おもしろい数のはなし

小川 裕之 (大阪大学大学院 理学研究科)

皆さんは, 数学に対してどのようなイメージを抱いているのでしょうか. 答えが一つ, 一つの決まった答えをもっている. ややこしい計算がたくさん出てくる. 数学は楽しい. 大好き. 計算は好きやけど, 証明は面倒くさくて... 数学なんてキライ. 私とは関係ありません...

私の専門とする整数論には純粋に数学的な意義からだけではなく, 見た目の面白さや単なる好奇心から興味をもって研究されている問題が多数あります. 10 年ほど前に証明されたフェルマーの問題も, 当初はそのような興味から生まれたものでした. 実際に証明するには, 最先端の数学のほとんどすべてを必要とするようなとても難しい問題でした. 今日は○○数と名前のついた数を幾つか紹介します. またそれらに関わる予想や問題も幾つか紹介します. それらは見かけは易しい問題に見えるかもしれませんが, 一流の数学者が束になってかかっても解決のための糸口も見えないような難しい問題ばかりです. 数百年, 数千年来の問題も沢山あります. しかし, 上手く問題を設定すればとても興味深い研究テーマを見つけることができるかもしれません.

素数

1 より大きな自然数で 1 と自分自身以外に約数をもたない数を素数といいます. 2, 3, 5, 7 は素数です. 4, 6, 8 は 2 を約数にもち素数ではありません. 100 以下の素数を並べると,

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

の 25 個あります.

[**問い**] 素数はどのくらいあるのでしょうか ?

[**答え**] 素数は無数にあります.

その証明を最初に書き記したのはギリシャ時代のユークリッド (Eukleides, BC365?–BC275?) です. 今では沢山の種類の証明方法が考え出されています.

フェルマー数

自然数 n に対して $F_n = 2^{2^n} + 1$ の形の数をフェルマー数といいます.

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3 \qquad F_1 = 2^2 + 1 = 5 \qquad F_2 = 2^4 + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^8 + 1 = 257 \qquad F_4 = 2^{16} + 1 = 65537 \qquad F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$$

フェルマー (Fermat, 1607?–1665) は

「F_n はいつでも素数になるだろう」

と予想したのですが, 後にオイラー (Euler, 1707–1783) によって

「F_5 は素数でない」 (1732 年)

ことが示されました. 素数でないことを示すには, 1 と F_5 以外の約数を見つければいいので, 少し性能のいい電卓を持っていれば計算できると思います. 今では計算機を使って簡単に調べられることも, フェルマーやオイラーの時代はとてもじゃないけど計算できる量で

はありませんでした．しかしオイラーは独特の感覚でフェルマー数の約数の候補を見つけ，上手く割り算を計算し F_5 が素数でないことを示したのでした．

[問い]　F_5 が素数でないことを示してください

今では，フェルマーの思いとは逆に，

「フェルマー数 F_n は有限個を除いて素数ではないであろう」

と予想されています．ガウス (Gauss, 1777–1855) は 19 才のときに，

「フェルマー数 F_n が素数のとき正 F_n 角形が定規とコンパスのみで作図可能である」

ことを示しました．従って上の予想が正しいなら，作図可能な正多角形は基本的に (どんどん 2 等分するのを除いて) 有限個になります．これはギリシャ時代以来の作図問題への完全な解答でした．しかしガウスはその奥に，それまでの数の遊びの様な整数論ではない，真の近代整数論への道筋を見て取たのでした．

フェルマー数は次の等式を満たします．

$$F_n = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_{n-1} + 2$$

これを使って素数が無数にあることを証明することができるのですが，

[問い]　さて，どうやるのでしょう？

メルセンヌ数

自然数 n に対して，$M_n = 2^n - 1$ で表される数をメルセンヌ数といいます．素数のメルセンヌ数をメルセンヌ素数といいます．ユークリッドは

「M_n がメルセンヌ素数のとき $2^{n-1} \times M_n$ は完全数である」

ことを示しました．完全数というのは多くの人々に興味をもたれる対象だったこともあり，多くの人がメルセンヌ数に惹かれていきました．昔々の文献の中にはメルセンヌ数に関して多くの間違った主張が見られます．例えば，

