高次連分数展開について

小川 裕之 (大阪大学大学院 理学研究科 数学)

§1. 与えられた実数を連分数に展開することは, 数の表現としての面白さや, 最良近似と言ったある種の実用的な面白さがあり, Pell 方程式などを解くための, 2 次体の単数群や類数などを求めるための道具として利用されている. 近似の意味合いから, 超越数が "どの程度超越的か?" などの尺度としての利用もある. 連分数を用いて 2 次体の基本単数を求める方法を, より高次の代数体の系列に拡張しましたので, 計算例と共にここに報告します.

§2. 連分数とは,

$$a_0 + \cfrac{c_1}{a_1 + \cfrac{c_2}{a_2 + \cfrac{c_3}{a_3 + \ddots}}}$$

の形の, 分母が更に分数の形をとった入れ子型の構造を持った分数のことをいう. 冗長になるので上を

$$a_0 + \frac{c_1}{a_1 +} \frac{c_2}{a_2 +} \frac{c_3}{a_3 +} \cdots$$

と略して書くことにする. 有限の回数で終わるものを有限連分数, 無限に続くものを無限連分数と言う. 無限連分数を n 番目の項で打ち切ったもの $a_0 + \frac{c_1}{a_1 +} \frac{c_2}{a_2 +} \frac{c_3}{a_3 +} \cdots \frac{c_n}{+ a_n}$ を第 n 近似分数という. 近似分数の列が収束するとき元の無限連分数がその値に収束すると定義する. 連分数のすべての係数を含む最小の体 $K = \mathbb{Q}(a_0, a_1, a_2, \cdots, c_1, c_2, \cdots)$ をその連分数の係数体と呼ぶ. 以下, 係数体 K が (無限次の場合も含めて) 代数体の場合を扱う. 分母, 分子に現れる数が代数的整数でない場合, それぞれ適当に整数倍して, 代数的整数になるように取れる. 代数体 K に含まれる代数的整数を分母, 分子にもつ連分数を K-連分数といい, 特に K が有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合 (分母, 分子が整数の場合) を有理連分数という. 有限 K-連分数は明らかに K に値をとる. K に含まれない数を (無限) K-連分数で表現することを考えるのが興味深い. 分子がすべて 1 の連分数を単純連分数という. 整数論への応用を考える場合, 分子はすべて 1 の場合 (単純連分数) か -1 の場合を考え, 分母は正の整数を取ることが多い. ± 1 が有理整数環 $\mathbb{Z}$ の (有理数体 $\mathbb{Q}$ の) 単数であることに注意して, 分子が K の単数となる K-連分数を正則 K-連分数と呼ぶことにする. 与えられた実数 (複素数でもいいのだが) を連分数の形で表すことを, 連分数に展開するという.

§3. 円周率 π と自然対数の底 e を単純有理連分数に展開すると,

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 +} \frac{1}{15 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{292 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{2 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{3 +} \frac{1}{1 +} \cdots$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 +} \frac{1}{2 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{4 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{6 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{1 +} \frac{1}{8 +} \cdots$$

円周率 $\pi = 3.14159265358979\cdots$ の連分数の第 1, 2, 3 近似分数を計算すると,

$$\begin{aligned}
3 + \frac{1}{7} &= \frac{22}{7} = \underline{3.14}2857\cdots \\
3 + \frac{1}{7 +} \frac{1}{15} &= \frac{333}{106} = \underline{3.1415}0943\cdots \\
3 + \frac{1}{7 +} \frac{1}{15 +} \frac{1}{1} &= \frac{335}{113} = \underline{3.1415929}2035\cdots
\end{aligned}$$

これらの分数は分母, 分子の数の桁数の割りに, 円周率に近い値を取っている. 円周率の最良近似分数と呼ばれている. 分数 p/q が実数 x の最良近似であるとは, 分母が q よりも小さいどのような分数 r/s をとっても $|x - p/q| < |x - r/s|$ となるときをいう. 一般に,

定理 3.1 実数 x の単純有理連分数のを第 n 近似分数 p/q について, $|x - p/q| < 1/q^2$ が成り立つ.

