調和級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ のはなし

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科)[†]

§0　序

分子が 1 の分数を単位分数と言います. 単位分数を並べた数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ を調和数列と言い, すべての単位分数についての和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ を調和級数と言います. 無限個の数の足し算は直接計算して値を求めることはできないので, 前から順に和を計算して, 出てきた値の振る舞いを調べることになります. 調和級数を前から順に足していくと, 限りなくどんどん大きな値になっていきます. 幾らでも大きくなってしまうので, 調和級数は通常の数としての意味を持ちません. この様なものを調べることに何か意義があるのでしょうか？ 今日は, 調和数列, 調和級数を軸にして数の世界に遊んでみましょう.

§1　調和級数の発散と Euler 定数

1.1　調和数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ は正の数の列でどんどん小さくなり, 0 に近づいていきます. 調和数列は 0 に収束するといい, $n \to \infty$ のとき $\frac{1}{n} \to 0$ とか, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ と表します. 一般に数の列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を $\{a_n\}$ と表し, 数列と言います. n 番目の a_n を第 n 項と言います. 項の番号 n を限りなく大きくするとき a_n が一定の値 α に限りなく近づいていく場合, 数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい, $n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$ とか, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表します. また, α を $\{a_n\}$ の極限値と言います. n を限りなく大きくするとき a_n が限りなく大きくなる場合, 数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散すると言い, $n \to \infty$ のとき $a_n \to +\infty$ とか, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書きます.

無限個の数の和 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots$ を無限級数と言います. 調和級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ も無限級数です. 最初の項から第 n 項までの和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ を部分和と言い, 無限級数の値は部分和の列 $\{S_n\}$ の振る舞いで定義します. 部分和の列 $\{S_n\}$ が α に収束するとき, 無限級数が α に収束すると定義し, $a_1+a_2+a_3+\cdots=\alpha$ と表します. 部分和の列 $\{S_n\}$ が正の無限大に発散するとき, 無限級数が正の無限大に発散すると定義します.

各項が等比数列の等比級数 $1+r+r^2+\cdots$ $(r\neq\pm1)$ では, 部分和が $S_n=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$ となります. $|r|<1$ の場合, $n \to \infty$ のとき $r^n \to 0$ となり, $S_n = \frac{1-r^n}{1-r} \to \frac{1}{1-r}$ となります. 等比級数は $\frac{1}{1-r}$ に収束します. $|r|>1$ の場合, $n \to \infty$ のとき r^n は正または負の方向にどんどん大きくなり特定の値に収束しません. 従って部分和の列も収束せず, 等比級数も収束しません.

1.2　以下, $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ を調和級数の部分和とします. 調和級数の値を知るためには, 部分和 S_n を何らかの式で表して, 極限値を頑張って計算すればよい. 調和級数の部分和を何か意味のある数式で表すことはとても難しく, 現代数学において重要な問題のひとつです. この章の最後にひとつの評価式を与えますが, 調和級数が正の無限大に発散することを示した後で得られるので, 発散の証明には使えません.

解析学の基本技術に, 不等式で易しい対象に置き換える, と言うものがあります. $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}>\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$ と, 各項をそれより小さい, 分母が 2 の冪の単位分数に置き換えてみましょう.

$$S_1 = 1 = \frac{2}{2}$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$$
$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

一般に $S_{2^r} \geq \frac{r+2}{2}$ となり, $r \to \infty$ のとき $S_{2^r} \to +\infty$ です. $S_n = S_{n-1}+\frac{1}{n}>S_{n-1}$ なので, 部分和の列 $\{S_n\}$ は単調増加 (常に大きくなっていく数列) です. $n\geq 2^r$ ならば $S_n \geq S_{2^r} \geq \frac{r+2}{2}$ となり, 調和級数の部分和の列 $\{S_n\}$ が正の無限大に発散し, 調和級数が正の無限大に発散します.