「n が素数なら M_n は素数であろう」

と書かれていたものが沢山ありますが，

「M_{11} は素数ではありません．」

メルセンヌ (Mersenne, 1588–1648) は，

「$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ について M_n は素数であるが，
その他の $n < 257$ に対しては M_n は合成数である」

と述べています (1664 年)．これも正しくはないのですが，以来メルセンヌ数と呼ばれてるようになりました．メルセンヌはその頃作られていた素数表を見て上のことを確かめたらしいのですが，当時の素数表では $n \leq 19$ 程度しか確かめることはできないはずでした．きちんと証明してはいませんでした．

「M_{31} が素数である」

ことを 1772 年にオイラーが証明しました．フェルマー数 F_5 が合成数であることを示してから 40 年後のことです．

「計算機の無い時代に，オイラーはどうやって $M_{31} = 2147483647$ が素数で
あることを示したのでしょうか？」

フェルマー数のところでも触れたように, M_{31} の約数になりうる数の候補を絞り込み, 上手く割り算を計算してそれらすべてで割り切れないことを確かめたのでした. その後も多くの人の手で計算が行われ,

「1947 年 (!) に, $n < 158$ の範囲のメルセンヌ素数がすべて確定しました. 」

メルセンヌから実に 283 年後のことです. 現在ではオイラーのものよりさらに改良された方法 (メルセンヌ素数判定法, Lucus test) と計算機を使って, 多くの (42 個) メルセンヌ数が素数が得られています. 現在知られている最大の素数は, 42 個目に見つかったメルセンヌ素数 $M_{25964951}$ で 781 万 6230 桁の数です.

「メルセンヌ素数は無数にあるだろう」

と予想されています. 昔からそう予想されているのですが, 現在も多くの研究者はこのことは正しいだろうと思っています.

双子素数

3 と 5, 5 と 7, 11 と 13 のように, 差が 2 の素数の組を **双子素数** と言います. 素数は無数にありますが,

「双子素数が無数にあるのだろうか ? 」

まだ何もわかっていません.

オイラーは, 素数が無数にあることの証明のために,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots \qquad \text{素数の逆数の和}$$

が無限に大きくなる (発散する) ことを示しました. 素数の逆数の和が無限に大きくなるのでその和の項が無数にないといけません. つまり, 素数が無数にあることになります. ブルン (Brun, 1910) は

$$(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{11}+\frac{1}{13})+(\frac{1}{17}+\frac{1}{19})+\cdots \qquad \text{双子素数の逆数の和}$$

を調べました. この和は $1.90216057783278\cdots$ という値に収束してしまい, オイラーのようにはいきませんでした.

完全数・友愛数・社交数

正の整数 n で, 自分自身以外の正の約数の和 ($s(n)$ とおく) がその数自身 n に等しいとき, n を完全数といいます. 6 は完全数です. なぜなら,

6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 なので 6 以外の約数の和は

$s(6) = 1 + 2 + 3 = 6$

従って 6 は完全数である.

28 も完全数です. 496 も 8128 も完全数です.

[**問い**] 28, 496, 8128 が完全数であることを示せ.

「完全数はどの位あるのでしょうか ? 」

わからないことばかりですが, 完全数が無数にあるのかどうかわかっていません. メルセンヌ数の所で, ユークリッドが証明したといいましたが,

[**問い**] M_p がメルセンヌ素数なら $2^{p-1} \times M_p$ が完全数であることを示せ.

オイラーは,

「偶数の完全数はユークリッドの見つけたもの $2^{p-1}\times(2^p-1)$ だけである.」

ことを示しました. メルセンヌ素数は無数にあるだろうと思われていますから,

「偶数の完全数も無数にあるだろう」

と思われています. その一方で奇数の完全数はひとつも見つかっていません.

「奇数の完全数は 10^{300} より大きい」(Brent, Cohen, Te Riele, 1991 年)

ことを示しました.

「奇数の完全数はひつともないだろう.」

と予想されています.