系 3.2 単純有理連分数から得られる近似分数は最良近似を与える.

実無理数の最良近似についてこの系の逆が成り立つのだが, それについて述べるためには少し準備がいる.

命題 3.3 すべての実数は単純有理連分数に展開される. (注：次節でその展開方法を与える)

定理 3.4 実無理数は唯一通りの仕方で単純有理連分数に展開される. (注：有理数は 2 通りの展開をもつ)

定理 3.5 実無理数のすべての最良近似分数は, その実無理数の単純有理連分数展開の近似分数として現れる.

単純有理連分数は, すべての最良近似分数を経由しながら実無理数に収束する様子を描いたものとなっている.

§4. 実数を単純有理連分数に展開する手順を具体的に与える. 実数 ξ を超えない最大の整数を $[\xi]$ 表すことにする. 与えられた実数 x に対して, $a_0 = [x]$ とおくと, $x - a_0$ は 1 より小さい非負 (正または零) 実数となる. 零でないときその逆数 $(1/(x - a_0))$ を x_1 とおく. x_1 は 1 より大きい実数なので, $a_1 = [x_1]$ は正の整数である. $x_1 - a_1$ は 1 より小さい非負実数なので, 零でないときその逆数を x_2 とおく. 以下これを繰り返す. 途中で零が現れない限り (最初を除いて正の) 整数の列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ を得る. $x_1 = 1/(x - a_0)$ だから $x = a_0 + \dfrac{1}{x_1}$ となる. $x_2 = 1/(x_1 - a_1)$ だから $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2}$ となる. 代入すると,

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} \, {}_{+} \, \frac{1}{x_2}$$

これを繰り返すと, 与えられた実数が最後の項を除いて整数係数の単純連分数に展開されていく. 展開が途中で止まったなら, 有限連分数に展開されたことになるので, x は有理数である. 逆に,

命題 4.6 すべての有理数は有限な単純有理連分数に展開される.

が成り立つ. 展開がいつまでも続く場合でも,

定理 4.7 上で作った連分数は元の実数 x に収束する. すべての実数は単純有理連分数に展開される.

§5. 連分数 $a_0 + \dfrac{c_1}{a_1} \, {}_{+} \, \dfrac{c_2}{a_2} \, {}_{+} \, \cdots$ について, 係数の列 $\{(a_1, c_1), (a_2, c_2), \cdots\}$ が周期的であるとき, その連分数は周期をもつという. 周期をもつ連分数について, 十分大きなすべての n に対して $(a_{n+\ell}, c_{n+\ell}) = (a_n, c_n)\}$ をみたす最小の正の整数 ℓ を周期の長さという.

命題 5.8 収束する K-連分数が周期的をもつならば, それは K 上高々 2 次の数に収束する.

この命題の単純な逆は成り立たない. 例えば有理連分数として表現できる数は実数なので, 虚 2 次の無理数は有理連分数では表せない.

定理 5.9 すべての実 2 次無理数は, 周期的な単純有理連分数に展開される.

§6. K を n 次代数体とする. K の実数体への異なる埋め込みの個数を $r_1(K)$, 複素数体への (実数体への埋め込みで無く, また共役を除いて) 異なる埋め込みの個数を $r_2(K)$ とおく. このとき $n = r_1(K) + 2r_2(K)$ が成り立つ. $\mathfrak{o}_K$ を K の整数環 (K に含まれる代数的整数全体のなす環) とし, $\mathfrak{o}_K^\times$ を単数群 ($\mathfrak{o}_K$ の可逆元全体のなす群) とする. K に含まれる 1 のベキ根の全体を μ_K とし, $r(K) = r_1(K) + r_2(K) - 1$ とおく.

