# 実験数学入門

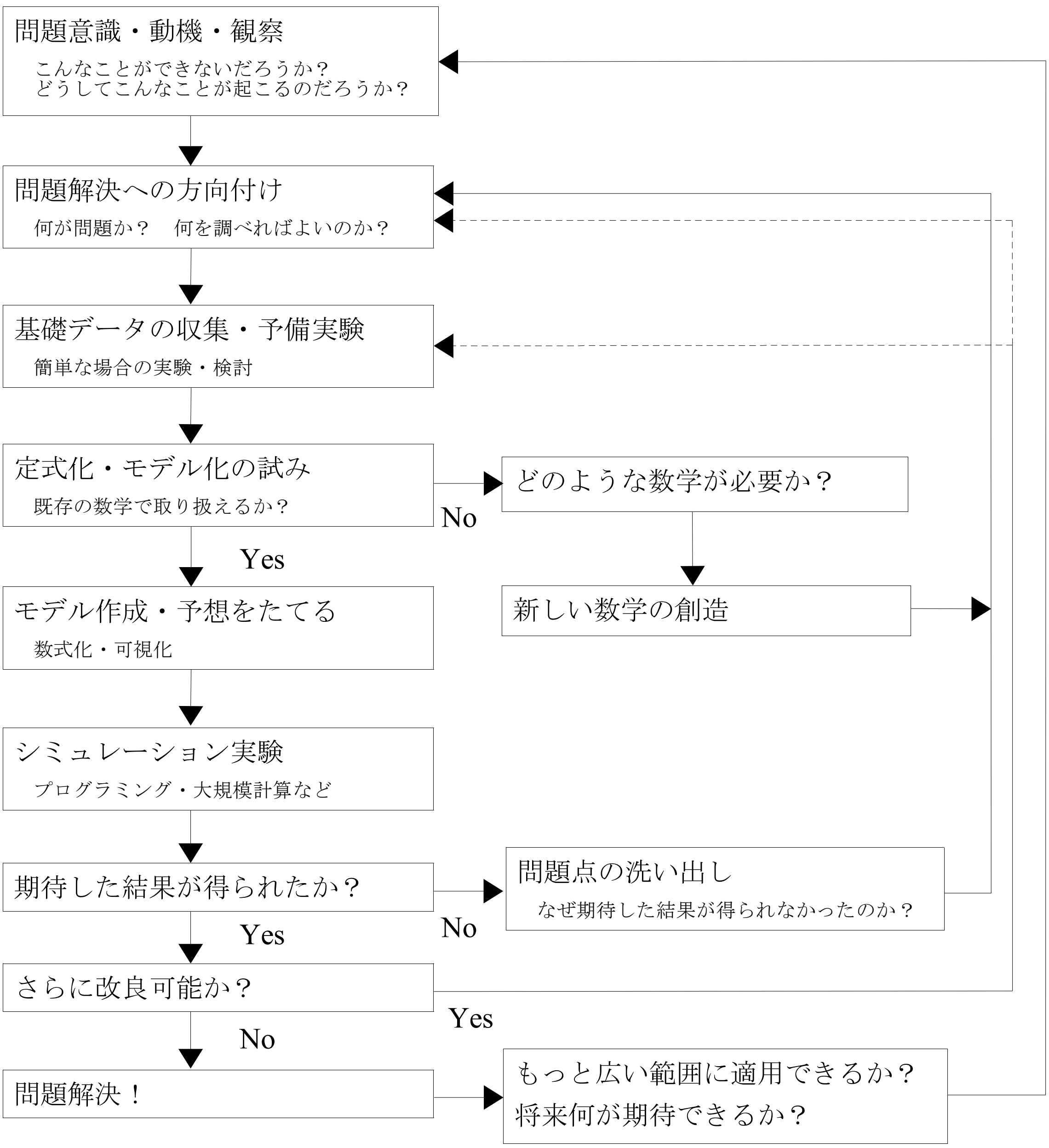
小川裕之（大阪大学大学院理学研究科）

今回は「実験数学」(Experimental Mathematics) についてお話しします。「実験数学」とは、数学において多くの実験により新しい知見を得る研究方法です（山本芳彦著「実験数学入門」）。計算機の発達した今、数学における「実験」に違和感は少なくなっていますが、厳格な論理の世界とも言える数学で「実験」を考える意義はどこにあるのでしょうか。

