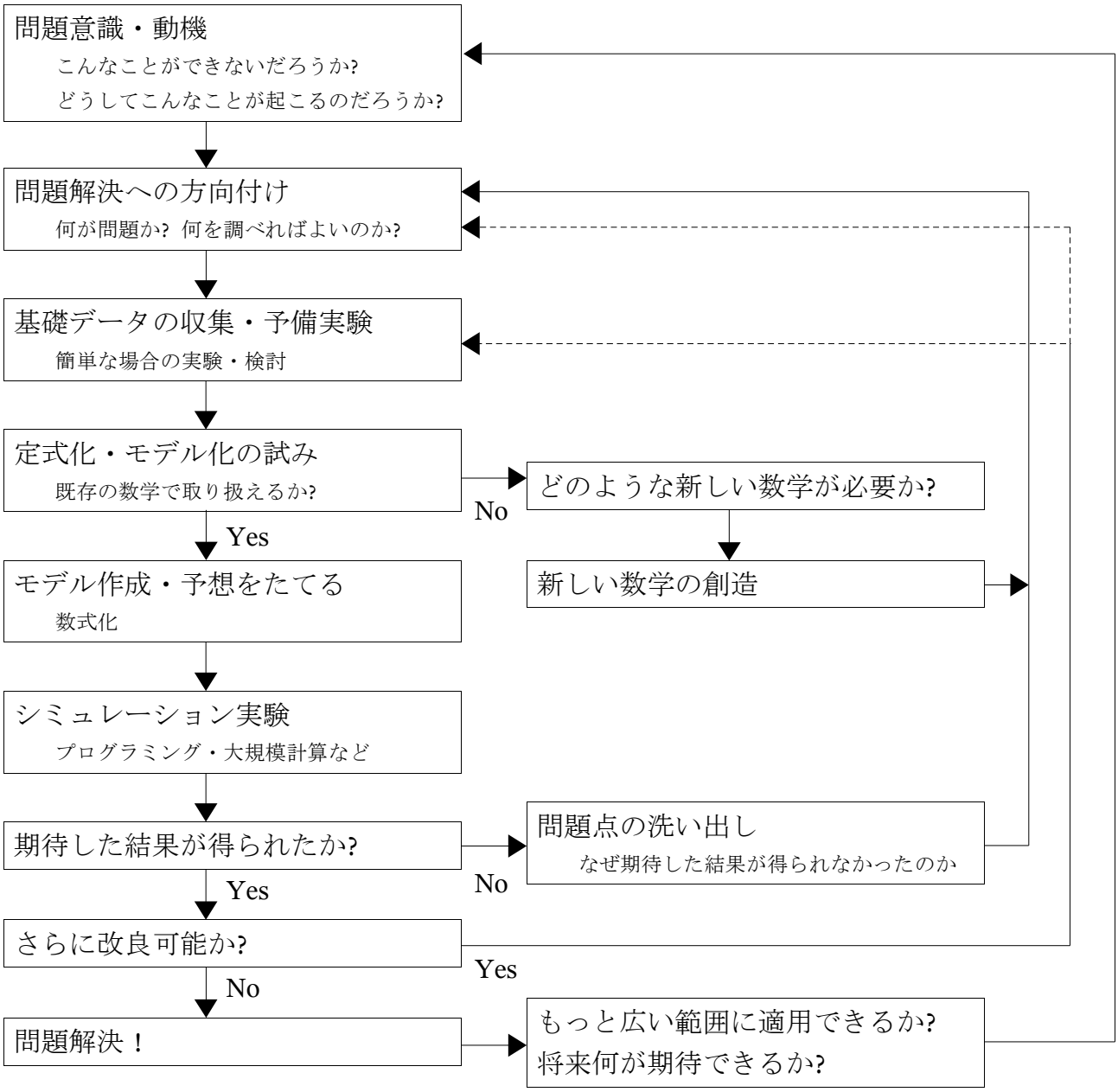
実験数学 Exprimental Mathematics

小川裕之（大阪大学大学院理学研究科）

近年の高度に発達した計算機の利用により、純理論的と思われがちな数学の世界も、実験数学という新しい研究・教育手法が確立されつつあります。大阪大学では、早くから実験数学を教育に取り入れています。本講演では、実験数学の考え方について説明し、大学での教育・研究活動についてお話します。また、高校生として皆さんに身に着けておいていただきたい事についてもお話したいと思います。

実験数学とは、「多くの実験により、新しい知見を得ること」（山本芳彦著「実験数学入門」）です。ただ漠然と実験するのではなく、ある種の期待を持って、予想をしながら実験を行うことが重要です。以下に、実際にどのような手続きで研究を進めるのか、流れ図風にまとめてみました。数学だけでなく、より一般の事象に対する考え方の一助になればと思います。

実験数学の考え方・研究の進め方のフローチャート



では、具体的に数学を題材に取ってお話しましょう。

```
1/ 2 = 0.5
1/ 3 = 0.333333333333333333333333333333333
1/ 4 = 0.25
1/ 5 = 0.2
1/ 6 = 0.166666666666666666666666666666666
1/ 7 = 0.142857142857142857142857142857142857
1/ 8 = 0.125
1/ 9 = 0.111111111111111111111111111111111
1/10 = 0.1
1/11 = 0.090909090909090909090909090909090909
1/12 = 0.833333333333333333333333333333333333
1/13 = 0.076923076923076923076923076923076923
1/14 = 0.071428571428571428571428571428571428
1/15 = 0.066666666666666666666666666666666666
1/16 = 0.0625
1/17 = 0.058823529411764705882352941176470588
1/18 = 0.055555555555555555555555555555555555
1/19 = 0.052631578947368421052631578947368421
1/20 = 0.05
```

整数の逆数を小数に展開してみました。割り切れるものも割り切れないものもあります。割り切れないものについては、これらの小数は途中からある数字の列の繰り返しになっているようです。

《問 1 》　割り切れるのは、どのような場合でしょうか?