$220=2^2\cdot5\cdot11$ の約数は 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220 なので 220 を超えない約数の和は

$$s(220)=1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

である. $284=2^2\cdot71$ の約数は 1, 2, 4, 71, 142, 284 なので 284 を超えない約数の和は

$$s(284)=1+2+4+71+142=220$$

となる. この様な関係にある 2 数の組を友愛数といいます. 12496 はどうでしょう.

$$s(12496)=14288,\quad s(14288)=15472,\quad s(15472)=14536,$$
$$s(14536)=14264,\quad s(14264)=12496\quad (!)$$

もとに戻ってきました. この様に約数の和を取ることを繰り返してもとに戻ってくる数 (の組) を, 社交数といいます. 友愛数も完全数も社交数です.

[**問い**] 14316 は社交数なのですが, 約数をとることを何度繰り返せば 14316 に戻ってくるのでしょうか？

現在見つかっている社交数は約 140 組ですが, 繰り返しの長さ (周期) は 4, 5, 6, 8, 9, 28 です.

「友愛数は無数にあるのでしょうか？」
「社交数 (完全数でも友愛数でもない社交数) は無数にあるのでしょうか？」
「周期が 3 のものがあるのでしょうか？」
「いくらでも長い周期をもつ社交数があるのでしょうか？」

など, いくらでも予想があるのですが, ほとんど何もわかっていません.

三角数・四角数（平方数）

コインの様な丸いものを三角形の形に並べたときにその個数になる数のことを三角数と言います. 例えば,

1 (1 辺が 1 の三角形), 3 (1 辺が 2 の三角形), 6 (1 辺が 3 の三角形),
10 (1 辺が 4 の三角形), 15 (1 辺が 5 の三角形), 21 (1 辺が 6 の三角形),

などです. コインを並べてみればわかることですが, 例えば 1 辺の長さが 4 から 5 に増えたときコインの列が 1 列 (つまりコイン 5 個分) 増えるので 1 辺の長さが 5 の三角数は $10+5=15$ です. 三角数は

$$1,\quad 1+2=3,\quad 1+2+3=6,\quad 1+2+3+4=10,$$
$$1+2+3+4+5=15,\quad 1+2=3+4+5+6=21,\quad \cdots$$

で計算できます. 三角数を 2 倍すると, 例えば 1 辺の長さが 4 の場合ですと,

$$\begin{aligned}
2 \times 10 &= 10 + 10 \\
&= (1+2+3+4) + (1+2+3+4) \\
&= (1+2+3+4) + (4+3+2+1) \\
&= (1+4) + (2+3) + (3+2) + (4+1) \\
&= 5+5+5+5 \\
&= 4 \times 5
\end{aligned}$$

となります. 最後の 4×5 の 4 が 1 辺の長さ, 5 が 1 辺の長さ足す 1 ですから, 一般に 1 辺の長さが n の三角数の 2 倍は $n \times (n+1)$ になります. 従って,

「1 辺の長さが n の三角数はその半分 $n(n+1)/2$ である.」

1 万以下の正の奇数を小さい順に並べた数の和

$$1+3+5+7+9+\cdots+9999$$

は幾つでしょう ? 答えは 25000000 です. これは 5000^2 になります. 少し計算してみればわかることですが, 小さい順に足していった奇数の和は, どこで止めても平方数になります. 実際,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

です. このことを 2 通りの方法で示しましょう. 最初は, 上の三角数を使って式の計算をします. 求める数 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ は 1 から $2n$ までの和から 2 から $2n$ までの偶数を除けばよい. 取り除く偶数の方はそれぞれ半分にすると 1 から n までの和になるので,

$$(2n \text{ 以下の奇数の和}) = (1 \text{ から } 2n \text{ までの和}) - 2 \times (1 \text{ から } n \text{ までの和})$$

となります. 右辺の最初の項は 1 辺が $2n$ の三角数で, 2 つ目の項は 1 辺が n の三角数なので, それぞれ $2n(2n+1)/2$ と $n(n+1)/2$ です. 従って

$$\begin{aligned}
1+3+5+\cdots+(2n-1) &= 2n(2n+1)/2 - 2 \times n(n+1)/2 \\
&= n(2n-1) - n(n+1) \\
&= n(2n+1-n-1) \\
&= n^2
\end{aligned}$$