1.3　調和級数が正の無限大に発散することがわかりました. 単調増加数列 $\{S_n\}$ は項数 n をどんどん大きくとればいくらでも大きな値になりますが, 実際, どの程度の値になるのでしょうか. 調和級数の発散を導いた評価式 $S_n \geq S_{2^r} \geq \frac{r+2}{2}$ $(n\geq 2^r)$ において, $r=8$ としてみます. $n\geq 2^8=256$ に対して $S_n \geq S_{2^8} \geq \frac{8+2}{2}=5$ です. ところで $S_{2^8}=6.12434$ なので $n\geq 2^8$ に対して $S_n\geq 6.12434$ となります. 評価式 $S_n\geq\frac{r+2}{2}$ $(n\geq 2^r)$ で S_n がどんどん大きくなることはわかりますが, S_n との差が大きく, S_n の真の値の変化を捉えきれていません. 部分和 S_n の値をいくつか計算して, 観察してみましょう. (表の数値は四捨五入ではなく, 切り捨てています. 書いてある数はそのまま

[†] 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1-1　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp
2014 年 8 月 6 日, 7 日　於　兵庫県立加古川東高等学校

その桁まで正しく確定した値です.)

n	S_n	n	S_n	n	S_n	n	S_n	n	S_n	n	S_n
1	1	10	2.92896	100	5.18737	1000	7.48547	10000	9.7876	10^1	2.9289
2	1.5	20	3.59773	200	5.87803	2000	8.17836	20000	10.4807	10^2	5.1873
3	1.83333	30	3.99498	300	6.28266	3000	8.58374	30000	10.8861	10^3	7.4854
4	2.08333	40	4.27854	400	6.56992	4000	8.87139	40000	11.1738	10^4	9.7876
5	2.28333	50	4.49920	500	6.79282	5000	9.09450	50000	11.3970	10^5	12.0901
6	2.45	60	4.67987	600	6.97497	6000	9.27681	60000	11.5793	10^6	14.3927
7	2.59285	70	4.83283	700	7.12901	7000	9.43095	70000	11.7334	10^7	16.6953
8	2.71785	80	4.96547	800	7.26245	8000	9.56447	80000	11.8670	10^8	18.9978
9	2.82896	90	5.08257	900	7.38016	9000	9.68225	90000	11.9847	10^9	———
10	2.92896	100	5.18737	1000	7.48547	10000	9.78760	100000	12.0901	10^{10}	———

部分和 S_n は少しずつ大きくなっていますが, 1 億項 (10^8) まで足してやっと 18.9978 です. 増え方はとても緩やかで, いくらでもどんどん大きくなっていくような勢いは感じません.

[問い] 部分和 S_n が 100 を超えるのは和を取る項数 n が幾つのときでしょうか?
部分和 S_n が 1000 を超えるのは和を取る項数 n が幾つのときでしょうか?
部分和 S_n が 10000 を超えるのは和を取る項数 n が幾つのときでしょうか?

1.4 部分和 S_n の大きさをもっと詳しく知るために, 積分を使ってみます. 積分はまだ習っていないかもしれませんが, とても重要な解析学の道具で, 図形の面積を計算することができます. 単位分数 $\frac{1}{k}$ を, 底辺 1 高さ $\frac{1}{k}$ の長方形の面積とみます. x-軸上の $x{=}k$ から $x{=}k{+}1$ のところに底辺を合わせ, y-座標が正の方にその長方形を置きます. 単位分数 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$ に対応する長方形を順に並べると, $x=1$ から $x=n{+}1$ まで階段状の図形 (A とおく) が得られます. この図形の面積は, 調和級数の部分和 $S_n{=}1{+}\frac{1}{2}{+}\frac{1}{3}{+}\cdots{+}\frac{1}{n}$ に等しい. 双曲線 $y{=}\frac{1}{x}$ のグラフを考えます. この双曲線は各長方形の左上の頂点 $(k, \frac{1}{k})$ を通り, $x{=}1$ から $x{=}n{+}1$ の範囲で階段状の図形の中に描かれますので, 双曲線 $y{=}\frac{1}{x}$, 直線 $x{=}1$, $x{=}n{+}1$, と x-軸で囲まれた図形 (B とおく) は階段状の図形 A に含まれるので, 図形 A の面積 (S_n) は図形 B の面積より大きい. 関数で囲まれた図形の面積を計算する道具が積分で, 図形 B の面積は積分 $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$ で表されます. その積分の値を計算するためには, 微分 (曲線の傾きを計算する解析学の道具), 微分積分学の基本定理 (微分と積分を結び付ける定理) と, 微分, 積分の具体的な計算が必要となり, 数学 II や数学 III で学習します. B の面積は自然対数を使って $\log(n{+}1)$ で表されます.