教育における「実験」は、的確な実例を通して理解を深め知識を定着させることを目的としています。与えられた課題を実感をもって理解するために、定められた手順で「実験」するのが殆どでしょう。これに対して「実験数学」は、実例から未知の現象を見つけ定式化し、新しい数学をつくるのが目的です。「実験数学」の研究方法が、数学の学習方法としても効果的であることが、大阪大学で山本芳彦氏により実践され、現在多くの大学で取り入れられています。

「実験数学」では、常に自ら考えることが求められます。たくさん実験をすればいいのではありません。明確な問題意識のもと、ある種の期待を持ってこれから起こるであろうことを予測し、必要な実験をするのです。数学的な論理思考の下で行うのです。漠然と眺めていたり、指示された通りに実験するのではありません。自らの意思で実行するのが重要です。予測を検証し、証明を試みる。問題もそれを解く数学も自分で作り出す。これが実験数学です。実際にどのような手続きで研究を進めるのか、山本芳彦氏による流れ図を紹介します。数学だけでなく、かなり一般的な事象に通用する考え方と言えるのではないでしょうか。

実験数学の考え方・研究の進め方のフローチャート



具体的な題材で、実験数学の考え方をお見せしましょう。突然ですが、正の整数の逆数を小数に展開してみました。

| | | |
|---|---|---|
| 1/ 1＝1 | 1/11＝0.09090909090 | 1/21＝0.04761904761 |
| 1/ 2＝0.5 | 1/12＝0.83333333333 | 1/22＝0.04545454545 |
| 1/ 3＝0.33333333333 | 1/13＝0.07692307692 | 1/23＝0.04347826086 |
| 1/ 4＝0.25 | 1/14＝0.07142857142 | 1/24＝0.04166666666 |
| 1/ 5＝0.2 | 1/15＝0.06666666666 | 1/25＝0.04 |
| 1/ 6＝0.16666666666 | 1/16＝0.0625 | 1/26＝0.03846153846 |
| 1/ 7＝0.14285714285 | 1/17＝0.05882352941 | 1/27＝0.03703703703 |
| 1/ 8＝0.125 | 1/18＝0.05555555555 | 1/28＝0.03571428571 |
| 1/ 9＝0.11111111111 | 1/19＝0.05263157894 | 1/29＝0.03448275862 |
| 1/10＝0.1 | 1/20＝0.05 | 1/30＝0.03333333333 |

すぐに目につくことですが、割り切れるものと割り切れないもの、途中からある数字の列の繰り返しになっているものがあります。

◎ 割り切れるのは、どのような場合でしょうか？

◎ 割り切れないものは、ある数字の列の繰り返しになります。 実際に計算して、確かめてみましょう。

こんなことは知ってますね。有理数は有限小数か循環小数に展開されるのでした。観察を続けましょう。1/3, 1/6, 1/9, 1/12, 1/15, 1/18, 1/24 は途中からひとつの数字が続いています。それぞれ 3, 6, 1, 3, 6, 5, 6 です。

◎ ひとつの数字が続く循環小数（分数）は、他にもあるのでしょうか？
1, 3, 5, 6 以外の数字が続くものはあるのでしょうか？

1/3 と 1/12 では、途中から同じ数字 3 が並んでいます。1/6 と 1/15 も同じ数字 6 が並んでいます。よく見ると、1/7 と 1/14 と 1/28 も同じ数字の列 142857 が繰り返されています。

