Congruence Conditional Prime Distributions

大阪大学大学院・理学研究科　小川 裕之
Hiroyuki Ogawa
Department of Mathematics, Osaka University

§1. 序論

素数の列 2, 3, 5, 7, 11, $\cdots$ を 4 を法として眺めると 2, 3, 1, 3, 3, $\cdots$ と最初の 2 を除いて既約剰余類の 1 と 3 が並びます. Dirichlet の素数定理 (どの既約剰余類にも同じ割合で素数が分布する) より, 1 と 3 が同じ割合で現れます. 素数定理の誤差評価により均一さの評価もできます. 1 をコインの表に 3 をコインの裏に, 素数の列をコイン投げに見立てることができるでしょうか. 6 を法として既約剰余類 1 を表に 5 を裏に見立てるのはいかがでしょう. あるいは 7 を法にとると, 既約剰余類は 1, 2, 3, 4, 5, 6 で賽の目のよう. 素数の列を賽の目に見立てることができるでしょうか. 素数の合同分布に対するある種の乱数性検定のはなしです. 現在の目に対して次に現れる目の分布 (合同条件付き素数分布) に一様性は成り立つでしょうか. 筆者は, Hardy-Littlewood の予想を使って, 合同条件付き素数分布の実験値を非常によく近似する確率モデルを与えました ([10]). 確率モデルが合同条件つき素数分布をよく近似しているなら, そのモデルに対する大数の法則 (十分大きい素数に対する分布の漸近挙動) から, 合同条件付き素数分布は漸近的には一様であることがわかりました. ともかく結果を得たところで, 素数の列の代数体への拡張を考え, 合同条件付き素元分布を調べることを思い立ちました. 2 匹目のドジョウはいるのでしょうか.

通常の素数の列 2, 3, 5, 7, 11, $\cdots$ は, 大きさの順に次の素数, 次の素数とたどって並べたものです. 次の素数を指定する仕組みを代数体の素元あるいは素イデアルへ拡張できるでしょうか. 相対極小 (relative minima) を考えるのがスジですが, 近似が強く, 出会う数, 出会う素元が余りに少ない. 計算実験により分布の様子が観察可能なほどの素元の個数が確保でき, 合同条件など他の平易な情報で記述できない系列を与えるのが理想です. §2 で理想をある程度満足しうる「次の素数を指定する手続き」を類数 1 の 2 次体の整数環上で定義し, §3 で数値計算実験をお見せします. 2013 年秋の解析的整数論の研究集会で紹介したもの (有理素数の列に対する合同条件付き素数分布) に比べると, 計算した素元 (素数) の個数に約 2000 倍の差があり (前回は約 2×10^8 個, 今回は 10^5 個), 目に見える形で分布を描くことはできませんでした. 今回の素元の列に関しても前回と同様の傾向が観察されたので, 少しは面白いのではないでしょうか.

§2. 類数 1 の 2 次体上の Next Prime 関数

自然数 n に対して, n より大きい最小の素数を n の次の素数 (<u>n</u>ext <u>p</u>rime) といい, $\mathrm{np}(n)$

で表す．素数の列 2, 3, 5, 7, 11, $\cdots$ は, 次の素数関数 $\mathrm{np}(\bullet)$ の反復繰り返し $\{\mathrm{np}^r(1)\}_r$ で与えられる．自然数 n の次の素数 $\mathrm{np}(n)$ は, n に 1 ずつ足していった自然数の列 $n+1$, $n+2$, $n+3$, $\cdots$ の中で最初に出会う素数です．代数体の整数環で類似手続きを考えるなら, 自然数の列 $n+1$, $n+2$, $n+3$, $\cdots$ の様な代数的整数の列で, その列の上に十分に多くの素元がのっているものを与え, 列の上で最初に出会う素元を次の素元と呼べばいい．この手続きを実現するには, 類数 1 の代数体の整数環を選ぶのが妥当で, 計算量の観点から 2 次体から始めるべきでしょう．

K を類数 1 の実または虚の 2 次体, $\mathcal{O}_K$ をその整数環とする．K の無限素点に関する完備化 K_∞ は, K が実か虚かに応じて $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ で, いずれにせよ 2 次元実線形空間である．K_∞ において, K は稠密で, $\mathcal{O}_K$ は格子をなす．$\mathbb{Z}$ の場合に 1 ずつ足していったことを格子 $\mathcal{O}_K$ で実現するためには, 一歩の歩幅と向かう方向を指定しなければならない．歩幅は $\mathbb{Z}$-基底に選べばよいだろう．埋め込み $\mathcal{O}_K\subset K\subset K_\infty\simeq\mathbb{R}^2$ で自然に方向が定まるのだが, これとは異なるもので, 代数的な意味をもち計算も易しいものを導入する．

2.1. 代数的極座標と降下 Kummer 理論

K/k を 2 次拡大体とする．$\omega\in K\smallsetminus k$ をとり, ω' をその共役とする．次の一次分数変換を考える．

$$h:\mathbb{P}^1\ni x\longmapsto\frac{x-\omega}{x-\omega'}\in\mathbb{P}^1$$

乗法群 $\mathbb{G}_m$ を $\mathbb{G}_m=\mathbb{P}^1\smallsetminus\{0,\infty\}\subset\mathbb{P}^1$ と見て, $A^\times_{K/k}=h^{-1}(\mathbb{G}_m)$ とおく．$a, b\in A^\times_{K/k}$ に対して

$$a\otimes b=h^{-1}(h(a)\,h(b))=\frac{a\,b-\omega\,\omega'}{a+b-(\omega+\omega')}$$

とおく．$\omega+\omega'$, $\omega\omega'\in k$ なので, $(A^\times_{K/k},\otimes)$ は ∞ を単位元とする k-代数群である．$A^\times_{K/k}$ は ω に依るが, ω を取り替えても k-同型なので ω に依らない表記にした．有理部分群 $A^\times_{K/k}(k)$ は集合として $\mathbb{P}^1(k)$ に等しく, 群として $\ker(N_{K/k}{:}K^\times\to k^\times)/\{\pm1\}$ に同型である．複素数における極座標

$$\begin{array}{ccccl}\mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\times S^1 & \qquad & \mathbb{R}_+=(0,\infty)\\ z & \longmapsto & (|z|,\,z/\overline{z}) & \qquad & S^1=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|=1\}\end{array}$$

によく似た群準同型

$$\begin{array}{ccc}K^\times & \longrightarrow & k^\times\times A^\times_{K/k}(k)\\ \xi & \longmapsto & (N_{K/k}(\xi),\,h^{-1}(\xi/\xi'))\end{array}$$

を定義できる．代数的極座標と呼ぶ．全射でも単射でもないので座標と呼ぶのは不適切かもしれないが, 核は $\{\pm1\}$ なので座標の様に扱える．複素数の偏角にあたるのが $A^\times_{K/k}(k)$-成分である．

簡単のため m を奇数とする．ζ_m を 1 の原始 m 乗根とし, $\zeta+\overline{\zeta_m}\in k$, $K=k(\zeta_m)$ とする．このとき Hilbert Theorem 90 の類似が成り立つ．

定理 2.1. (Komatsu [6], O. [9]) $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k),\,A^\times_{K/k}(\overline{k}))[m]=\{1\}$

系 2.2. (実 Kummer 理論) $A^\times(k)/A^\times(k)^{[m]}\simeq H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k),\,A^\times_{K/k}[m])$

$A_{K/k}^{\times}$ の m-倍写像の核 $A_{K/k}^{\times}[m]$ は m 次巡回群なので, 基礎体が ζ_m を含まなくても $\zeta_m + \overline{\zeta_m}$ を含めば Kummer 理論が適用できる. 実 Kummer 理論もしくは 2 次降下 Kummer 理論と言う. 基礎体の次数を 2 次降下させたに過ぎないが, 木田雅成氏はトーラス群を利用して更に小さい基礎体上での Kummer 理論 (高次降下 Kummer 理論) を得ている ([5]).