$$S_n = (A\ \text{の面積}) > (B\ \text{の面積}) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log(n{+}1)$$

n をどんどん大きくするとき対数関数の値 $\log(n{+}1)$ も限りなく大きくなる. 部分和の列 $\{S_n\}$ が正の無限大に発散するので, 調和級数が正の無限大に発散します.

調和級数の部分和 S_n を面積とする階段状の図形 A を x-軸負の方向へ 1 ずらすと (A' とおく), 双曲線 $y{=}\frac{1}{x}$ のグラフの下に収まります. A' の $x{=}0$ から 1 までの部分を別にして, 双曲線 $y{=}\frac{1}{x}$, 直線 $x{=}1$, $x{=}n$, と x-軸で囲まれた図形 (B' とおく) と面積を比較すると,

$$S_n = (A'\ \text{の面積}) < 1 + (B'\ \text{の面積}) = 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = \log n + 1$$

となり, $\log(n{+}1) < S_n < \log n{+}1$ と言う評価式が得られました. 更に $\log n < \log(n{+}1)$ なので, $0 < S_n{-}\log n < 1$ となります. さてここで, $n \to \infty$ とするとき $S_n - \log n$ はどの様な振る舞いをするのでしょうか.

1.5 2 つの数列 $b_n{=}S_n{-}\log(n{+}1)$, $c_n{=}S_n{-}\log n$ を考えます. b_n は A と B の面積の差で, c_n は A' と B' の面積の差で, 絵を描いてみればわかりますが, $\{b_n\}$ は小さい図形を増やしていくので単調増加, $\{c_n\}$ は小さい図形を減らしていくので単調減少です. $0{<}b_1{<}b_2{<}\cdots{<}b_n{<}\cdots{<}c_n{<}\cdots{<}c_2{<}c_1{=}1$ です. 単調増加数列 $\{b_n\}$ は, どの項も 1 より小さいので, 幾らでも大きくなるわけにはいきません. $\{b_n\}$ は何かある値に収束します.

[定理] 有界な単調増加 (単調減少) 数列は収束する.

数列 $\{c_n\}$ も同様に ある値に収束します. $c_n{-}b_n{=}\log(1{+}\frac{1}{n})$ なので, $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ の収束先の差は $\frac{1}{n}$ より小さい. n をどんどん大きくとることで, $\{b_n\}$ と $\{c_n\}$ は同じ数に収束することがわかります. これを γ とおき, Euler 定数と呼びます. Euler 定数は有理数であるか無理数であるか何もわかっていませんが, その値は $\gamma{=}0.57721566490153286\cdots$ と計算されています.

1.6 数列 $\{b_n\}$ は単調増加, $\{c_n\}$ は単調減少で, ともに Euler 定数 γ に収束し, $b_n{<}\gamma{<}c_n$ となります. $b_n{=}S_n{-}\log(n{+}1)$, $c_n{=}S_n{-}\log n$ なので, $\log n{+}\gamma{<}S_n{<}\log(n{+}1){+}\gamma$ と言う評価式が得られます $S_{n-1}{<}10{\le}S_n$ となる n を見つけたい. $\log(n{-}1){+}\gamma{<}S_{n-1}{<}10{\le}S_n{<}\log(n{+}1){+}\gamma$ なので $e^{10-\gamma}{-}1{<}n{<}e^{10-\gamma}{+}1$ となります.