◎ このような分数の組は、他にもあるのでしょうか？

◎ 1/13 は 076923 という 6 つの数字の列が繰り返されています。
これと同じ数字の列が繰り返される分数を見つけたいのですが、どうやったら・・・

更に観察しましょう。1/7 は 6 つの数字の列が、1/11 は 2 つの数字の列が、1/13 は 6 つの数字の列が繰り返されています。1/17 や 1/19 は幾つの数字の列が繰り返されるのでしょうか。計算の桁数を増やせば、1/17 は 16 個の数字の列が、1/19 は 18 個の数字の列が繰り返されるのがわかります。1/3 や 1/7 や 1/9 は小数第 1 位から数字の列が繰り返されていますが、1/6 や 1/12 では小数第 2 位から繰り返されています。

◎ 繰り返される数字の長さにはどういう特徴があるのでしょうか？

◎ 繰り返し部分はどこから始まるのでしょう？ 小数第 1 位から繰り返しの始まる分数の特徴は？

ここまで見たことを調べるには、適切な表を作ってみるのが一番です。正の整数 n について、その逆数 1/n の小数展開を計算し、繰り返し部分の数字の列 P(n) とその長さ d(n)、繰り返し部分の始まる桁 r(n)（小数第 r(n) 位）を調べ、表にしました。小数展開は 8 桁の普通の電卓を使って、小数点以下 23 桁目まで計算してみました。

| 整数 n | 逆数 1/n の小数展開 | 繰り返し部分 P(n) | 始まる桁 r(n) | 長さ d(n) |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1/ 3 = 0.33333333333333333333333 | 3 | 1 | 1 |
| 6 | 1/ 6 = 0.16666666666666666666666 | 6 | 2 | 1 |
| 7 | 1/ 7 = 0.14285714285714285714285 | 142857 | 1 | 6 |
| 9 | 1/ 9 = 0.11111111111111111111111 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1/11 = 0.09090909090909090909090 | 09 | 1 | 2 |
| 12 | 1/12 = 0.08333333333333333333333 | 3 | 3 | 1 |
| 13 | 1/13 = 0.07692307692307692307692 | 076923 | 1 | 6 |
| 14 | 1/14 = 0.07142857142857142857142 | 714285 | 2 | 6 |
| 15 | 1/15 = 0.06666666666666666666666 | 6 | 2 | 1 |
| 17 | 1/17 = 0.05882352941176470588235 | 0588235294117647 | 1 | 16 |
| 18 | 1/18 = 0.05555555555555555555555 | 5 | 2 | 1 |
| 19 | 1/19 = 0.05263157894736842105263 | 052631578947368421 | 1 | 18 |
| 21 | 1/21 = 0.04761904761904761904761 | 047619 | 1 | 6 |
| 22 | 1/22 = 0.04545454545454545454545 | 45 | 2 | 2 |
| 23 | 1/23 = 0.04347826086956521739130 | | -- | -- |
| 24 | 1/24 = 0.04166666666666666666666 | 6 | 4 | 1 |
| 26 | 1/26 = 0.03846153846153846153846 | 384615 | 2 | 6 |
| 27 | 1/27 = 0.03703703703703703703703 | 037 | 1 | 3 |
| 28 | 1/28 = 0.03571428571428571428571 | 571428 | 3 | 6 |
| 29 | 1/29 = 0.03448275862068965517241 | | -- | -- |
| 30 | 1/30 = 0.03333333333333333333333 | 3 | 2 | 1 |

正の整数の逆数の小数展開について、一般的な形を見据えて計算してましょう。1/n の小数展開について、繰り返し部分が小数第 r 位から始まり、その長さが d 桁であったとします。例えば、n=28 では、

$$1/n = 1/28 = 0.03\ \underline{571428}\ \underline{571428}\ \underline{571428}\ \underline{571}....$$