2.2. Walk on K

K を 2 次体, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ を整数環とする. 代数的極座標を使って, $K^{\times}$ の元に偏角を定義する.

$$h : \mathbb{P}^1 \ni x \longmapsto \frac{x+\omega}{x+\omega'} \in \mathbb{P}^1 \qquad (\omega' \text{ は } \omega \text{ の共役})$$

とする. $A_K^{\times} = h^{-1}(\mathbb{G}_m)$ は $\mathbb{Q}$-代数群で, 有理部分群 $A_K^{\times}(\mathbb{Q})$ は集合として $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ に等しい. 代数群由来であることを強調する必要はないので, $A_K^{\times}(\mathbb{Q})$ でなく $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ で話を進める. 代数的極座標 $K^{\times} \to \mathbb{Q}^{\times} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ において, 偏角は $h^{-1}(\xi/\xi') \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ $(\xi \in K^{\times})$ で与えられる. これを $\arg_K(\xi)$ と書く. $\xi = a + b\omega \in K^{\times}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ に対して, $\arg_K(\xi) = h^{-1}(\xi/\xi') = a/b \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ である. 偏角 $\arg_K$ は基底 $1, \omega$ に関する係数の比を取っただけのことで, 代数的極座標や降下 Kummer 理論を持ち出すまでもなく, ごく自然に思いつく. 面倒な理屈を持ち出したのは, 偏角と言うにふさわしい姿をしていることを代数的に描き出したからである. 更に, 偏角を比較するために偏角を捉える空間を明確にしたかったからである.

2 次体 K 上に偏角 $\arg_K$ を定義した. 次の目標は, 予め指定した向きに対してそちらに向かって進んで行く数の列を生成することである. 数の列が進むに従い, 偏角の分母, 分子は大きくなるので, 数の列の進む向きは, 偏角の属する集合 $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ のアルキメデス的付値に関する閉包 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ の中で考えるのが適当であろう. $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ において, 向き $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ と数 $\xi(\in K)$ の偏角 $\arg_K(\xi)$ の向きの差は, 正接関数の加法公式と単調性により定量的に測ることができる.

$$\mathrm{d}_K(\xi;\, \gamma) = \left| \frac{\gamma - \arg_K(\xi)}{1 + \gamma \arg_K(\xi)} \right|$$

の値が小さいほど, 向きが γ に近いと定める.

歩幅を基底 $1, \omega$ とする. 向き $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ に対して, $\xi = a + b\omega \in K$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ の次の数は $\xi + 1$ か $\xi + \omega$ で向きが γ に近い方になる. $\arg_K(\xi+1) = \dfrac{a+1}{b}$, $\arg_K(\xi+\omega) = \dfrac{a}{b+1}$ なので, $\arg_K(\xi+1) = \arg_K(\xi+\omega)$ となるための必要十分条件は $a + b + 1 = 0$ である. $\delta(\xi) = a + b$ とおく. $\delta(\xi+1) = \delta(\xi+\omega) = \delta(\xi) + 1$ なので, 歩みを進めるに従って δ の値が大きくなる. 歩みによりいずれ原点から離れて δ の値が大きくなるので, δ の値が非負の領域で考えれば十分である. 歩幅 $1, \omega$ で向かう向きは非負なので, 向きは $\gamma \geq 0$ ($\gamma = \infty$ を含む) とすべきである. $\xi \in K$ $(\delta(\xi) \geq 0)$, $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $(\gamma > 0)$ に対して, ξ の γ 方向の次の一歩 $\mathrm{ns}_\gamma(\xi)$ ($\underline{\text{n}}$ext $\underline{\text{s}}$tep) を次で定義する.

$$\mathrm{ns}_\gamma(\xi) = \begin{cases} \xi + 1 & (\text{ if } \mathrm{d}_K(\xi+1;\, \gamma) < \mathrm{d}_K(\xi+\omega;\, \gamma) \text{ }) \\ \xi + \omega & (\text{ if } \mathrm{d}_K(\xi+1;\, \gamma) > \mathrm{d}_K(\xi+\omega;\, \gamma) \text{ }) \end{cases}$$

この定義では, $\xi + 1$ と $\xi + \omega$ が γ に対して等角 $\mathrm{d}_K(\xi+1;\, \gamma) = \mathrm{d}_K(\xi+\omega;\, \gamma)$ になる場合 (等角条件と呼ぶ) が記述されていない. 等角条件を満たすとき, $\xi + 1$ と $\xi + \omega$ のどちらを選ぶべきか正当な理由が見当たらないのだが, $\mathrm{ns}_\gamma(\xi) = \{\xi + 1, \xi + \omega\}$ と定義し, 更にその

次の一歩を $\mathrm{ns}_\gamma(\mathrm{ns}_\gamma(\xi)) = \mathrm{ns}_\gamma(\{\xi+1,\, \xi+\omega\}) = \xi+1+\omega$ と定義しよう. このように定める理由を明確にするため, 等角条件を満たす ξ, γ について少し検討する. 等角条件は方程式

$$\gamma^2 - \frac{2(a-b)(1+a+b)}{1+a+b+2ab}\gamma - 1 = 0 \quad (\xi = a + b\omega \in K,\, a,\, b \in \mathbb{Q}) \tag{$\natural$}$$

で記述される. γ の 2 次方程式とみると, 正の実根をひとつ持つ. ξ に対して等角条件が満たす正の向き γ が唯一つあるわけで, 直感と一致する. γ を固定すると, ($\natural$) は a, b に関する平面 2 次曲線の方程式で, この曲線上の有理点 (a, b) が等角条件を満たす $\xi = a+b\omega$ に対応する. $\gamma = 1$ のとき, ($\natural$) は 2 直線の和 $(a-b)(a+b+1) = 0$ である. $\gamma \neq 1$ のとき, ($\natural$) は 2 点 $(a, b) = (-1, 0), (0, -1)$ を通る双曲線である. $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ のとき, ($\natural$) は有理点をもつ有理双曲線なので無数に多くの有理点をもつ. γ が有理数でなくても, 有理点 $(0, -1)$ を使って双曲線 ($\natural$) 上の有理点を計算できる. 実際, 他に有理点があれば次で表される.

$$\left(\frac{(k+1)(k\gamma^2+2\gamma-k)}{-k\gamma^2+2k^2\gamma-2\gamma+k},\, \frac{k\gamma^2+2k\gamma+2\gamma-k}{-k\gamma^2+2k^2\gamma-2\gamma+k}\right) \quad (k \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})) \tag{$\natural\natural$}$$

座標式 ($\natural\natural$) を眺めて, 有理点を与える $k \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ を探すのは面倒である. 双曲線の方程式 ($\natural$) から γ の項を括りだすと, $\dfrac{2(a-b)(1+a+b)}{1+a+b+2ab} = \dfrac{\gamma^2-1}{\gamma}$ となる, ($\natural$) を満たす有理点 (a, b) が存在するためには, 右辺 $\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma}$ が有理数でなければならない. 従って, 等角条件を満たす $\xi \in K$ が存在するならば, γ は有理数 ($\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$) であるか, ノルムが -1 の実 2 次無理数でなければならない.

命題 2.3. (1) 任意の $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ ($\gamma \geq 0$) に対して, 等角条件を満たす $\xi \in K$ ($\delta(\xi) \geq 0$) が存在する. 無理数 $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ($\gamma \geq 0$) において等角条件を満たす $\xi \in K$ ($\delta(\xi) \geq 0$) が存在するためには, γ がノルム -1 の正の実 2 次無理数であることが必要かつ十分である.
(2) $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ($\gamma \geq 0$), $\xi \in K$ ($\delta(\xi) \geq 0$) において等角条件が満たされるとする. このとき $\mathrm{ns}_\gamma(\xi+1) = \mathrm{ns}_\gamma(\xi+\omega) = \xi+1+\omega$ が成り立つ. 特に $\gamma \neq 1$ ならば, $\xi+1+\omega$ に対して, 等角条件が満たされることなく ns_γ を何度でも繰り返し作用させることができる.
(3) $\gamma = 1$ とし, $\xi \in K$ ($\delta(\xi) \geq 0$) で等角条件が満たされるとする. このとき, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $(\mathrm{ns}_1)^{2j}(\xi)$ $(= \xi + j\,(1+\omega))$ で等角条件が満たされる.

命題 2.3 (2) より, 等角条件を満たす γ, ξ に対して次の一歩は $\xi+1$ と $\xi+\omega$ のどちらか一方に決める理由がない. どちらを選んでもその次の一歩は $\xi+1+\omega$ になる. そこで $\mathrm{ns}_\gamma(\xi) = \{\xi+1,\, \xi+\omega\}$, $\mathrm{ns}_\gamma(\mathrm{ns}_\gamma(\xi)) = \mathrm{ns}_\gamma(\{\xi+1,\, \xi+\omega\}) = \xi+1+\omega$ と定義したのである.