$e^{10-\gamma}$=12366.96 なので n=12366 または n=12367 です. S_{12366}=9.999962, S_{12367}=10.000043 なので, $S_n \geq 10$ となる最小の n は 12367 です. 同様に少し計算してみましょう.

$e^{10-\gamma}$	= 12366.96			S_{12366}	= 9.999962	S_{12367}	= 10.000043
$e^{11-\gamma}$	= 33616.90			S_{33616}	= 10.999988	S_{33617}	= 11.000017
$e^{12-\gamma}$	= 91380.22	S_{91379}	= 11.999992	S_{91380}	= 12.000003		
$e^{13-\gamma}$	= 248397.19	S_{248396}	= 12.999997	S_{248397}	= 13.000001		
$e^{14-\gamma}$	= 675213.58			S_{675213}	= 13.999999	S_{675214}	= 14.000001
$e^{15-\gamma}$	= 1835420.80			$S_{1835420}$	= 14.999999	$S_{1835421}$	= 15.000000
$e^{16-\gamma}$	= 4989191.02	$S_{4989190}$	= 15.999999	$S_{4989191}$	= 16.000000		
$e^{17-\gamma}$	= 13562027.29	$S_{13562026}$	= 16.999999	$S_{13562027}$	= 17.000000		
$e^{18-\gamma}$	= 36865412.36	$S_{36865411}$	= 17.999999	$S_{36865412}$	= 18.000000		

$S_{n-1}<100 \leq S_n$ となる n を求めてみましょう. $e^{100-\gamma}-1<n<e^{100-\gamma}+1$ で, $e^{100-\gamma}=1.5092688\times10^{43}$ (!) なので, n は 44 桁の自然数です. より詳しく計算すると $e^{100-\gamma}$=15092688622113788323693563264538101449859497.364 なので, n=15092688622113788323693563264538101449859497 または n=15092688622113788323693563264538101449859498 となります. どっちでしょう? 44 桁までの数について逆数の和を求めるのは現在の計算機では処理できません.

1.7 調和級数の部分和 S_n について, $\log n+\gamma<S_n<\log(n+1)+\gamma$ が成り立ちます. $r_n=S_n-(\log n+\gamma)$ とおくと, r_n は正で, 単調減少 $(r_n>r_{n+1})$, 0 に収束します. $S_n=\log n+\gamma+r_n$ と書けば, 調和級数の部分和を表す数式と思えます. このとき r_n を誤差項と呼びます. $S_n<\log(n+1)+\gamma$ なので, 誤差項は $0<r_n<\log(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ と評価されます. S_n と $\log n+\gamma$ の差は $\frac{1}{n}$ より小さいのです. 誤差項 r_n についてはもっと詳しく調べられていますが, もう十分に難しいところまで来ているので, この話はここでとどめておきましょう.

§2 素数と調和級数

2.1 調和級数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ が正の無限大に発散することを証明し, 発散の様子を観察しました. すべての自然数に対する逆数の和は正の無限大に発散しました. 自然数の中の一部分を選んで逆数の和を考えてみるとどうなるでしょうか. 自然数を偶数と奇数に分けて, 偶数についての逆数の和, 奇数についての逆数の和は, それぞれ収束するのでしょうか, 発散するのでしょうか. すぐにわかることですが, どちらも正の無限大に発散します. 自然数を半々に分けたぐらいで収束するものを作り出すのは難しそうです. 2 の冪 (2^n の形) の数を集めてみます. それらの逆数は $\frac{1}{2^n}$ の形の数なので, 等比級数となり $\frac{1}{1-1/2}=2$ に収束します. これではあまりにつまらない. 収束するかしないか, ぎりぎりどうか？ってところを見るのが面白そうです.