小数第 3 位（r=3）から長さ 6 桁（d=6）の数字の列 571428 が繰り返されています。小数を 10 倍すると小数点に対して数の並びが左に 1 つずつ左にずれるので、小数第 1 位から繰り返しが始まるように $10^{3-1}$ 倍しましょう。

$$10^{r-1}\ /n = 10^{3-1}/28 = \quad 3\ .571428\ 571428\ 571428\ 571....$$

1/28 を $10^{3+6-1}$ 倍すると、繰り返しひとつ分ずれて、

$$10^{r+d-1}/n = 10^{3+6-1}/28 = 3\ 571428\ .571428\ 571428\ 571....$$

2 つの数の小数点以下が同じ数の並びになりました。辺々引くと、

$$(10^{r+d-1}-10^{r-1})\,/n = (10^{3+6-1}-10^{3-1})\,/28 = 3\ 571428 - 3 = 3571425$$

整数になりました。等比級数の計算方法に似ています。一般の n についても同様で、$(10^{r+d-1}-10^{r-1})/n$ は整数になります。

◎ $10^{r-1}\times(10^{d}-1)$ が n で割り切れるような、最小の正の整数 r と d を見つければよい。

この方針で、n=7 の場合に繰り返し部分を求めてみましょう。正の整数 n が 10 と互いに素（2 でも 5 でも割り切れない）なら、n は $10^{d}-1$ を割りきるので、r=1 とし、d を 1 つずつ大きくして探せばよい。

$$\begin{array}{llll}
10^{1}-1 = 9 & = 1 & \times 7+2 \\
10^{2}-1 = 99 & = 14 & \times 7+1 \\
10^{3}-1 = 999 & = 142 & \times 7+5 \\
10^{4}-1 = 9999 & = 1428 & \times 7+3 \\
10^{5}-1 = 99999 & = 14285 & \times 7+4 \\
10^{6}-1 = 999999 & = 142857 & \times 7+0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
10^{7}-1 = 9999999 & = 1428571 & \times 7+2 \\
10^{8}-1 = 99999999 & = 14285714 & \times 7+1 \\
10^{9}-1 = 999999999 & = 142857142 & \times 7+5 \\
10^{10}-1 = 9999999999 & = 1428571428 & \times 7+3 \\
10^{11}-1 = 99999999999 & = 14285714285 & \times 7+4 \\
10^{12}-1 = 999999999999 & = 142857142857 & \times 7+0
\end{array}$$

こうして 1/7 の繰り返し部分の数字の列 P(7)=142857 で、その長さ d(7)=6 であることがわかり、1/7 の小数展開の計算結果と一致しました。上の表を少し書き換えてみます。

$$\begin{array}{rrll}
10^{1} = & 10 & = 1 & \times 7+3 \\
10^{2} = & 100 & = 14 & \times 7+2 \\
10^{3} = & 1000 & = 142 & \times 7+6 \\
10^{4} = & 10000 & = 1428 & \times 7+4 \\
10^{5} = & 100000 & = 14285 & \times 7+5 \\
10^{6} = & 1000000 & = 142857 & \times 7+1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrll}
10^{7} = & 10000000 & = 1428571 & \times 7+3 \\
10^{8} = & 100000000 & = 14285714 & \times 7+2 \\
10^{9} = & 1000000000 & = 142857142 & \times 7+6 \\
10^{10} = & 10000000000 & = 1428571428 & \times 7+4 \\
10^{11} = & 100000000000 & = 14285714285 & \times 7+5 \\
10^{12} = & 1000000000000 & = 142857142857 & \times 7+1
\end{array}$$

ここまで考えていた問題では 10 の巾を 7 で割った余りが 1 になる場合を知りたかったのですが、もっとたくさんの事柄が見えてきて、とても楽しい。例えば、どの様な 10 の巾でも、7 で割ったときの商と余りをすぐに言い当てることができます。20，200，2000 など 2×（10 の巾）を 7 で割った商と余りもこの表を使って次のように計算できます。

