ピタゴラス数のはなし

小川 裕之　(大阪大学大学院 理学研究科)†

§0　序

3, 4, 5 や 5, 12, 13 のように、直角三角形の三辺になる整数の三つ組みをピタゴラス数と言います. ピタゴラス数 3, 4, 5 を一斉に 2 倍, 3 倍した 6, 8, 10 や 9, 12, 15 などもピタゴラス数ですが, 互いに素 (1 より大きい共通の約数をもたない) ものを主に考えることにします. このときピタゴラス数は、二つの整数 m. n を使って m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 で表されます. ピタゴラス数について、整数論研究者の立場からお話しします.

§1　ピタゴラス数の定義と求め方

1.1　ピタゴラス数は直角三角形の三辺になる整数の三つ組のことです. ピタゴラスの定理により, 直角三角形の三辺の長さを a, b, c (斜辺の長さを c とする) とすると $a^2+b^2=c^2$ となり, また逆に, $a^2+b^2=c^2$ なる三つの正の数 a, b, c を三辺の長さにもつ三角形は直角三角形になります. ピタゴラス数は正の整数の三つ組 a, b, c で $a^2+b^2=c^2$ となるものです. 3, 4, 5 や 5, 12, 13 はピタゴラス数です. 正の整数 m, n $(m>n)$ について, 正の整数の三つ組 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 もピタゴラス数です. $m=2$, $n=1$ とすると 3, 4, 5 が現れ, $m=3$, $n=2$ とすると 5, 12, 13 が現れます. この m, n を使ったピタゴラス数はどの様にしてみつかったのでしょうか. すべてのピタゴラス数がこの様にして表されるのでしょうか. 与えられたピタゴラス数に対してその三つ組を与える m, n の選び方は一通りなのでしょうか.

1.2　ピタゴラス数 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 の見つけ方を二つ話します. 数式の展開 $(x+1)^2=x^2+2x+1$ において, 右辺の後ろ二項 $2x+1$ が y^2 と表されれば $(x+1)^2=x^2+y^2$ となります. $2x+1=y^2$ を使って x を消去すると, $(y^2+1)^2=(y^2-1)^2+(2y)^2$ となります. y を有理数とすると $y=\frac{m}{n}$ (m, n は整数) と書けるので, $((\frac{m}{n})^2+1)^2=((\frac{m}{n})^2-1)^2+(2\frac{m}{n})^2$ となります. n^2 倍して分母を払うと $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$ となり, ピタゴラス数 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 が得られました.

ピタゴラス数 a, b, c は $a^2+b^2=c^2$ を満たします. 両辺を c^2 で割ると $(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2=1$ となります. $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$ とおくと, x, y は有理数で $x^2+y^2=1$ を満たします. $x\neq 0$ とします. $k=\frac{y+1}{x}$ とおくと, この k は有理数です. $y=kx-1$ として $x^2+y^2=1$ に代入し整理すると $(k^2+1)x^2-2kx=0$ となります. $x\neq 0$ だったので, $x=\frac{2k}{k^2+1}$, $y=\frac{k^2-1}{k^2+1}$ となります. $k=\frac{m}{n}$ (m, n は整数) とおくと, $x=\frac{2mn}{m^2+n^2}$, $y=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ となります. $x^2+y^2=1$ に代入して分母を払うと $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$. ピタゴラス数が現れました.

ピタゴラス数 m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2 を見つける異なる方法を紹介しました. 前者は何となく式変形してたら見つかったって感じです. 後者ではピタゴラス数を全部見つけたことになるのですが, わかりますか？