向き $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ($\gamma \geq 0$) をとる. $\xi \in K$ ($\delta(\xi) \geq 0$) に対して, γ 方向の次の一歩 ns_γ を繰り返して得られる数の列 $\{(\mathrm{ns}_\gamma)^j(\xi)\}_{j\geq 0}$ を walk on K toward γ in step $\{1, \omega\}$, あるいは単に γ-walk と呼ぶ. 命題 2.3 (2) より $\gamma \neq 1$ のとき, γ-walk において等角条件が満たされるのは高々一度なので, $\{\bullet+1,\, \bullet+\omega\}$ の形のものせいぜい一度しか現れない. 一方 1-walk ($\gamma = 1$) では, 命題 2.3 (3) より, ひとたび等角条件が満たされれば 1 つおきにいつまでも等角条件が満たされる.

2.3. Next Prime

K を類数 1 の 2 次体, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ をその整数環, $\arg_K$ を 2.2 節で与えた偏角とする. $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ($\gamma \geq 0$) とする. $\xi \in \mathcal{O}_K$ ($\delta(\xi) \geq 0$) を出発点とする γ-walk (walk on K toward

γ in step $\{1,\,\omega\}$) をとる．このとき γ-walk は整数の列で $\mathcal{O}_K$ に含まれる．γ-walk において, ξ の後で最初に現れる素元を next prime of ξ toward γ in step $\{1,\,\omega\}$ と呼び, $\mathrm{np}_\gamma(\xi)$ と書く．γ-walk および next prime の感覚をつかむために, 計算例を与える．

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $\omega=\sqrt{-1}$ とする．$\xi=a+b\sqrt{-1}\in K^\times$ $(a,\,b\in\mathbb{Q})$ に対して $\arg_K(\xi)=a/b\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ である．0 $(\in\mathcal{O}_K)$ を出発点とする $\sqrt{2}$-walk の最初の 35 項は

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & \underline{1+\sqrt{-1}} & \underline{2+\sqrt{-1}} & 2+2\sqrt{-1} & \underline{3+2\sqrt{-1}} \\
4+2\sqrt{-1} & 4+3\sqrt{-1} & 5+3\sqrt{-1} & \underline{5+4\sqrt{-1}} & 6+4\sqrt{-1} & \underline{6+5\sqrt{-1}} \\
7+5\sqrt{-1} & \underline{8+5\sqrt{-1}} & 8+6\sqrt{-1} & 9+6\sqrt{-1} & 9+7\sqrt{-1} & \underline{10+7\sqrt{-1}} \\
11+7\sqrt{-1} & 11+8\sqrt{-1} & 12+8\sqrt{-1} & 12+9\sqrt{-1} & 13+9\sqrt{-1} & \underline{13+10\sqrt{-1}} \\
14+10\sqrt{-1} & 15+10\sqrt{-1} & 15+11\sqrt{-1} & 16+11\sqrt{-1} & 16+12\sqrt{-1} & \underline{17+12\sqrt{-1}} \\
18+12\sqrt{-1} & 18+13\sqrt{-1} & 19+13\sqrt{-1} & \underline{19+14\sqrt{-1}} & 20+14\sqrt{-1} & \cdots\cdots
\end{array}$$

で, 素元に下線を引いた．向きを少し変えて $\sqrt{3}$-walk は

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & \underline{1+\sqrt{-1}} & \underline{2+\sqrt{-1}} & 3+\sqrt{-1} & \underline{3+2\sqrt{-1}} \\
4+2\sqrt{-1} & 4+3\sqrt{-1} & 5+3\sqrt{-1} & 6+3\sqrt{-1} & 6+4\sqrt{-1} & 7+4\sqrt{-1} \\
8+4\sqrt{-1} & \underline{8+5\sqrt{-1}} & 9+5\sqrt{-1} & 10+5\sqrt{-1} & 10+6\sqrt{-1} & \underline{11+6\sqrt{-1}} \\
11+7\sqrt{-1} & \underline{12+7\sqrt{-1}} & 13+7\sqrt{-1} & \underline{13+8\sqrt{-1}} & 14+8\sqrt{-1} & 15+8\sqrt{-1} \\
15+9\sqrt{-1} & \underline{16+9\sqrt{-1}} & 16+10\sqrt{-1} & \underline{17+10\sqrt{-1}} & 18+10\sqrt{-1} & 18+11\sqrt{-1} \\
19+11\sqrt{-1} & \underline{20+11\sqrt{-1}} & 20+12\sqrt{-1} & 21+12\sqrt{-1} & 22+12\sqrt{-1} & \cdots\cdots
\end{array}$$

となる．

2 次体 K や ω を変えると γ-walk はどのように変わるであろうか．歩幅を定める整数基 $\{1,\,\omega\}$ の ω と, 偏角 $\arg_K$ を定める ω を同じにとったので, γ-walk は本質的に 2 次体 K にも ω の取り方に依らない．どの $K=\mathbb{Q}(\omega)$, $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\omega]$ に対しても $\sqrt{2}$-walk は 0, 1, $1+\omega$, $2+\omega$, $3+3\omega$, $3+2\omega$, $4+2\omega$, $4+3\omega$, $5+3\omega$, $5+4\omega$, $\cdots$ で, $\sqrt{3}$-walk は 0, 1, $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, $3+2\omega$, $4+2\omega$, $4+3\omega$, $5+3\omega$, $6+3\omega$, $\cdots$ である．実は, 次の一歩や γ-walk の定義において ω を K の整数に取らなくてもよい．$\omega\in K\smallsetminus\mathbb{Q}$ で偏角などが与え, 歩幅 $\{1,\,\omega\}$ の γ-walk を定義できる．ω が整数であるかどうかに関わらず, γ-walk の計算手続きも, ω を使った表記も全く同じになる．

整数でない ω に対しては, γ-walk は整数環上を歩むわけではないし, 歩む数に対応する整環が整数環になるわけでもない．次の素元 np_γ を次に現れる素元と定めても意味をなさない．選んでいく素元に当たるものを, ω に合わせなければならない．$\omega\in K\smallsetminus\mathbb{Q}$ とし, $\Lambda_\omega=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega$ とおく．Λ_ω は K 内の格子をなす．$\mathcal{O}_\omega=\{\xi\in K\,|\,\xi\Lambda_\omega\subset\Lambda_\omega\}$ を格子 Λ_ω の整環と呼ぶ．$\xi\in\Lambda_\omega$ について $(\Lambda_\omega:\xi\mathcal{O}_\omega)=\{\zeta\in K\,|\,\zeta\Lambda_\omega\subset\xi\mathcal{O}_\omega\}$ が $\mathcal{O}_\omega$ の proper 素イデアルのとき, ξ を ω-prime と呼ぶことにする．$\mathcal{O}_\omega=\mathbb{Z}[\omega]$ のとき, $\Lambda_\omega=\mathcal{O}_\omega=\mathcal{O}_K$ で, ω-prime は $\mathcal{O}_K$ の (K の) 素元に他ならない．γ-walk 上で ω-prime を辿ることで np_γ (next prime) を定義することができる．

代数的極座標で定まる偏角 $\arg_K(\xi)$ は固定された原点から見た絶対的な向きで, 一歩ごとに到達した所から見た相対的な向きではない．歩幅を固定しているので, 相対的な向きで考えたのでは常に同じ歩幅で歩み続けることになってしまう．ただ $\gamma=0,\,\infty$ は特別で,

0-walk, ∞-walk はそれぞれ常に同一方向に歩む. $\gamma \neq 0, \infty$ のとき, γ-walk は, 原点から延びる γ 方向の ray (γ-ray と呼ぶ) にまとわりつく様に歩む. 出発点から, γ-ray に向かって一目散に進み, そして γ-ray に絡みつく. γ が有理数のときは, γ-ray 上に格子点 ($\mathcal{O}_K$ の元) が等間隔に並ぶので, γ-walk はある種の周期をもち一般項を容易に書き表せる. 出発点の違いは γ-ray に絡みつくまでの最初の数項の歩みが異なるだけなので, γ-walk の定義で出発点を明記しなかった.