2.2 唐突ですが, 素数の逆数の和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ を考えてみましょう. 素数が有限個しかなければ, 素数の逆数の和は有理数になります. 分母が全ての素数の積になるので意味がない訳ではありませんが, 素数が無数にあった方が面白そうです. 素数が無数に存在することは, Euclid による簡明な証明があり, 多分習ったのではないでしょうか. さて, 素数の逆数の和ですが, 正の無限大に発散することが, 18 世紀に Euler により示されました.

[定理] (Euler) 素数の逆数の和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots$ は正の無限大に発散する.

話の流れから行きますと, ここでこの定理の証明を紹介することになるのですが, かなり難しい解析と代数を使うため, 残念ながらこの講義の範囲を超えてしまいます. ですが, 高校数学の限度を超えているのを承知の上で, 概略を話しましょう. 整数論の基本定理 (すべての自然数は素数の積として一意的に表せる) と, 1.1 節で紹介した等比級数の和の公式より, 調和級数は素数に関する無限個の積 $(1-\frac{1}{2})^{-1}(1-\frac{1}{3})^{-1}(1-\frac{1}{5})^{-1}(1-\frac{1}{7})^{-1}(1-\frac{1}{11})^{-1}(1-\frac{1}{13})^{-1}\cdots$ (Euler 積という) で表せます. Euler 積が収束, 発散は, 積の各項に現れる $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots$ のすべての和 (素数の逆数の和) の振る舞いで決まります. そもそも調和級数が正の無限大に発散していたので, Euler 積も正の無限大に発散する. 従って, 素数の逆数の和も正の無限大に発散する.

2.3 ともかく, これで素数の逆数の和が発散することが証明されるのですが, 難しい言葉で煙に巻いた感じで, まったくわかった気がしないと思います. ところがこの証明では, 素数が無数にあるかどうかを使っていません. 素数が無数に多く存在することについて Euclid のものとは全く異なる証明が得られました.

[証明] (Euler) 素数の逆数の和が正の無限大に発散するので, 素数は無数に多く存在する.

驚くべきことです. 素数の個数に関する純粋に代数的なものに対して, 級数やらなんやら, 解析を使った全く異なるアプローチが発見されたのです. Euler 以降, 素数の量的な分析に解析学が大きな役割を演じることになります. Dirichlet の算術級数定理 (4 で割って 1 余る素数が無数にあること, 3 で割って 2 余る素数が無数にあることな

ど) が素数の逆数の和の振る舞いから得られます. 素数定理 (自然数の中で素数がどの程度の割合で含まれるか) なども, 自然数の負の冪乗の和や調和級数の部分和の誤差項の精密な評価などから得られます. 素数が無数に多く存在すると言うことだけなら, Euclid によってギリシャ時代に証明されたことではありますが, Euler はその頃の最先端の解析学を駆使して新しい方向へ導き, 新しい世界を開拓したのです.

§3　完全数, 過剰数など

3.1　調和級数は正の無限大に発散するので, 異なる単位分数を足していくと幾らでも大きい数が現れます. 部分和 $S_6=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{49}{20}=2.45$ から $\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{5}$ を除くと $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$ となります. 異なる単位分数を幾つか集めて 3, 4, 5, 6, $\cdots$ などの自然数や有理数を表すことができるでしょうか? 実数ではどうでしょうか?

有限個の単位分数の和は通分して計算すると有理数になります. 無理数は有限個の単位分数の和では表せないので, 無限個の和, 無限個の単位分数を上手く選んで作った級数を考えることになります. この級数は調和級数の一部分なので部分級数と呼ばれます.

[**定理**]　任意の正の実数に対して, その数に収束する (調和級数の) 部分級数が存在する.