1.3　最後の疑問. 与えられたピタゴラス数に対して, その整数の三つ組を与える m, n の選び方は一通りであるかどうか. ピタゴラス数 a, b, c について偶奇を調べてみましょう. 三つすべてが奇数のとき, 奇数の二乗は奇数なので $a^2+b^2=c^2$ の右辺は偶数で左辺は奇数となります. 不合理です. どれか二つが偶数なら残りの数も偶数になります. 互いに素な整数の組を考えたかったので, ピタゴラス数には偶数が丁度一つ含まれる場合を考えればよい. c が偶数で, a と b が奇数だったとしましょう. 奇数 $2k+1$ (k は整数) の二乗は $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$ なので, 4 で割ると余りは 1 です. 奇数 a, b について, a^2+b^2 を 4 で割った余りは 2 になります. 偶数 c の二乗 c^2 は 4 の倍数です. 4 で割った余りが異なるので, $a^2+b^2=c^2$ となりません. 従って, 唯一の偶数となるのは a か b です. a と b は交換して順序を変えてもピタゴラス数の本質は変わらないので, b を偶数とし, a, c は奇数と考えてよい. $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ となる正の整数 m, n $(m>n)$ を見つければよい. $c+a=2m^2$, $c-a=2n^2$ なので, a, b, c に対して $m=\sqrt{\frac{c+a}{2}}$, $n=\sqrt{\frac{c-a}{2}}$ とただ一組の正の実数が定まります. あと, この m, n が整数であることを示さねばなりません. $a^2+b^2=c^2$ なので, $c^2-a^2=b^2$ となります. b が偶数なので, 4 で割って $\frac{c+a}{2}\frac{c-a}{2}=(\frac{b}{2})^2$ と因数分解できます. ピタゴラス数 a, b, c を考える上で互いに素な整数の組を考えていたので, $\frac{c+a}{2}$ と $\frac{c-a}{2}$ は互いに素です. 互いに素な整数 $\frac{c+a}{2}$ と $\frac{c-a}{2}$ の積が整数の二乗なので, $\frac{c+a}{2}$ と $\frac{c-a}{2}$ はどちらも整数の二乗です. それらの平方根は整数になり, m と n が整数であることが示されました. こうして, ピタゴラス数 a, b, c に対して m, n にあたる数がただ一組与えられました.

---

† 〒 560-0043　大阪府豊中市待兼山町 1-1　ogawa@math.sci.osaka-u.ac.jp
2014 年 8 月 6 日, 7 日　於　兵庫県立加古川東高等学校

§2　ピタゴラス数の関係式

2.1　すべてのピタゴラス数を表す式が見つかったので, ピタゴラス数をどんどん作っていくことができます. 整数 m, n $(m > n)$, $m \leq 6$ を表にまとめると,

m , n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m , n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m , n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2
2 , 1	3 , 4 , 5	4 , 3	7 , 24 , 25	6 , 1	35 , 12 , 37
3 , 1	8 , 6 , 10	5 , 1	24 , 10 , 26	6 , 2	32 , 24 , 40
3 , 2	5 , 12 , 13	5 , 2	21 , 20 , 29	6 , 3	27 , 36 , 45
4 , 1	15 , 8 , 17	5 , 3	16 , 30 , 34	6 , 4	20 , 48 , 52
4 , 2	12 , 16 , 20	5 , 4	9 , 40 , 41	6 , 5	11 , 60 , 61

m と n の偶奇が揃っていたり (3, 1 や 4, 2 など), m と n が互いに素でない場合 (6, 3 など), $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ は互いに素ではありません. その様な場合を除いて表を作り直しましょう.

m , n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m , n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2	m , n	m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2
2 , 1	3 , 4 , 5	5 , 4	9 , 40 , 41	7 , 6	13 , 84 , 85
3 , 2	5 , 12 , 13	6 , 1	35 , 12 , 37	8 , 1	63 , 16 , 65
4 , 1	15 , 8 , 17	6 , 5	11 , 60 , 61	8 , 3	55 , 48 , 73
4 , 3	7 , 24 , 25	7 , 2	45 , 28 , 53	8 , 5	39 , 80 , 89
5 , 2	21 , 20 , 29	7 , 4	33 , 56 , 65	8 , 7	15 , 112 , 113

この表に現れるピタゴラス数はすべて異なっています. また, すべてのピタゴラス数が, m, n の範囲を大きくしていけば, この表の中に現れます.

さて, $(m, n) = (7, 4)$, $(8, 1)$ を見てみましょう. 対応するピタゴラス数はそれぞれ 33, 56, 65 と 63, 16, 65 です. 最も長い辺 (直角に向かい合う斜辺) の長さがどちらも 65 ですが, 他の辺の長さは異なります. $(m, n) = (3, 2)$, $(6, 1)$ では偶数の長さの辺が共に 12 で同じ. $(m, n) = (4, 1)$, $(8, 7)$ では斜辺でない奇数の長さの辺が共に 15 で同じ. この様に一部に同じ長さの辺をもつピタゴラス数の組はたくさんあるのでしょうか.