命題 2.4. (1) $\xi = a+b\omega$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ とする. ξ を出発点とする 0-walk は $\{a+(b+j)\omega\}_{j\geq 0}$ で, ∞-walk は $\{(a+j)+b\omega\}_{j\geq 0}$ である.
(2) 0 を出発点とする 1-walk は, 第 $2j$ 項 $(j \geq 0)$ が $(1+\omega)\,j$ で, 第 $2j+1$ 項 $(j \geq 0)$ が $\{(1+\omega)\,j+1, (1+\omega)\,j+\omega\}$ で表される.
(3) $0 < \gamma < 1$ とする. $\xi_1, \xi_2 \in K$ が $\xi_1 - \xi_2 \in \mathcal{O}_K$ を満たすとき, $(\mathrm{ns}_\gamma)^m(\xi_1) = (\mathrm{ns}_\gamma)^n(\xi_2)$ となる $m, n \in \mathbb{N}$ が存在する.

原点から延びる ray でなくても, 何らかの曲線を考え, それにまとわりつく数の列を取れば複雑なものが得られるであろう. 有理数でない γ に対する γ-ray だけても, 十分に多様な列が現れる. 2 次体や整数基を固定しても, 向きを変えればいろいろな数の列, 素元の列が現れる. 次の素元 (np_γ) は上の数の列で下線を引いた素元を順にたどっていったものである. 最も基本的な疑問がある. いつでも次の素元がみつかるであろうか. 任意の γ-walk 上に素元が無数に多く存在するであろうか.

問い 2.5. 類数 1 の 2 次体 K と整数基 $\{1, \omega\}$ を任意に取る. どの向き $\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ $(\gamma \geq 0)$, どの出発点 $\xi \in \mathcal{O}_K$ $(\delta(\xi) \geq 0)$ に対しても γ-walk 上に無数に多くの素元が存在するか ?

この素朴な問いは多くの未解決問題を内包している. 例えば, n^2+1 型の素数が無数に存在するか ? など, 2 次多項式で与えられる素数の無限性に関する問題をすべて含んでいる. 先に見たように, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\omega = \sqrt{-1}$において, $\sqrt{-1}$を出発点とする ∞-walk は $\{n+\sqrt{-1}\}_{n\geq 1}$ で, 各項のノルムは n^2+1 である. ∞-walk 上の素元を並べると, $1+\sqrt{-1}$, $2+\sqrt{-1}$, $4+\sqrt{-1}$, $6+\sqrt{-1}$, $10+\sqrt{-1}$, $14+\sqrt{-1}$, $16+\sqrt{-1}$, $20+\sqrt{-1}$, $24+\sqrt{-1}$, $26+\sqrt{-1}$, $\cdots$ で, それらのノルムは n^2+1 型素数である. ∞-walk 上に無数に多くの素元があるかと言う問いは, n^2+1 型素数の無限性問題そのものである. 向きを 2 にとり, 0 を出発点とする 2-walk (0 を第 0 項とする) は, 第 $3n$ 項が $(2+\sqrt{-1})\,n$ で, その前後, 第 $3n-1$ 項が $(2+\sqrt{-1})\,n-1$, 第 $3n+1$ 項が $(2+\sqrt{-1})\,n+1$ で表される. $5n^2-4n+1$ 型素数と $5n^2+4n+1$ 型素数が現れる.

向きを有理数 ($\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$) に取ると γ-walk にある種の周期が現れ, 平易な情報で γ-walk に並ぶ数を記述できる. 有理数の向きに関する上の問いは, 2 次多項式型の素数の無限性問題に帰着される. §1 で, 合同条件など他の平易な情報で記述できない γ-walk が理想であるとしていたのは, この様なよく知られた問題だけでなく新たな視点からの問題提起が面白いと考えるからである.

予想 2.6. 類数 1 の 2 次体 K と整数基 $\{1, \omega\}$ を任意に取る. γ を正の無理数とする. どの出発点 $\xi \in \mathcal{O}_K$ $(\delta(\xi) \geq 0)$ に対しても γ-walk 上に無数に多くの素元が存在する.

更に向き γ の次数に制限をすると, 近似定理などから少しは手が届きそうに見えるのだが $\cdots$

予想 2.7. 類数 1 の 2 次体 K と整数基 $\{1, \omega\}$ を任意に取る. γ を正の実 2 次無理数とする. どの出発点 $\xi \in \mathcal{O}_K$ $(\delta(\xi) \geq 0)$ に対しても γ-walk 上に無数に多くの素元が存在する.

§3. 計算実験

3.1. 素元の個数

$\gamma(\in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), 0 \leq \gamma \leq \infty)$ 方向の次の一歩関数を繰り返し作用させて得られる γ-walk と, その上に順々に現れる素元の列について, 個数の分布と合同条件付き素元分布を計算し, 有理素数の場合と比較する. K を 2 次体, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ を整数環とする. 実数 $x > 0$ と, 整数環上を歩む γ-walk $(\subset \mathcal{O}_K)$ に対して, 素元の個数関数を

$$\pi(x; \gamma\text{-walk}) = \#\{p \in \gamma\text{-walk} \mid \delta(p) < x,\ p \text{ は } \mathcal{O}_K \text{ の素元}\}$$

で定義する. 但し $\xi = a + b\omega \in K$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ に対して $\delta(\xi) = a + b$ とする. 向き $\gamma \in \mathbb{P}^(\mathbb{R})$ を $\gamma = \sqrt{m}$ (m は平方数でない自然数) にとると, 命題 2.3 (1) より等角条件を気にする必要はない.

3.1.1. 表 1 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $\omega = \sqrt{-1}$ とする. 向き γ をいろいろな実 2 次無理数にとり素元の個数関数 $\pi(x; \gamma\text{-walk})$ の値を表 1 にまとめた. 実験データを求めた表はすべて references の後に置いた. 表 1 から表 5 まで, 5 ページ分ある. 比較のため, 通常の素数の個数関数 $\pi(x)(= \#\{p < x \,|\, p \text{ は素数}\})$ の値, $\gamma = \infty$ (出発点は $\sqrt{-1}$にとり, $n^2 + 1$ 型素数に対応), $\gamma = 1$, $\gamma = 2$ と, 向きが大きくなる様子の観察の一例とし $\gamma = \sqrt{541}$ (100 番目の素数の正方根), $\gamma = \sqrt{1223}$ (200 番目の素数の平方根), $\gamma = \sqrt{10^6+3}$ についても計算結果を並べた.

非常に小さい範囲でしか計算していないので大雑把な観察に過ぎないが, $\pi(x; \gamma\text{-walk})$ の値は $\pi(x)$ の 2/3 程度に見える. 向きが大きくなるに従い小さくなっているようにも見える. 有理数の向き 1, 2, ∞ では若干の増減があり, ある種の周期をもつことの影響かもしれない. 十分に多くの素元を確保するという要請は満足されそうに思える.

3.1.2. 表 2 2 次体と整数基を変えて計算してみる. 表 1 にある γ に対して γ-walk が計算されているので, ノルムの計算を新しい 2 次体と ω に合わせればよい. 実 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\omega = \sqrt{2}$ で素元の個数関数 $\pi(x; \gamma\text{-walk})$ の値を表 2 にまとめる. ただ, $\gamma = 1$ の 1-walk は再考する必要がある. 出発点を 0 に取った場合, 等角条件から第 $2j{+}1$ 項で 2 数の組 $\{(1 + \omega)j + 1, (1 + \omega)j + \omega\}$ が現れる. 素元の個数の数え方を決めなければならない. $\omega =\sqrt{-1}$のときは $(1{+}\sqrt{-1})j + 1$ と $(1{+}\sqrt{-1})j{+}\sqrt{-1}$は互いに共役と同伴なので, 一方が素元なら他方も素元となり, 素元の個数を数えるにあたり, どちらを選んでもよい. $\omega = \sqrt{2}$ の場合, 例えば第 3 項の $(1 + \sqrt{2}) + 1$ と $(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$ は共に素元だが, 第 9 項の $(1 + \sqrt{2})\,4 + 1$ は素元で $(1 + \sqrt{2})\,4 + \sqrt{2}$ は素元でない. ノルムの

偶奇が異なることと, ノルムが添え字 j の 2 次多項式であることから, 第 3 項, 第 7 項を除いて, 両方が素元になることはない. そこで, ここでは一方であれ両方であれ出てきた素元をすべて数えることにした. 第 3 項, 第 7 項はそれぞれ二つずつに数えてることにしたが, 今回だけの措置で, 一つずつに数えて表の数値をすべて 2 減らす考え方もある. いずれにせよ $\omega = \sqrt{2}$ における例外的な数個の変動だけのことだから, 増大度等を調べるにあたり, 余り神経質になる必要はないであろう. ここでは深入りしないが, $\omega = \sqrt{3}$ の場合は, 第 $2 \times 10^5 + 1$ 項までで 1079 項に, 第 $2 \times 10^6 + 1$ 項の中の 7580 項に, 組となる 2 数が共に素元となるものが現れる. 素元の個数の数え方も問題だが, 素元の列としての前後をどう指定するか. 合同条件付き素元分布では素元の順序の決め方も重要なので, 並べ方に統一的な指針の与えられていない 1-walk は, 現時点では扱わないことにする.

