式を思いついたのでしょう. ピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 は $3^2+4^3=5^2$, $5^2+12^2=13^2$ を満たします. 3^2+4^2 と 5^2+12^2 に上の等式に当てはめると,

$$(3\times 5-4\times 12)^2+(3\times 12+4\times 5)^2=(3^2+4^2)\,(5^2+12^2) \qquad \therefore\quad 33^2+56^2=65^2$$

また, 3^2+4^2 と 12^2+5^2 に上の等式に当てはめると,

$$(3\times 12-4\times 5)^2+(3\times 5+4\times 12)^2=(3^2+4^2)\,(5^2+12^2) \qquad \therefore\quad 16^2+63^2=65^2$$

65 の素因数 5, 13 を斜辺の長さにもつピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 から, 斜辺の長さが 65 の二組のピタゴラス数が作られました. 実は同様の関係がピタゴラス数を表す m, n の間にも成り立ちます. 85, 145, 221 などに対しても, それらを斜辺の長さにもつピタゴラス数を二組ずつ作ることができます. 与えられた整数がピタゴラス数の斜辺の長さに現れるかどうか判別でき, その整数を斜辺の長さとするピタゴラス数を与えることもできます.

2.6 2.4 節, 2.5 節を踏まえて, 21 や 33 についてもう一度考えてみましょう. $a^2+b^2=21^2$ となる正の整数 a, b があったとします. 3 で割った余りを考えると, $a^2+b^2\equiv 0 \pmod 3$ です. 整数の自乗を 3 で割った余りは 0 か 1 なので, a, b は共に 3 の倍数です. a, b, 21 を 3 で割ると 7 を斜辺の長さにもつピタゴラス数が現れますが, $7\not\equiv 1 \pmod 4$ なのでフェルマーの定理により存在しない. 従って $a^2+b^2=21^2$ と表せない. 33 も同様です.

2.7 2.5 節の等式は, 平方数の和で表された整数の世界の掛け算の話です. 右辺から左辺は平方数の和で表された数の積が平方数の和で表されることを意味し, 左辺から右辺へは平方数の和で表された数が平方数の和で表される数の積に因数分解されることを意味します. 虚数を使った因数分解 $a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$ を使うと,

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)\,(x^2+y^2)&=\{(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})\}\,\{(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})\}\\&=\{(a+b\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})\}\,\{(a-b\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})\}\\&=\{(ax-by)+(ay+bx)\sqrt{-1}\}\,\{(ax-by)-(ay+bx)\sqrt{-1}\}=(ax-by)^2+(ay+bx)^2\end{aligned}$$

$$(a+b\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})=ax+ay\sqrt{-1}+bx\sqrt{-1}+by\sqrt{-1}^{\,2}=(ax-by)+(ay+bx)\sqrt{-1}$$

$$(a-b\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})=ax-ay\sqrt{-1}-bx\sqrt{-1}+by\sqrt{-1}^{\,2}=(ax-by)-(ay+bx)\sqrt{-1}$$

虚数 $\sqrt{-1}$ を含む数の世界 (複素数. 数学 II, 数学 III で学習します) で, 2.5 節の等式が示されました.

§3 ピタゴラス三角形, 三角比 など

ここからは, 細かい話は書きません. おもしろいなぁと感じたなら, 自分でやってみて, 自分の力で発見していってみてください. いろいろアレンジして考えを膨らましてみるのもおもしろいかもしれません. 不思議な出来事に遭遇したり, ひょっとすると未知の現象を発見するかもしれません.

3.1　ピタゴラス数は直角三角形の三辺となる整数の三つ組のことでした. 折角ですから, ピタゴラス数から直角三角形を作ってみましょう. この直角三角形をピタゴラス三角形と呼ぶことにします. 定規とコンパスを使って, 三辺が 3, 4, 5 の直角三角形 A と, 三辺が 5, 12, 13 の直角三角形 B を描き, 切り抜きます. 直角三角形 A の斜辺に B の長さが 5 の辺を合わせて並べてみましょう. B の斜辺の長さは 13 です. 斜辺でない辺の長さが 13 のピタゴラス数 13, 84, 85 のピタゴラス三角形 C を, B の斜辺に長さが 13 の辺を重ねて並べてみましょう. 渦巻状に見えますが, これを繰り返すとどの様な図形が現れるでしょうか. 斜辺でない辺の長さが 85 のピタゴラス数は, 85, 132, 157 と 85, 3212, 3613 の二組あります. ちょっと大きくて実際に作ってみるのは難しいですね. 計算機のグラフソフトなどで描いてみるのも面白いかもしれません. 「自然」に繰り返すには, 二組のピタゴラス数のうちどちらを選んだらいいでしょうか? 選び方で何か違った現象に行きつくのでしょうか?