2.2　偶数の長さの辺が 12 のものについて考えてみましょう. 偶数の長さの辺は $2mn$ で表されるので, $2mn = 12$ となる互いに素で偶奇の異なる整数 m, n $(m > n)$ を探せばよい. この場合 $(m, n) = (6, 1)$, $(3, 2)$ で, 上の表で見つけたものがすべてです. 一般に, 与えられた正の偶数 b を偶数の長さの辺にもつピタゴラス数があるためには, $b = 2mn$ となる互いに素で偶奇の異なる二つの正の整数 m, n が見つかればよい. 従って b は 4 の倍数でなければならず, $m = \frac{b}{2}$, $n = 1$ とおくと, m, n は互いに素で偶奇が異なり $b = 2mn$ を偶数の長さに辺にもつピタゴラス数が与えられます.

斜辺でない奇数の長さの辺の場合も実は殆ど同じ考え方で解決できます. 15 を例に考えましょう. 斜辺でない奇数の長さの辺は $m^2 - n^2$ で表され, 因数分解すると $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ となります. m, n は互いに素で偶奇が異なるので, $m + n$ と $m - n$ は共に奇数で互いに素です. 15 を互いに素な奇数の積に分けると, $15 = 15 \times 1 = 5 \times 3$ の二通で, それぞれから $(m, n) = (8, 7)$, $(4, 1)$ が得られます. 一般に, 3 以上の奇数 a に対して, $m + n = a$, $m - n = 1$, 即ち $m = \frac{a+1}{2}$, $n = \frac{a-1}{2}$ と取ると, m, n は互いに素で偶奇が異なるので, この整数の組から a を奇数の長さの辺にもつピタゴラス数 $m^2 - n^2$ $(= a)$, $2mn$, $m^2 + n^2$ が得られます.

2.3　残るは斜辺の長さに現れる整数です. 斜辺の長さは $m^2 + n^2$ で表されるので, この形の整数の特徴を調べることになります. 残念なことにこの式は因数分解できないので, これまでの方法は使えません. 二乗して -1 になる虚数 $\sqrt{-1}$ で, $m^2 + n^2 = (m + n\sqrt{-1})(m - n\sqrt{-1})$ と因数分解する考え方もあります. 虚数 $\sqrt{-1}$ を含む数の世界での因数分解で, これがなかなか難しい. 研究者の立場からはとても自然な考え方で, 以下紹介する内容も, この見方ができると神秘性の全くない淡々としたお話になります. 話をもとに戻しましょう. 困ったときは数を並べて観察してみるのがよい. 表から, 斜辺の長さに現れる整数を大きさの順に表から抜き出すと, 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 113 となります. もう少し範囲を広げると, $(m, n) = (9, 2)$ で 85, $(m, n) = (9, 4)$ で 97, $(m, n) = (9, 8)$ で 145 が見つかります. ピタゴラス数の偶奇を調べたとき, 4 で割った余りに注目しました. m と n は偶奇が異なるので, 斜辺の長さ $m^2 + n^2$ を 4 で割った余りは 1 です. 表から抜き出した整数も 4 で割って 1 余る数ばかりです. 9, 21, 33 など 4 で割った余りが 1 の正の整数でも表に現れていない数もありますが, 100 以下の素数で 4 で割って 1 余るものはすべて現れています. 9 は無理やり $9 = 3^2 + 0^2$ とできますが, 21 や 33 はどうやっても $m^2 + n^2$ の形に表せません. $m = 1, 2, 3, \cdots$ $(\leq \sqrt{21}, \sqrt{33})$ としてみれば簡単です.

2.4　定理を紹介します.

定理 (フェルマー)　p を奇数の素数とする. $p = m^2 + n^2$ なる整数 $m,\,n$ が見つかるための必要十分条件は, p を 4 で割った余りが 1 になることである.

整数論の入門書の多くにこの定理と証明が載っていますが, 平方剰余というちょっと難しい話が使われることが多く, いきなり読むのは大変でしょう. 難しい概念を使わない説明もありますが, 趣味で数学を楽しむのならともかく, その様なものを眺めてお茶を濁しても仕方ありません. もし証明に興味があるなら, 少し難しい本ですが, 高木貞治「初等整数論講義」を勧めます. 理論的背景まで丁寧に書かれています. ピタゴラス数の斜辺の長さに現れる素数, 現れない素数が決まりました. ところで 65 $(= 5 \times 13)$ は素数ではありません. 素因数の 5, 13 は 4 で割って 1 余る素数で, それぞれピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 の斜辺の長さに現れます.