ただちに目をひかれるのは, 向き $\gamma = \sqrt{2}$ と 2 で, 特異的とも言えるほどたくさんの素元が現れている. 単数群 $\langle -1, 1+\sqrt{2} \rangle$ の影響なのだが, $\sqrt{2}$ と 2 では単数群の働き方が異なっていて少し面白い. $\gamma = 2$ では, 基本単数 $1+\sqrt{2}$ を介した関係式がある. 2-walk の第 $3n+1$ 項 $(2+\sqrt{2})\,n+1$ と第 $3n+5$ 項 $(2+\sqrt{2})\,(n+2)-1$ は共役をとって $(1+\sqrt{2})^2$ をかけることで移りあう: $((2+\sqrt{2})n+1)'(1+\sqrt{2})^2 = (2+\sqrt{2})(n+2)-1$, $((2+\sqrt{2})(n+2)-1)'(1+\sqrt{2})^2 = (2+\sqrt{2})n+1$. δ の値が 10^6 以下の 103137 個の素元は, ノルム 2 の素元 $2+\sqrt{2}$ を除く 10316 個の素元がこの関係式により 2 つずつ組になって現れている.

$\gamma = \sqrt{2}$ の $\sqrt{2}$-walk でも基本単数の働きによるのだが, 2-walk のときの様な単純な関係式ではない. 一般に γ-walk 上の点 ξ のノルムは $\delta(\xi)^2$ 程度の大きさである. $\sqrt{2}$-walk 上の点 $\xi = a+b\sqrt{2} \in \mathcal{O}_K$ は a/b が $\sqrt{2}$ に近づくように選ばれているので, $|\xi'| = |a-b\sqrt{2}| << \delta(\xi)$ となる. $|\xi| = O(|\delta(\xi)|)$ なので, ノルムの絶対値 $|\xi\xi'| = |a^2-2b^2| = O(|\delta(\xi)|) = O(|a+b|)$ となる. ノルムの絶対値が高さ (δ の絶対値) と同程度の大きさなので, 同じノルムをもつ数が沢山現れる. δ の値が 10^6 以下の 133694 個の素元についてノルムごとに個数を調べると, ノルムの絶対値が 2 のものが 15 個 $(2+\sqrt{2}, 4+3\sqrt{2}, 10+7\sqrt{2}, \cdots, 390050+275807\sqrt{2})$, ノルムの絶対値が 7 のものが 28 個 $(5+3\sqrt{2}, 5+4\sqrt{2}, 11+8\sqrt{2}, \cdots, 504293+356589\sqrt{2})$, ノルムの絶対値が 17 のものが 25 個 $(9+7\sqrt{2}, 15+11\sqrt{2}, 23+16\sqrt{2}, 37+26\sqrt{2}, \cdots, 370449+261947\sqrt{2})$, ノルムの絶対値が 23 のものが 25 個 $(11+7\sqrt{2}, 19+13\sqrt{2}, 25+18\sqrt{2}, \cdots, 409651+289667\sqrt{2})$ などとなっている. ここで, $(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{14} = 390050+275807\sqrt{2}$, $(5+3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{13} = 437371+309268\sqrt{2}$, $(5+4\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{13} = 504293+356589\sqrt{2}$, $(9+7\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{12} = 370449+261947\sqrt{2}$, $(15+11\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{11} = 248087+175424\sqrt{2}$ なので, 単数倍で移りあう同伴な素元で, δ の値が非負で 10^6 のものがすべて現れている. この現象は, 相対極小 (relative minima) と高さの評価から説明できるのだが, ここでは省略する. ともかく, $\omega = \sqrt{2}$ において, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の素元 p が $\sqrt{2}$-walk に現れたなら, 実数として p より大きい p と同伴な素元はすべて $\sqrt{2}$-walk 上に現れる. $\sqrt{2}$-walk 上に無数に多くの (同伴な) 素元が存在する. これをもって, 問い 2.5, 予想 2.6. 予想 2.7 に対する肯定的一例とするのは気が引けるが, 何もないよりはマシか...

3.2. γ-walk における Dirichlet の素数定理の類似

問い 2.5, 予想 2.6. 予想 2.7 などの, γ-walk に現れる素元の個数の無限性について, 何

一つ満足に答えていないが, これら計算実験から γ-walk 上にそれなりに十分な個数の素元が確保されそうである．γ-walk 上で合同条件付き素元分布を考えたいのだが, その前に, γ-walk において Dirichlet の素数定理の類似が成り立つかどうかが問題となる．$\mathfrak{a}$ を整イデアル, $\mathfrak{c} \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})^*$ を法 $\mathfrak{a}$ に関する既約剰余類とする．正の実数 x と, 整数環上を歩む γ-walk ($\subset \mathcal{O}_K$) に対し,

$$\pi_{\mathfrak{c}}(x;\, \gamma\text{-walk}) = \sharp\{p \in \gamma\text{-walk} \cap \mathfrak{c} \mid \delta(p) < x,\, p \text{ は } \mathcal{O}_K \text{ の素元}\}$$

とおく．γ-walk 上の素元における $\mathfrak{c}$ に属する素元の密度は, 極限

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi_{\mathfrak{c}}(x;\, \gamma\text{-walk})}{\pi(x;\, \gamma\text{-walk})}$$

で表される．極限の存在と, 極限値を調べることが, Dirichlet の素数定理の類似である．

予想 3.1. $\pi_{\mathfrak{c}}(x;\, \gamma\text{-walk})$ が非有界となる $\mathfrak{c} \in (\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})^*$ の個数を r とおく．このとき素元密度 $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi_{\mathfrak{c}}(x;\, \gamma\text{-walk})}{\pi(x;\, \gamma\text{-walk})}$ は 0 か $\frac{1}{r}$ に等しい．特に $\gamma \notin \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ ならば, $r = \varphi(\mathfrak{a})$ が成り立つ．

3.3. γ-walk 上の合同条件付き素元分布

$\omega = \sqrt{-1}$ ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$) において絶対ノルムが 5 の素イデアル $(2+\sqrt{-1})$ を法とした合同条件付き素元分布 (表 3) と, 絶対ノルムが 13 の素イデアル $(3+2\sqrt{-1})$ を法とした合同条件付き素元分布 (表 4), $\omega = \sqrt{2}$ ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$) において絶対ノルムが 7 の素イデアル $(5+3\sqrt{2})$ を法とした合同条件付き素元分布 (表 5) を調べた．分布の変遷を視覚的に見せるにはだいたい 100×10^6 個 (連続した 10^6 個の素元列について分布を調べたものを 100 区画程度) ぐらいの素元が生成できるとよいのだが, 今回は 10^5 個程度しか生成できなかった．正確には, 高さ (δ の絶対値) が 2×10^6 以下の素元を生成した．これでも絶対ノルムが 10^{12} を超える大きさの素元に至るまで計算しているので, 個数を一桁増やすとか, 一桁上の区画を見るとか, データ量を増やすのは計算機および計算時間の問題でなかなか難しい．そこで, 向き γ をいろいろ変えて, それぞれ 10^5 個程度の長さの素元列に対して合同条件付き素元分布 (既約剰余類ごとの度数分布) を計算し, 傾向を比較することにした．もっと多くの γ に対して計算データはあるが, たくさん並べても冗長になるだけなので, すべての実験データを掲載したわけではない．