3.2　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$ ですが, 分母を 6 で通分して分子だけを眺めると, $6+3+2+1=2\times6$ となります. 左辺は 6 の約数の和で, それが 6 の 2 倍に等しい. 6 の真の約数 (6 自身をのぞく) の和にすると, $3+2+1=6$ となります. 真の約数の和がもとの数に等しい自然数を完全数と言います. 28 も $14+7+4+2+1=28$ なので完全数です. $28+14+7+4+2+1=2\times28$ の両辺を 28 で割ると $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$ となります. 完全数は単位分数の和で 2 や 1 を表すことに関係があります. 自然数 n の正の約数の和を $s(n)$ とおきます. $s(1)=1$, $s(2)=1+2=3$, $s(3)=1+3=4$, $s(4)=1+2+4=7$ です. n が完全数であるための必要十分条件は $s(n)=2n$ です. $\frac{s(n)}{n}$ を考えます. $s(n)$ は n の約数の和ですから, 各項を n で割ると, 約分されて分母が n の約数の単位分数になります. つまり, $\frac{s(n)}{n}$ は n のすべての約数を分母とする単位分数の和です. 完全数 n では, $\frac{s(n)}{n}=2$ です. $\frac{s(n)}{n}>2$ となる自然数 n を過剰数, $\frac{s(n)}{n}<2$ となる自然数 n を不足数といいます. 素数 p に対して $\frac{s(p)}{p}=1+\frac{1}{p}$ なので, 大きな素数をとれば $\frac{s(p)}{p}$ を 1 より大きいけどいくらでも 1 に近い値にできます. $\frac{s(n)}{n}$ はどのぐらい大きくなるのでしょうか.

3.3　実は $\frac{s(n)}{n}$ はいくらでも大きな値を取ることができます. そこで大きくなっていく様子を調べてみたい. 単に $\frac{s(n)}{n}$ を表にしただけでは, 素数のところで急激に値が小さくなったりバラつきが大きく観察が難しくなります. そこで m より小さいすべての自然数 n に対して $\frac{s(m)}{m}>\frac{s(n)}{n}$ となる m について調べれば, 値にばらつきのある $\frac{s(n)}{n}$ の上端を辿って大きくなっていく度合いを調べることができます. この様な自然数 m を超過剰数といいます. 非常に難しい話に入ってしまいました. 最後に定理を引用します.

[**定理**] **(Grönwall, 1913)**　超過剰数 m について, $m\to\infty$ のとき $\frac{s(m)}{m\log\log m}\to e^{\gamma}$ が成り立つ.

[**定理**] **(Ramanujan, 1915)**　Riemann 予想を認めると, すべての n で $\frac{s(n)}{n\log\log n}\leq e^{\gamma}$ が成り立つ.

[**定理**] **(Robin, 1984)**　すべての n について $\frac{s(n)}{n\log\log n}\leq e^{\gamma}$ であることと Riemann 予想は同値である.

§4　まとめ

収束しない級数の例として出会うだけのことの多い調和級数ですが, 面白いことがたくさんあります. 意外に思うかもしれませんが, 授業などで習ったことから少し踏み込むだけで, 誰も知らない数学の世界の広がりに出会うことができます. 数学の楽しさは, 頑張って解いたときのある種の爽快感だけではありません. 未知のものに出会い創り出すことが数学の研究の楽しさです. §1 では知識として習う調和級数の発散について, その大きくなっていく振る舞いを観察しました. §2 では Euler の定理を軸に, 整数論が, 当時発達してきた解析学に出会うことで大きな進展を見せた様を紹介しました. §3 では少し端折って話ましたので, 何のことやらわからないかもしれませんが, 素朴な観察 ($1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$) から素朴な疑問 (任意の正の数を単位分数の和で表す) を提起し, それを定式化する試みや, 幾つかの発展的結果について話しました.