2.5　唐突ですが, 次の等式が成り立ちます.

$$(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)\,(x^2 + y^2)$$

両辺をそれぞれ展開して比べれば確かめられますが, どうしてこのような等式を見つけたのでしょうか. ピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 について, $(a,\,b) = (3,\,4)$, $(x,\,y) = (5,\,12)$ を上の等式に当てはめると,

$$(3 \times 5 - 4 \times 12)^2 + (3 \times 12 + 4 \times 5)^2 = (3^2 + 4^2)\,(5^2 + 12^2) \qquad \therefore\ \ 33^2 + 56^2 = 65^2$$

また, $(a,\,b) = (3,\,4)$, $(x,\,y) = (12,\,5)$ を上の等式に当てはめると,

$$(3 \times 12 - 4 \times 5)^2 + (3 \times 5 + 4 \times 12)^2 = (3^2 + 4^2)\,(12^2 + 5^2) \qquad \therefore\ \ 16^2 + 63^2 = 65^2$$

斜辺の長さが 65 の二組のピタゴラス数が現れました. 実は同様の関係がピタゴラス数を表す $m,\,n$ の間にも成り立ちます. 即ち, ピタゴラス数 3, 4, 5 に対応する $(m,\,n)$ は $(2,\,1)$ で $5 = 2^2 + 1^2$ となります. 5, 12, 13 には $(3,\,2)$ が対応し $13 = 3^2 + 2^2$ となり, 33, 56, 65 には $(7,\,4)$ が対応し $65 = 7^2 + 4^2$ となり, 63, 16, 65 には $(8,\,1)$ が対応し $65 = 8^2 + 1^2$ となります.

$$(2 \times 3 - 1 \times 2)^2 + (2 \times 2 + 1 \times 3)^2 = (2^2 + 1^2)\,(3^2 + 2^2) \qquad \therefore\ \ 4^2 + 7^2 = 65$$

$$(2 \times 2 - 1 \times 3)^2 + (2 \times 3 + 1 \times 2)^2 = (2^2 + 1^2)\,(2^2 + 3^2) \qquad \therefore\ \ 1^2 + 8^2 = 65$$

2.6　2.4 節, 2.5 節を踏まえて, 21 や 33 についてもう一度考えてみましょう. 21 を斜辺の長さにもつピタゴラス数があったとすると, 互いに素で偶奇の異なる $m,\,n$ で $m^2 + n^2 = 21$ となるものが存在します. 整数の二乗を 3 で割った余りは 0 か 1 で, 二つの整数の二乗の和 $m^2 + n^2$ $(= 21)$ が 3 で割り切れるためには m も n も 3 の倍数でなければならない. $m,\,n$ が互いに素の条件にも反しますが, $m^2 + n^2 = 21$ の両辺を 3^2 で割ると $(m/3)^2 + (n/3)^2 = 7/3$ でこれは不合理. 21 を斜辺の長さにもつピタゴラス数は存在しない. 33 も同様です.

2.7　2.4 節と 2.5 節から, 4 で割って 1 余る素数のみを素因子にもつ正の奇数は, ピタゴラス数の斜辺の長さに現れることがわかりました. 2.4 節と 2.6 節から, 4 で割って 3 余る素数を素因子にもつ正の奇数は, ピタゴラス数の斜辺の長さに現れないことがわかりました. こうしてピタゴラス数の斜辺の長さに現れる正の奇数がすべてわかりました.

§3　ピタゴラス三角形, 三角比 など

ここからは, 細かい話は書きません. おもしろいなぁと感じたなら, 自分でやってみて, 自分の力で発見していってみてください. いろいろアレンジして考えを膨らましてみるのもおもしろいかもしれません. 不思議な出来事に遭遇したり, ひょっとすると未知の新発見につながるかもしれません.

3.1　ピタゴラス数は直角三角形の三辺となる整数の三つ組のことでした. 折角ですから, ピタゴラス数から直角三角形を作ってみましょう. この直角三角形をピタゴラス三角形と呼ぶことにします. 定規とコンパスを使って, 三辺が 3, 4, 5 の直角三角形 A と, 三辺が 5, 12, 13 の直角三角形 B を描き, 切り抜きます. 直角三角形 A の斜辺に B の長さが 5 の辺を合わせて並べてみましょう. B の斜辺の長さは 13 です. 斜辺でない辺の長さが 13 のピタゴラス数 13, 84, 85 のピタゴラス三角形 C を, B の斜辺に長さが 13 の辺を重ねて並べてみましょう. 渦巻状に見えますが, これを繰り返すとどの様な図形が現れるでしょうか. 斜辺でない辺の長さが 85 のピタゴラス数は, 85, 132, 157 と 85, 3212, 3613 の二組あります. ちょっと大きくて実際に作ってみるのは難しいですね. 計算機のグラフソフトなどで描いてみるのも面白いかもしれません. 「自然」に繰り返すには, 二組のピタゴラス数のうちどちらを選んだらいいでしょうか? 選び方で何か違った現象に行きつくのでしょうか?