縦横に並べられた表は, 左上角に γ の値を記した左側の表と, その右の % の表記のある表の 2 つで一組をなす．各組の左の表 (左上角に γ の値のある表) は, 縦のラベル a, 横のラベル b (a, b は既約剰余類の代表) のところに既約剰余類 a に属する素元の次の素元が b に属するものの個数をおいた度数分布表である．右上角に高さ 2×10^6 以下の素元の個数を, 右端の列に各既約剰余類に属する素元の個数を記した．右の表 (% の表記のある表) は, その度数分布を 百分率 (小数位は四捨五入) で表したもので, 切り上げ切り捨てなどの関係で総和が 100% にならないこともある．表 4 は数値が細かくて見えにくいかもしれません．分布の傾向を捉えるにあたり, 細かい数値にとらわれず, まずは模様を眺めるので十分でしょう．

表の右端の列をみると, γ-walk 上でも Dirichlet の素数定理の類似 (予想 3.1) が成り立ちそうに見える．合同条件付き素元分布については, この程度の個数の素元の分布からで

も, 大きな偏りのあることが見て取れる. それなりに共通の傾向や, 向きの違いによる特徴も現れている. 大雑把に $a = b$ のライン上が少なく, その右上に多く分布する傾向があるが, すべてがそうではない. modulo $3 + 2\sqrt{-1}$ では $a = b$ のラインよりもっと少ないところもある.

References

[1] R. Crandall-C. Pomerance, *Prime Numbers —A Computational Perspective, Second Edition*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2005.

[2] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory, 3rd edition*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2004.

[3] G. Hardy, *Collected Works of G. H. Hardy*, Clarendon Press, Oxford, 1966.

[4] G. H. Hardy-E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed.*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[5] M. Kida, *Kummer theory for norm algebraic tori*, J. Algebra 293 (2005), 427–447

[6] T. Komatsu, *Arithmetic of Rikuna 's generic cyclic polynomial and generalization of Kummer theory*, Manuscripta Math. 114 (2004), 265–279

[7] 本橋 洋一, 解析的整数論 I —素数分布論—, 朝倉書店, 2009.

[8] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 2000.

[9] 小川 裕之, *Quodratic reduction of multiplicative group and its applications*, 数理解析研究所講究録 1324 (2003), 217–224

[10] H. Ogawa, *How should we bet on the prime number dice?* , 数理解析研究所講究録 1898 (2014), 16–27

[11] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge University Press, 1995.

表 1 Table of $\pi(x; \gamma\text{-walk})$ for $x \le 10^6$ $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $\omega = \sqrt{-1}$

x	100	1000	10000	20000	30000	40000	50000	60000	80000	100000	200000	300000	400000	500000	600000	800000	1000000
$\pi(x)$	25	168	1229	2262	3245	4203	5133	6057	7837	9592	17984	25997	33860	41538	49098	63951	78498
$\sqrt{2}$	21	123	859	1516	2172	2821	3463	4056	5232	6364	11832	17082	22151	27112	31964	41731	51275
$\sqrt{3}$	19	126	817	1542	2182	2792	3425	4057	5211	6335	11853	17021	22128	27136	32026	41565	51067
$\sqrt{5}$	21	119	783	1473	2174	2807	3372	3971	5135	6269	11726	16931	22163	26983	31908	41580	50952
$\sqrt{6}$	18	113	837	1485	2146	2746	3379	3963	5135	6256	11756	16905	22034	27082	32044	41576	50959
$\sqrt{7}$	20	119	827	1486	2150	2787	3369	3972	5089	6239	11737	16890	21906	26972	31999	41605	51068
$\sqrt{8}$	21	125	781	1477	2156	2802	3433	4062	5220	6348	11746	17092	22220	27167	31972	41507	50979
$\sqrt{10}$	16	118	836	1507	2126	2761	3389	3975	5132	6290	11735	16944	22097	27048	31962	41534	50928
$\sqrt{11}$	16	121	788	1423	2071	2688	3289	3907	5071	6248	11704	16888	21964	27043	31855	41511	51020
$\sqrt{13}$	21	109	795	1512	2207	2832	3404	3995	5197	6347	11752	16945	21994	27040	31963	41445	50932
$\sqrt{17}$	18	102	764	1426	2083	2743	3327	3934	5082	6184	11602	16772	21719	26650	31522	41149	50686
$\sqrt{19}$	20	117	796	1474	2107	2715	3325	3927	5154	6291	11774	16936	21952	26837	31805	41495	50883
$\sqrt{23}$	24	119	757	1460	2090	2690	3305	3889	5065	6223	11627	16812	21912	26890	31739	41207	50543
$\sqrt{29}$	16	128	800	1487	2176	2794	3375	3953	5142	6254	11653	16761	21761	26761	31677	41099	50518
$\sqrt{31}$	18	134	824	1529	2160	2779	3392	3973	5155	6341	11730	16902	21968	26918	31793	41228	50568
$\sqrt{37}$	17	104	817	1510	2146	2762	3346	3922	5090	6229	11711	16977	21961	26821	31661	41230	50652
$\sqrt{541}$	20	123	781	1463	2086	2686	3268	3853	5016	6130	11433	16534	21624	26577	31396	40991	50291
$\sqrt{1223}$	15	108	801	1450	2088	2659	3262	3844	4976	6097	11474	16674	21659	26522	31229	40548	49957
$\sqrt{10^6+3}$	13	92	776	1454	2064	2703	3290	3863	5032	6169	11554	16701	21574	26514	31254	40675	49917
$1+\sqrt{2}$	20	126	820	1521	2138	2782	3348	3932	5080	6257	11673	16819	21862	26788	31667	41192	50555
π	17	113	865	1519	2155	2764	3389	4001	5128	6247	11801	17010	22013	26868	31713	41511	50939
1	22	131	911	1646	2356	3042	3689	4344	5586	6786	12707	18406	23900	29293	34604	45056	55404
2	18	112	820	1459	2043	2679	3250	3805	4908	5975	11217	16192	21073	25917	30580	39688	48782
∞	19	112	841	1559	2268	2952	3612	4252	5513	6656	12391	17924	23276	28563	33820	44163	54110

表 2 Table of $\pi(x; \gamma\text{-walk})$ for $x \leq 10^6$ $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\omega = \sqrt{2}$

x	100	1000	10000	20000	30000	40000	50000	60000	80000	100000	200000	300000	400000	500000	600000	800000	1000000
$\pi(x)$	25	168	1229	2262	3245	4203	5133	6057	7837	9592	17984	25997	33860	41538	49098	63951	78498
$\sqrt{2}$	37	282	2122	3915	5609	7252	8865	10434	13496	16493	30851	44560	57887	70932	83760	108989	133694
$\sqrt{3}$	31	171	1179	2093	2997	3833	4655	5453	7026	8647	16032	23111	29936	36495	43207	56243	68766
$\sqrt{5}$	26	146	1108	2019	2903	3693	4491	5263	6810	8273	15345	22257	28828	35416	41775	54311	66487
$\sqrt{6}$	23	147	1061	1879	2729	3551	4338	5107	6559	8066	15097	21824	28354	34728	41025	53382	65733
$\sqrt{7}$	26	152	1035	1903	2732	3558	4356	5146	6683	8133	15209	21853	28403	34743	40986	53127	65203
$\sqrt{8}$	27	167	1037	1903	2722	3533	4338	5165	6684	8195	15257	22043	28622	35045	41341	53672	65782
$\sqrt{10}$	28	166	1090	1965	2771	3554	4304	5103	6563	8051	14926	21705	28119	34454	40749	52987	65003
$\sqrt{11}$	25	149	1031	1855	2665	3488	4231	4978	6511	7939	14933	21676	28158	34310	40664	53118	65035
$\sqrt{13}$	23	162	1052	1913	2705	3488	4268	5018	6464	7927	14781	21331	27862	34272	40467	52650	64792
$\sqrt{17}$	28	159	1046	1894	2684	3463	4224	4960	6429	7895	14861	21365	27681	34018	40184	52463	64367
$\sqrt{19}$	24	155	1021	1857	2660	3465	4258	5010	6464	7909	14787	21437	27894	34222	40405	52507	64552
$\sqrt{23}$	22	154	1028	1907	2754	3535	4335	5088	6516	7957	14841	21351	27678	33956	39991	51991	63930
$\sqrt{29}$	21	139	1024	1870	2666	3433	4182	4964	6433	7914	14788	21356	27677	33887	40019	52171	64003
$\sqrt{31}$	25	150	1034	1902	2742	3525	4287	5056	6517	7996	14830	21502	27938	34161	40386	52307	64091
$\sqrt{37}$	24	157	1064	1886	2646	3442	4170	4969	6441	7911	14660	21160	27597	33889	40071	52195	64108
$\sqrt{541}$	23	152	1034	1878	2621	3395	4157	4880	6318	7714	14428	20887	27165	33318	39435	51349	63120
$\sqrt{1223}$	22	137	997	1827	2622	3429	4147	4877	6350	7779	14522	21015	27376	33606	39744	51732	63321
$\sqrt{10^6+3}$	13	111	967	1773	2589	3336	4115	4799	6256	7642	14361	20759	27138	33304	39346	51397	63169
$1+\sqrt{2}$	27	154	1072	1964	2796	3612	4437	5226	6708	8241	15344	22145	28761	35193	41539	53933	66042
π	26	153	1035	1913	2720	3521	4304	5044	6579	7958	14950	21543	28151	34497	40901	53084	65102
1	34	191	1281	2307	3308	4282	5249	6176	7955	9648	17777	25657	33381	40891	48061	62601	76984
2	36	251	1675	3061	4405	5639	6849	8072	10439	12790	23865	34371	44634	54727	64618	84077	103137
∞	27	158	1154	2141	3088	3978	4825	5644	7297	8889	16691	24031	31301	38492	45548	59291	72929