2 つ目の証明はもっと直観的なものです. コインを四角形に並べたときの個数を四角数と言います. 形からすぐにわかることですが, 1 辺の長さが n からその個数 (四角数) は n^2 になります. 1 辺の長さが 1 の四角形は 1 個のコインからなります. そのコインの右と下に 1 個ずつ. 更に右下に 1 個付け加えると, 1 辺の長さが 2 に四角数になります. 付け加えたコインは 3 個だったので, 1 辺の長さが 2 の四角数は $1+3$ に一致します. さらに辺の長さを 1 増やすには, 右に 2 個, 下に 2 個, 右下に 1 個の合計 5 個付け加えなければなりません. $1+3+5$ が 1 辺の長さが 3 の四角数になります. $\cdots$

こうして奇数の和が四角数になるので, 奇数の和は平方数になる.

ここでクイズを出します.

「A 君はコインを沢山持っていました. そのコインを全部使って三角形に並べることができました. また, 四角形にも並べることができました. A 君はコインを何個持っていたのでしょう? 」

計算機の得意な人なら, 1, 36, 1225, 41616, $\cdots$ と答えを見つけることができるでしょう. そうです. この問題の答えは 1 つではありません.

「答えが 1 つに決まらないような物は数学の問題として不適である.」

と叱られそうですが, そうではありません. 例えば

[問い]　三角数でもあり, 四角数でもある数を見つけよ.

のように問題を捉えなおすと,

[問い]　三角数でもあり, 四角数でもある数はどのくらいあるか ?
三角数でもあり, 四角数でもある数をすべて求めよ ?

この様に考える. これが数学なのです.

ピタゴラス数

辺の長さが 3, 4, 5 の三角形は, $3^2 + 4^2 = 5^2$ となるのでピタゴラスの定理 (三平方の定理) から 5 を斜辺とする直角三角形になります. このように直角三角形の 3 辺となる数の組をピタゴラス数と言います. a, b, c $(a \leq b \leq c)$ がピタゴラス数であるための必要十分条件は, $a^2 + b^2 = c^2$ となることです.

「ピタゴラス数はどのくらいあるのでしょうか? 」

奇数 n に対して, $(n, \bigcirc, \bigcirc)$ というピタゴラス数があることを示しましょう. n は奇数なので n^2 も奇数です. $k = (n^2 - 1)/2$ とおくと k は整数で $n^2 = 2k + 1$ となります. 先ほどの四角数のところで見たように, 1 辺が k の四角形の右に k 個, 下に k 個, 右下に 1 個コイン (合計 $2k + 1$ 個) を足すと 1 辺が $k + 1$ の四角形になります. $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ ということです. 何ということはない因数分解の公式のことです. ここで $2k + 1 = n^2$ でしたから, $k^2 + n^2 = (k + 1)^2$ となります. 従って $(n, k, k + 1)$ はピタゴラス数になります. (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), $\cdots$ と幾らでもピタゴラス数を見つけることができました.

[問い]　これで全部なのでしょうか ?
すべてのピタゴラス数を求めてください.

合同数

3 辺が有理数の直角三角形の面積となる自然数を合同数と言います. ピタゴラス数 (3, 4, 5) から決まる直角三角形の面積は $3 \times 4 \div 2 = 6$ なので 6 は合同数です. 1, 2 は合同数でないことはフェルマーが証明しました. 3, 4 も合同数でないのですが, 5 は合同数です.

「合同数をすべて求めよ. 」

というのが合同数の問題です. ピタゴラス数は沢山ありますから, 合同数はどんどん決まっていきそうに見えまが, これが結構難しいのです. 数学の理論的な立場から言うなら,

「フェルマーの定理が解けても合同数の問題はまだまだ難しい. 」

——— · ——— · ——— · ——— · ———

整数論にはこれらの様に一見して単純なわかり易い問題が沢山あります. それぞれとても楽しく簡単そうに見えますが, 中には多くの数学者達の挑戦を退けてきた強わ者もるのです. 「問い」と書いたものは皆さんでも頑張れば解く事ができるかもしれません. 興味のある人は, ぜひ挑戦してみては···.