$$\begin{array}{rl}
20 = 2\times 10^{1} & = 2\times(1 \quad \times 7+3) = 2\times 1 \quad \times 7+2\times 3 = 2 \quad \times 7+\ 6 \\
200 = 2\times 10^{2} & = 2\times(14 \quad \times 7+2) = 2\times 14 \quad \times 7+2\times 2 = 28 \quad \times 7+\ 4 \\
2000 = 2\times 10^{3} & = 2\times(142 \quad \times 7+6) = 2\times 142 \quad \times 7+2\times 6 = 284 \quad \times 7+12 = 285 \quad \times 7+5 \\
20000 = 2\times 10^{4} & = 2\times(1428 \quad \times 7+4) = 2\times 1428 \quad \times 7+2\times 4 = 2856 \quad \times 7+\ 8 = 2857 \quad \times 7+1 \\
200000 = 2\times 10^{5} & = 2\times(14285 \quad \times 7+5) = 2\times 14285 \quad \times 7+2\times 5 = 28570 \quad \times 7+10 = 28571 \quad \times 7+3 \\
2000000 = 2\times 10^{6} & = 2\times(142857\times 7+1) = 2\times 142857\times 7+2\times 1 = 285714\times 7+\ 2
\end{array}$$

少し脱線しましたが、こんな副産物もとても大事です。2×（10 の巾）を 7 で割った商は、1/7 の少数展開に出てくる数字の繰り返しで 2 から始まる 285714 が元になります。余りは、10 の巾を 7 で割った余りを 2 倍して、更に 7 で割ればいい。もっと一般に、7 で割った商と余りの少し変わった計算方法が見えてきます。例えば、

$$\begin{aligned}
12345 &= 1\times 10^{4} + 2\times 10^{3} + 3\times 10^{2} + 4\times 10^{1} + 5 \\
&= (1\times 1428 + 2\times 142 + 3\times 14 + 4\times 1)\times 7 + (1\times 4 + 2\times 6 + 3\times 2 + 4\times 3 + 5\times 1) \\
&= 1758\times 7 + 39 \\
&= 1758\times 7 + 5\times 7 + 4 \\
&= 1763\times 7 + 4
\end{aligned}$$

商の計算は楽になったのかどうかよくわかりませんが、余りの計算は随分楽になっています。10 の巾の余りにその桁の数を掛けたものを足し合わせ、それを 7 で割ったものが、もとの数を 7 で割った余りです。3 や 9 で割った余りの計算法とよく似ています。暗算でも計算できそうです。商のことを忘れて、余りを知ることを目的にしてみましょう。当初の問題『小数展開の繰り返し部分とその長さを知りたい』に関して、10 の巾の商から繰り返し部分の数字の列が、余りからその長さがわかります。余りの計算に特化した方法があれば、繰り返し部分の数字の列はわからなくても、長さを知るには十分です。

ここまでの話が、最初の流れ図における『問題意識・動機・観察』『問題解決への方向付け』『基礎データの収集・予備実験』『定式化・モデル化の試み』にあたります。余りにのみ特化した計算（合同式）と言うこれまで習っていない道具に目が向いた時が『新しい数学の創造』の段階にあたるのです。この新しい数学を使って流れ図を先に進んでみましょう。

整数 a と b を m で割った余りが等しいとき、

$a \equiv b \pmod{m}$　　　　m を法として、a は b に合同である

と書きます。これを m を法とする合同式と言います。合同式において、数の和差積が使えます。標語的に言えば、

数の和の余りは、余りの和に合同である　　　　数の積の余りは、余りの積に合同である

2 数 a, b の和 a＋b の余りは a の余りと b の余りの和から、a×b の余りは a の余りと b の余りの積から計算できます。さて問題は、$10^{r-1}\times(10^d-1)$ が n で割り切れるような r と d を求めることでした。話を簡単にするため、n が 10 と互いに素とすると r=1 なので、$10^d-1$ が n で割り切れる様な d を求めればいい。