表 3 $\omega = \sqrt{-1}$, modulo $2+\sqrt{-1}$

$\sqrt{2}$	1	2	3	4	96991
1	4812	6099	6642	6503	24056
2	6835	4889	5929	6682	24335
3	6326	7100	4811	6106	24343
4	6084	6247	6961	4962	24254

%	1	2	3	4	
1	20	25	28	27	25
2	28	20	24	27	25
3	26	29	20	25	25
4	25	26	29	20	25

$\sqrt{3}$	1	2	3	4	97117
1	5152	5574	6025	7405	24156
2	7627	4955	5433	6221	24236
3	6177	7480	5128	5558	24343
4	5200	6227	7757	5195	24379

%	1	2	3	4	
1	21	23	25	31	25
2	31	20	22	26	25
3	25	31	21	23	25
4	21	26	32	21	25

$\sqrt{5}$	1	2	3	4	96559
1	5739	7878	6164	4355	24136
2	5511	5286	7108	6246	24151
3	5370	5488	5037	8004	23899
4	7516	5499	5590	5765	24370

%	1	2	3	4	
1	24	33	26	18	25
2	23	22	29	26	25
3	22	23	21	33	25
4	31	23	23	24	25

$\sqrt{7}$	1	2	3	4	123928
1	4761	7215	6546	5509	24031
2	5953	4742	6885	6700	24280
3	6020	6076	4821	7233	24150
4	7297	6246	5898	4836	24277

%	1	2	3	4	
1	20	30	27	23	25
2	25	20	28	28	25
3	25	25	20	30	25
4	30	26	24	20	25

$\sqrt{11}$	1	2	3	4	96592
1	4649	6959	6543	5711	23862
2	5917	4695	6650	6759	24021
3	6161	6082	4808	7101	24152
4	7135	6284	6152	4984	24555

%	1	2	3	4	
1	19	29	27	24	25
2	25	20	28	28	25
3	26	25	20	29	25
4	29	26	25	20	25

$\sqrt{13}$	1	2	3	4	96506
1	5445	7019	6177	5450	24091
2	6010	5352	6514	6369	24245
3	5676	6097	5245	6940	23958
4	6960	5776	6022	5452	24210

%	1	2	3	4	
1	23	29	26	23	25
2	25	22	27	26	25
3	24	25	22	29	25
4	29	24	25	23	25

∞	1	2	3	4	102205
1	0	0	0	0	0
2	0	9435	11528	12925	33888
3	0	13128	9382	11700	34210
4	0	11324	13300	9480	34104

%	1	2	3	4	
1	—	—	—	—	—
2	—	28	34	38	33
3	—	38	27	34	33
4	—	33	39	28	33

表 4 $\omega = \sqrt{-1}$, modulo $3 + 2\sqrt{-1}$

$\sqrt{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	96991
1	887	628	159	137	623	1394	1730	850	407	63	317	923	8118
2	1408	841	577	176	161	580	1195	1605	782	406	64	320	8115
3	726	1259	754	642	185	122	457	1082	1568	740	363	61	7959
4	222	681	1307	811	585	181	69	426	1008	1585	825	412	8112
5	36	216	728	1359	868	690	143	81	422	1124	1652	814	8133
6	431	55	215	782	1509	879	667	188	95	440	1171	1717	8149
7	872	418	51	286	895	1722	923	686	160	131	578	1350	8072
8	1699	770	414	79	342	914	1422	857	601	190	135	651	8074
9	1157	1575	737	377	49	293	741	1391	757	650	180	134	8041
10	446	1156	1450	770	428	50	210	654	1370	776	607	165	8082
11	85	423	1130	1546	774	439	37	211	677	1307	761	647	8037
12	149	93	438	1147	1714	884	479	43	194	670	1384	901	8096

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	11	8	2	2	8	17	21	10	5	1	4	11	8
2	17	10	7	2	2	7	15	20	10	5	1	4	8
3	9	16	9	8	2	2	6	14	20	9	5	1	8
4	3	8	16	10	7	2	1	5	12	20	10	5	8
5	0	3	9	17	11	8	2	1	5	14	20	10	8
6	5	1	3	10	19	11	8	2	1	5	14	21	8
7	11	5	1	4	11	21	11	8	2	2	7	17	8
8	21	10	5	1	4	11	18	11	7	2	2	8	8
9	14	20	9	5	1	4	9	17	9	8	2	2	8
10	6	14	18	10	5	1	3	8	17	10	8	2	8
11	1	5	14	19	10	5	0	3	8	16	9	8	8
12	2	1	5	14	21	11	6	1	2	8	17	11	8

$\sqrt{3}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	97117
1	510	1200	1104	515	271	281	866	991	1153	674	343	188	8096
2	514	476	1103	1034	543	299	276	863	920	1137	639	337	8141
3	231	548	500	1099	1066	523	351	323	839	879	1123	643	8125
4	480	264	523	496	1145	1096	559	351	273	835	871	1186	8079
5	768	485	253	513	498	1294	1195	625	358	291	816	1024	8120
6	1262	781	408	234	482	530	1179	1176	602	329	268	813	8064
7	1028	1270	678	366	193	521	520	1279	1093	547	251	256	8002
8	829	940	1167	631	362	205	491	560	1112	1054	553	278	8182
9	277	846	918	1112	630	309	226	508	496	1146	1045	556	8069
10	353	295	842	931	1164	655	404	234	498	497	1135	1122	8130
11	655	397	286	846	932	1321	753	475	243	513	489	1141	8051
12	1189	639	344	302	834	1029	1182	797	482	228	518	511	8055

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	6	15	14	6	3	3	11	12	14	8	4	2	8
2	6	6	14	13	7	4	3	11	11	14	8	4	8
3	3	7	6	14	13	6	4	4	10	11	14	8	8
4	6	3	6	6	14	14	7	4	3	10	11	15	8
5	9	6	3	6	6	16	15	8	4	4	10	13	8
6	16	10	5	3	6	7	15	15	7	4	3	10	8
7	13	16	8	5	2	7	6	16	14	7	3	3	8
8	10	11	14	8	4	3	6	7	14	13	7	3	8
9	3	10	11	14	8	4	3	6	6	14	13	7	8
10	4	4	10	11	14	8	5	3	6	6	14	14	8
11	8	5	4	11	12	16	9	6	3	6	6	14	8
12	15	8	4	4	10	13	15	10	6	3	6	6	8