3.2　2.5 節で, 斜辺の長さが 65 の二組のピタゴラス数 33, 56, 65 と 63, 16, 65 を, ピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 から不思議な等式を使って作りだしました. これらピタゴラス数から作られるピタゴラス三角形の間に, 何か関係があるのでしょうか. 数の間の関係と, 図形の間の関係. 何か見つかりましたか?

3.3　角 O が直角とする直角三角形 OPQ において, $OP=a$, $OQ=b$, $PQ=c$, $\angle P=\theta$ とします. 辺の比 $\frac{a}{c}$ を $\angle P$ に関する余弦と言い $\cos\theta$ で表し, $\frac{b}{c}$ を $\angle P$ に関する正弦と言い $\sin\theta$ で表します. ピタゴラス三角形 3, 4, 5 において長さが 4 と 5 の辺の間の角を α, ピタゴラス三角形 5, 12, 13 において長さが 12, 13 の辺の間の角を β とおくと, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$ です. α の角と β の角を並べると, 大きが $\alpha+\beta$ の角になります. ピタゴラス三角形 33, 56, 65 において長さが 33 と 65 の辺の間の角が $\alpha+\beta$ に等しいことが 3.2 節で観察されることから, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{56}{65}$ となります. ここで,

$$(3\times 5-4\times 12)^2+(3\times 12+4\times 5)^2=(3^2+4^2)(5^2+12^2)\qquad \therefore\quad 33^2+56^2=65^2$$

の両辺を $65^2(=5^2\,13^2)$ で割ると,

$$\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}\right)^2=1\qquad \therefore\quad \left(\frac{33}{65}\right)^2+\left(\frac{56}{65}\right)^2=1$$

符号に注意して

$$\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}\qquad\qquad \frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$$

この式を正弦, 余弦で書くと,

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)\qquad\qquad \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

となります. この二つの等式ですが, 一般の角 α, β で成り立ちます. 加法公式といい, 数学 II で習う重要公式です. 2.5 節で唐突に登場した等式は加法公式と深い関係があます. 2.7 節の計算から, これらの等式, 公式は複素数平面 (数学 III で学習します) における複素数の積や商の図形的な意味を説明するものでもあります.

3.4　ピタゴラス三角形は三辺が整数の直角三角形のことでした. ピタゴラス三角形の面積は整数になります. 実際 $\frac{1}{2}\times(m^2-n^2)\times 2mn=mn(m^2-n^2)$ で整数です. 三辺が整数の直角三角形の面積となる整数は, 整数 m, n で $mn(m^2-n^2)$ で表され形が完全に決まっています. 少し条件を緩めて, 三辺が有理数の直角三角形の面積となる整数について考えてみましょう. この様な整数を合同数と言います. 端折りますが, 1, 2, 3, 4 は合同数ではありません. 3, 4, 5 のピタゴラス三角形の面積は $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$ なので, 6 は合同数です. 9, 40, 41 のピタゴラス三角形の面積は $\frac{1}{2}\times 9\times 40=180$ です. 全体を 6 分の 1 に縮小した $\frac{3}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{41}{6}$ の直角三角形の面積は $180\times(\frac{1}{6})^2=5$ なので, 5 は合同数です. 8 で割った余りが 5, 6, 7 の正の整数は合同数であろうと予想されていますが, 数値実験などで 100 万以下の正の整数について合同数であるかどうか計算されている程度です.

3.5　合同数とピタゴラス数との関係は明白ですが, 多くのことが比較的簡単に説明できるピタゴラス数に対し, 合同数はとても難しい対象です. 以下, 内容には立ち入らず, 言葉だけで紹介します. ピタゴラス数はガウス整数の整数論 (二次無理数の整数論, 類体論の原型) に含まれ, 2.4 節で紹介した高木貞治「初等整数論講義」にすべてが解説されています. 類体論は, 2.4 節で紹介したフェルマーの定理を一般化したもので高木貞治により構築されました. 類体論の参考文献として高木貞治「代数的整数論」を挙げておきます. とても難しい本で理学部数学科の大学生でも手が出ないかもしれません. その類体論を高次元化したものの一つに楕円曲線の岩澤理論があります, 楕円曲線の岩澤理論は, フェルマーの最終定理 (最高峰の数学理論を殆どすべて使って証明された) により整数論研究の中心に躍り出ました. 合同数は, 楕円曲線の岩澤理論における特に難しい未解決問題 (Birch and Swinnerton-Dyer 予想) に関係します. 合同数とピタゴラス数の間には大きな隔たりがあるのです. 京都大学数理解析研究所の望月新一教授による ABC 予想の証明に誤りがなかったなら (現在検証中), その隔たりがグンと小さくなりますが, それでも合同数は難しい. 数学って, まだまだたくさんやることがあるのです！