◎　$10^d \equiv 1 \pmod{n}$　となる最小の正の整数 d が d(n) に等しい

これが『定式化・モデル化』です。n=7 を例に合同式を使った計算で 10 の巾を 7 で割った余りを見てみましょう。

$$
\begin{aligned}
10^1 &\equiv 3 && \pmod 7\\
10^2 &\equiv 10\times10 \equiv 3\times3 \equiv 9 \equiv 2 && \pmod 7\\
10^3 &\equiv 10^2\times10 \equiv 2\times3 \equiv 6 && \pmod 7\\
10^4 &\equiv 10^3\times10 \equiv 6\times3 \equiv 18 \equiv 4 && \pmod 7\\
10^5 &\equiv 10^4\times10 \equiv 4\times3 \equiv 12 \equiv 5 && \pmod 7\\
10^6 &\equiv 10^5\times10 \equiv 5\times3 \equiv 15 \equiv 1 && \pmod 7
\end{aligned}
$$

7 の逆数 1/7 の繰り返し部分の長さ d(7) が 6 であることがわかります。10 の大きな巾でも 1 桁の計算でできます。これなら、上で計算できなかった 23 の逆数 1/23 の小数展開の繰り返し部分の長さ d(23) が計算できそうです。

◎　合同式を使って 1/23, 1/29 の小数展開に現れる繰り返し部分の長さを求めてみましょう。

ここに至り、『シミュレーション実験・大規模計算』が可能になりました。計算実験を増やすことで、やや曖昧であったこれまでの『問題意識・動機・観察』が定式化できるようになります。具体的にやってみましょう。繰り返し部分の長さが比較的長いものに注目してみましょう。先の表から 7, 13, 14, 17, 19 で繰り返し部分が長くなっています。14 以外は全部素数です。大規模実験で表の範囲を広げると、比較的長い繰り返し部分 (d(n) が n の半分程度) をもつものとして、

7, 13, 14, 17, 19, 23, 29, 31, 34, 38, 43, 46, 47, 49, 58, 59, 61, 67, 71, 83, 89, 94, 97, 98, …

がみつかります。これらは素数か素数の 2 倍です。繰り返し部分の長さは、n が素数の場合は n−1 かその半分、n が素数の 2 倍では n/2−1 です。表を詳しく見ると、n が素数のとき d(n) は n−1 の約数になっています。次が予想されます。

◎　素数 n について d(n) は n−1 の約数である。

この予想は Fermat の小定理を使って証明できます。ここでは、Fermat の小定理の内容もその証明も、上の予想を示すことも紹介しません。興味のある方は整数論の入門書などを見て、まずは "自分で" 考えてみてください。その後でなら幾らでも質問に答えます。

素数 n について d(n) は n−1 の約数なので n−1 を超えないのですが、合成数 (素数でない数) でも d(n) は n−1 以下になります。繰り返し部分の長いものに注目していたので、次の問題が考えられます。

◎　d(n) が取り得る最大の値 n−1 になる n の特徴は？　その様な n はどのぐらいあるのでしょう？

実は、この様な n は素数に限ります。でも d(n) が n−1 より小さい素数 n もたくさんあります。

◎　d(n)=n−1 となる素数 n は無数にあるのだろうか？

この問いの答えは、現在の数学ではまだ知られていません。『原始根に関する Artin 予想』の一部です。d(n) に関する部分を抜き出すと、

『無数に多くの素数 n で d(n)=n−1 となり、この様な素数は素数全体の 37％ぐらいだろう』

と予想されています。この予想に最も詳しい明治大学の村田玲音氏によると、解決まであともう一歩のところまで来ているのですが、まだまだ道のりは長いとのことです。

実験数学による考え方をお見せしました。観察したすべてで『問題解決！』とはいきませんでした。最初の素朴な疑問や観察がそのまま解決できるものもあれば、視点を変えたり、焦点を絞ったり、新たな問題として解決されるもの、更に疑問の深まるものもあります。有理数の小数展開の中に、現在も多くの数学者を悩ませる難解な問題もあるのです。

ひとつの道をたどりましたが、途中で放っておいた道もたくさんあります。そのひとつひとつに未知の問題や新たな数学の種が隠れているかもしれません。最初のきっかけは何でもいいのです。興味を持ったことを、少し深く自分で調べ、少し深く自分で考える。与えられた問いに教えてもらった方法で答えるのではなく、問題自体を自分でみつけ、解くための数学も新たに自分で作る。これが実験数学なのです。