3.2 2.5 節で, 斜辺の長さが 65 の二組のピタゴラス数 33, 56, 65 と 63, 16, 65 を, ピタゴラス数 3, 4, 5 と 5, 12, 13 から不思議な等式を使って作りだしました. これらピタゴラス数から作られるピタゴラス三角形の間に, 何か関係があるのでしょうか. 数の間の関係と, 図形の間の関係. 何か見つかりましたか ? ここでの発見から, 2.5 節の等式の意味を説明できるでしょうか ?

3.3 整数の二乗となる数を平方数と言います. 2.5 節の等式は, 平方数の和で表された整数の世界の掛け算の話です. 右辺から左辺は平方数の和で表された数の積が平方数の和で表されることを意味し, 左辺から右辺へは平方数の和で表された数が平方数の和で表される数の積に因数分解されることを意味します. 2.3 節で, 平方数の和を虚数 $\sqrt{-1}$ を含む数の世界で因数分解する話をしました. この立場で 2.5 節の等式を眺めると, 虚数 $\sqrt{-1}$ を含む数の世界の積と因数分解が見えてきます. $(a+b\sqrt{-1})(x+y\sqrt{-1})$ を計算して, 2.5 節の等式と比べてみましょう.

3.4 ピタゴラス三角形は三辺が整数の直角三角形のことでした. ピタゴラス三角形の面積は整数になります. 実際 $\frac{1}{2}\times(m^2-n^2)\times 2mn = mn(m^2-n^2)$ で整数です. 三辺が整数の直角三角形の面積となる整数は, 整数 m, n で $mn(m^2-n^2)$ で表され形が完全に決まっています. 少し条件を緩めて, 三辺が有理数の直角三角形の面積となる整数 (有理数ではありません) について考えてみましょう. この様な整数を合同数と言います. 端折りますが, 1, 2, 3, 4 は合同数ではありません. 3, 4, 5 のピタゴラス三角形の面積は $\frac{1}{2}\times 3\times 4 = 6$ なので, 6 は合同数です. 9, 40, 41 のピタゴラス三角形の面積は $\frac{1}{2}\times 9\times 40 = 180$ です. 全体を 6 分の 1 に縮小した $\frac{3}{2}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{41}{6}$ の直角三角形の面積は $180\times(\frac{1}{6})^2 = 5$ なので, 5 は合同数です. 8 で割った余りが 5, 6, 7 の正の整数は合同数であろうと予想されていますが, 数値実験などで 100 万以下の正の整数について合同数であるかどうか計算されている程度です.

3.5 合同数とピタゴラス数との関係は明白ですが, 多くのことが比較的簡単に説明できるピタゴラス数に対し, 合同数はとても難しい対象です. 以下, 内容には立ち入らず, 言葉だけで紹介します. ピタゴラス数はガウス整数の整数論 (二次無理数の整数論, 類体論の原型) に含まれ, 2.4 節で紹介した高木貞治「初等整数論講義」にすべてが解説されています. 類体論は, 2.4 節で紹介したフェルマーの定理を一般化したもので高木貞治により構築されました. 類体論の参考文献として高木貞治「代数的整数論」を挙げておきます. とても難しい本で理学部数学科の大学生でも手が出ないかもしれません. その類体論を高次元化したものの一つに楕円曲線の岩澤理論があります, 楕円曲線の岩澤理論は, フェルマーの最終定理 (最高峰の数学理論を殆どすべて使って証明された) により整数論研究の中心に躍り出ました. 合同数は, 楕円曲線の岩澤理論における特に難しい未解決問題 (Birch and Swinnerton-Dyer 予想) に関係します. 合同数とピタゴラス数の間には数学理論においてとても大きな隔たりがあるのです. 京都大学数理解析研究所の望月新一教授による ABC 予想の証明に誤りがなかったなら (現在検証中), その隔たりがグンと小さくなりますが, それでも合同数は難しい. ちなみに ABC 予想を使うと, フェルマーの最終定理など, 多くの大定理, 多くの予想が瞬く間に導かれてしまいます. それでもまだ合同数には届かないのです. 数学って, まだまだたくさんやることがあるのです.