$\sqrt{5}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	96559
1	342	953	843	861	492	403	778	541	1057	637	601	538	8046
2	521	336	937	848	842	577	400	824	536	1000	659	533	8013
3	541	542	332	918	859	869	471	431	865	493	1053	660	8034
4	561	546	514	332	895	895	825	545	490	856	542	1035	8036
5	750	590	623	473	330	1017	897	934	529	425	876	589	8033
6	1098	665	590	527	474	331	897	909	912	495	409	786	8093
7	554	1076	663	562	494	546	360	1009	827	886	540	434	7951
8	826	515	1109	603	542	550	520	344	894	816	814	520	8053
9	433	912	521	1079	635	558	498	525	321	914	896	792	8084
10	599	483	813	537	1065	700	551	576	527	346	890	870	7957
11	875	538	478	858	560	1088	688	675	541	556	363	954	8174
12	946	856	611	438	846	558	1067	740	585	533	531	371	8082

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	4	12	10	11	6	5	10	7	13	8	7	7	8
2	7	4	12	11	11	7	5	10	7	12	8	7	8
3	7	7	4	11	11	11	6	5	11	6	13	8	8
4	7	7	6	4	11	11	10	7	6	11	7	13	8
5	9	7	8	6	4	13	11	12	7	5	11	7	8
6	14	8	7	7	6	4	11	11	11	6	5	10	8
7	7	14	8	7	6	7	5	13	10	11	7	5	8
8	10	6	14	7	7	7	6	4	11	10	10	6	8
9	5	11	6	13	8	7	6	6	4	11	11	10	8
10	8	6	10	7	13	9	7	7	7	4	11	11	8
11	11	7	6	10	7	13	8	8	7	7	4	12	8
12	12	11	8	5	10	7	13	9	7	7	7	5	8

$\sqrt{7}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	96740
1	357	914	823	813	499	433	877	492	1090	608	554	605	8065
2	542	330	949	800	781	572	435	924	473	1056	634	527	8023
3	677	472	365	936	819	795	511	430	890	438	1111	667	8111
4	562	694	527	317	869	874	832	581	440	888	471	1029	8084
5	729	624	687	522	344	988	786	871	563	483	912	457	7966
6	1047	659	580	632	488	330	906	792	811	520	464	914	8143
7	506	1116	681	551	638	527	355	965	844	835	565	439	8022
8	851	445	1103	591	529	696	461	333	932	735	820	505	8001
9	470	883	504	1039	612	590	611	571	338	934	779	763	8094
10	608	476	897	502	998	695	536	757	485	334	945	819	8052
11	884	553	441	904	503	1127	624	568	641	533	363	964	8105
12	832	857	555	477	886	516	1087	717	587	688	487	384	8073

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	4	11	10	10	6	5	11	6	14	8	7	8	8
2	7	4	12	10	10	7	5	12	6	13	8	7	8
3	8	6	5	12	10	10	6	5	11	5	14	8	8
4	7	9	7	4	11	11	10	7	5	11	6	13	8
5	9	8	9	7	4	12	10	11	7	6	11	6	8
6	13	8	7	8	6	4	11	10	10	6	6	11	8
7	6	14	8	7	8	7	4	12	11	10	7	5	8
8	11	6	14	7	7	9	6	4	12	9	10	6	8
9	6	11	6	13	8	7	8	7	4	12	10	9	8
10	8	6	11	6	12	9	7	9	6	4	12	10	8
11	11	7	5	11	6	14	8	7	8	7	4	12	8
12	10	11	7	6	11	6	13	9	7	9	6	5	8

∞	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	102205
1	377	838	798	719	1645	382	1173	752	809	0	1392	469	9354
2	551	371	974	933	611	1677	529	1112	777	0	301	1486	9322
3	752	556	539	1080	897	697	1831	527	1137	0	923	343	9282
4	1589	511	513	420	956	750	738	1653	373	0	838	826	9167
5	294	1406	588	509	305	980	893	595	1692	0	1171	818	9251
6	1176	291	1594	708	507	475	1082	916	685	0	509	1301	9244
7	985	842	288	1634	567	542	486	1010	837	0	1711	385	9287
8	1296	806	865	295	1430	525	530	371	851	0	637	1649	9255
9	670	1325	997	1138	268	1611	734	536	436	0	937	758	9410
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	746	1686	370	1211	868	815	314	1502	449	0	399	917	9277
12	918	690	1756	520	1197	789	977	281	1365	0	459	403	9355

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	4	9	9	8	18	4	13	8	9	—	15	5	9
2	6	4	10	10	7	18	6	12	8	—	3	16	9
3	8	6	6	12	10	8	20	6	12	—	10	4	9
4	17	6	6	5	10	8	8	18	4	—	9	9	9
5	3	15	6	6	3	11	10	6	18	—	13	9	9
6	13	3	17	8	5	5	12	10	7	—	6	14	9
7	11	9	3	18	6	6	5	11	9	—	18	4	9
8	14	9	9	3	15	6	6	4	9	—	7	18	9
9	7	14	11	12	3	17	8	6	5	—	10	8	9
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	–
11	8	18	4	13	9	9	3	16	5	—	4	10	9
12	10	7	19	6	13	8	10	3	15	—	5	4	9

表 5 $\omega = \sqrt{2}$, modulo $5 + 4\sqrt{2}$, $\delta(\xi) \le 2 \times 10^6$

$\sqrt{2}$	1	2	3	4	5	6	252694
1	2855	5050	9134	8419	8322	8307	42087
2	10647	2979	4299	8305	7491	8411	42132
3	6340	11605	2789	4442	8372	8582	42130
4	7592	7140	11260	2743	4345	9016	42096
5	7202	8143	7099	11780	2915	4982	42121
6	7457	7216	7548	6408	10677	2793	42099

%	1	2	3	4	5	6	
1	7	12	22	20	20	20	17
2	25	7	10	20	18	20	17
3	15	28	7	11	20	20	17
4	18	17	27	7	10	21	17
5	17	19	17	28	7	12	17
6	18	17	18	15	25	7	17

$\sqrt{3}$	1	2	3	4	5	6	129625
1	2509	3151	4022	3600	4357	3978	21617
2	4486	2311	3037	3880	3279	4364	21357
3	3593	4815	2454	3276	3998	3716	21852
4	4003	3577	4625	2366	3028	3891	21490
5	3285	4183	3605	4787	2418	3344	21622
6	3741	3319	4110	3581	4542	2391	21684

%	1	2	3	4	5	6	
1	12	15	19	17	20	18	17
2	21	11	14	18	15	20	16
3	16	22	11	15	18	17	17
4	19	17	22	11	14	18	17
5	15	19	17	22	11	15	17
6	17	15	19	17	21	11	17

$\sqrt{5}$	1	2	3	4	5	6	125536
1	2494	3328	3398	3258	4310	4290	21078
2	4523	2405	3189	3607	2958	4184	20866
3	3835	4624	2369	3355	3636	3223	21042
4	3990	3518	4423	2328	2968	3503	20730
5	2886	4107	3622	4525	2447	3318	20905
6	3351	2884	4041	3657	4586	2393	20912

%	1	2	3	4	5	6	
1	12	16	16	15	20	20	17
2	22	12	15	17	14	20	17
3	18	22	11	16	17	15	17
4	19	17	21	11	14	17	17
5	14	20	17	22	12	16	17
6	16	14	19	17	22	11	17

$\sqrt{7}$	1	2	3	4	5	6	123928
1	3134	3443	2986	2564	4096	4404	20627
2	5157	2943	2989	3006	2419	4286	20800
3	3936	5247	2633	3062	3047	2518	20443
4	3564	3660	4721	2740	3082	2960	20727
5	2036	3540	3580	5255	2825	3405	20641
6	2800	1967	3534	4100	5173	3113	20687

%	1	2	3	4	5	6	
1	15	17	14	12	20	21	17
2	25	14	14	14	12	21	17
3	19	26	13	15	15	12	16
4	17	18	23	13	15	14	17
5	10	17	17	25	14	16	17
6	14	10	17	20	25	15	17

∞	1	2	3	4	5	6	137965
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	3355	5412	7976	4336	6435	27514
3	0	6379	3378	5331	8095	4538	27721
4	0	4398	6585	3420	5296	7819	27518
5	0	7857	4388	6427	3460	5375	27507
6	0	5524	7958	4364	6320	3536	27702

%	1	2	3	4	5	6	
1	—	—	—	—	—	—	—
2	—	12	20	29	16	23	20
3	—	23	12	19	29	16	20
4	—	16	24	12	19	28	20
5	—	29	16	23	13	20	20
6	—	20	29	16	23	13	20