《問 2 》　割り切れない場合、なぜ、同じ数字の列が繰り返されるのでしょうか?

次に、繰り返される数字の並びに注目してみましょう。1/3，1/6，1/9，1/12，1/15，1/18 は途中からあるひとつの数が繰り返されています。それぞれ 3，6，1，3，6，5 です。

《問 3 》　このような分数は、他にもあるのでしょうか?
もしあるなら、それらの特徴を調べてみましょう。

《問 4 》　繰り返される数は、1，3，5，6 以外のものになる場合もあるのでしょうか?

先ほどの 1/3 と 1/12 もそうですが、繰り返しが同じ数の列になる分数の組があります。1/6 と 1/15 もそうなっていますが、1/7 と 1/14 も同じ数の列 142857 が繰り返されています。

《問 5 》　このような分数の組は、他にもあるのでしょうか?
もしあるなら、それらの特徴を調べてみましょう。

《問 6 》　1/13 は 076923 という 6 つの数の列が繰り返されています。
これと同じ数の列が繰り返される分数を見つけたいのですが、
どのような分数を計算してみればよいでしょうか?

1/7 は 6 つの数の列、1/11 は 2 つの数の列、1/13 は 6 つの数の列、1/17 は 16 個の数の列、1/19 は 18 個の数の列が繰り返されています。繰り返される数の長さはどういう特徴があるのでしょうか?

《問 7 》　整数 N について、その逆数 1/N を小数展開したときの繰り返し部分の
長さを求め、表にせよ。

《問 8 》　繰り返し部分の長さは、どのようにして決まるのでしょうか?

問 7 の表を作ってみましょう。

N	1/N	繰り返し部分	長さ
3	1/ 3 = 0.3333333333333333333333	3	1
6	1/ 6 = 0.1666666666666666666666	6	1
7	1/ 7 = 0.1428571428571428571428 5	142857	6
9	1/ 9 = 0.1111111111111111111111	1	1
11	1/11 = 0.0909090909090909090909 0	09	2
12	1/12 = 0.8333333333333333333333	3	1
13	1/13 = 0.0769230769230769230769 2	769230	6
14	1/14 = 0.0714285714285714285714 2	714285	6
15	1/15 = 0.0666666666666666666666	6	1
17	1/17 = 0.0588235294117647058823 5	0588235294117647	16
18	1/18 = 0.0555555555555555555555	5	1
19	1/19 = 0.0526315789473684210526 3	052631578947368421	18

問 8 に答えるには、このぐらいの量の観察ではなかなか見えてきません。少し計算して見ましょう。

X = 1/N

とおきます。X を小数に展開すると、繰り返し部分が小数第 r 位から始まり、その長さが d であったとします。つまり、

X = 1/N = 0.****** ########### ########### ########### ###########

↑ ↑ ↑ ↑

小数第 r 位　d 個の数の列が繰り返される

小数を 10 倍すると、数の並びが左に 1 つずつずれるので、$10^{r-1} \times X$ は小数点以下が d 個の数の列の繰り返しになります。$10^{r+d-1} \times X$ も小数点以下が同じ数の並びになっていることがわかります。

$10^{r+d-1} \times X - 10^{r-1} \times X$

は整数になります。X = 1/N でしたから、$10^{r-1} \times (10^d - 1)/N$ は 整数です。

$10^{r-1} \times (10^d - 1)$ は N で割り切れます。

実際、与えられた整数 N に対して、$10^{r-1} \times (10^d - 1)$ が N で割り切れる最小の正の整数 r, d をとると、X = 1/N の繰り返し部分の長さが d になるのです。これが問 8 の答えです。

さて、問 7 で作った表を眺めると、繰り返し部分の長さが比較的長いのは、7, 13, 14, 17, 19 です。14 を除くと素数になっています。もう少し表の範囲を広げるともっとよく観察できると思います。

《問 9 》　N が素数の場合に限定して、問 7 の表をもっと広げてみましょう。

《問 10》　問 9 の表で、繰り返し部分の長さは N − 1 を割り切る…はずですが…。

(参考)　Fermat の小定理　『p を素数、a を p で割り切れない整数とする。このとき、$a^{p-1} - 1$ は p で割り切れる。』

《問 11》　問 9 の表で、繰り返し部分の長さがちょうど N − 1 の素数 N はたくさん現れるか?

実は、問 11 の答えはまだわかっていません。より一般的な次の形で予想があるのですが、未だに解かれていません。

《予想》　a を平方数でない正の整数とする。このとき、 素数 p で $a^f - 1$ が p で割り切れる最小の正の整数 f が p − 1 となるものが、無数に多く存在するであろう。

(問 11 はこの予想で a = 10 の場合です。)