定理 6.10 (Dirichelet の 単数定理) $r(K)$ 個の単数 $\eta_1, \cdots, \eta_{r(K)}$ をうまく選んで, K のすべての単数を 1 のベキ根と $\eta_1, \cdots, \eta_{r(K)}$ のべき乗の積として一意的に表すことができる. すなわち, $\mathfrak{o}_K^\times \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}^{r(K)}$

単数群の自由部分の生成系 $\{\eta_1, \cdots, \eta_{r(K)}\}$ を K の基本単数系という. 単数群の自由部分の階数 $r(K)$ を単に単数群の階数という. K が実 2 次体の場合, 次数は 2 で実数体への埋め込みが 2 つなので $r_1(K) = 2$, $r_2(K) = 0$, $r(K) = 2 + 0 - 1 = 1$ となる. ± 1 以外の 1 のベキ根は実数ではないので, $\mu_K = \{\pm 1\}$ となる. Dirichelet の単数定理より, $\mathfrak{o}_K^\times = \langle -1, \varepsilon \rangle$ となる K の単数 ε が存在する. ε を K の基本単数という.

§7. 連分数展開を使って, 実 2 次体の基本単数 ε を計算する方法について述べる. 実 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ($m > 1$ は平方因子をもたない整数) とする. $m \equiv 1 \pmod 4$ のとき $\omega = (1 + \sqrt{m})/2$ とおき, $m \equiv 2, 3 \pmod 4$ のとき $\omega = \sqrt{m}$ とおくと, K の整数環は $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ と表される. ω を単純有理連分数に展開する.

$$\omega = a_0 + \frac{1}{a_1} \, {}_{+} \, \frac{1}{a_2} \, {}_{+} \quad + \cdots + \frac{1}{a_n} \, {}_{+} \quad {}_{+} \, + \cdots$$

命題 7.11 ω の単純有理連分数への展開は周期的である.

ω の連分数展開は最初の a_0 を除いて, a_1 から周期的となる. 周期の長さを ℓ とすると, $n \geq 1$ に対して $a_{n+\ell} = a_n$ が成り立つ. このことは "簡約" という概念を使って説明されるがここでは省略する. $n \geq 1$ に対して $\omega_n = a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}} + \cfrac{1}{a_{n+2}} + \cfrac{1}{a_{n+3}} + \cdots$ (連分数を途中で打ち切った残りの項, 残余項と呼ぶ) とおく. 残余項の列 $\{\omega_n\}$ は K の数の列で, 長さ ℓ の周期をもつ.

定理 7.12 残余項の列 $\{\omega_n\}$ を一周期分かけた数 $\omega_1\omega_2\cdots\omega_\ell$ は K の基本単数である.

§8. K を n 次総実代数体 ($r_1(K) = n$, $r_2(K) = 0$) とする. K の 2 次拡大体 L で K の実素点のうち唯一つを除いて虚素点に延びるものを, 殆ど虚な 2 次拡大体という. L を K 上の殆ど虚の 2 次拡大体とする. K は総実代数体なので $r_1(L) = 2$, $r_2(L) = n-1$ となる. Dirichlet の単数定理より K の単数群の階数は $r(K) = n-1$, L の単数群の階数 $r(L) = n$ となる. K の単数は L の単数で, 単数群の階数の差は $r(L) - r(K) = 1$ なので, K の単数と独立な L の単数 η で $(\mathfrak{o}_L^\times : \mathfrak{o}_K^\times \times \langle\eta\rangle) < \infty$ となるものが存在する. σ_0, $\sigma_1 : L \hookrightarrow \mathbb{R}$ を L の 2 つの実素点, $\sigma_2, \cdots, \sigma_n : L \hookrightarrow \mathbb{C}$ を $n-1$ 個の虚素点とする. それらの K への制限 $\tau_1 = \sigma_0|_K = \sigma_1|_K$, $\tau_2 = \sigma_2|K, \cdots, \tau_n = \sigma_n|_K$ は総実代数体 K の n 個の異なる実素点である. $\xi, \eta \in L$ について, $|\sigma_0(\xi)| < |\sigma_0(\eta)|$, $|\sigma_1(\xi)| < |\sigma_1(\eta)|$, $|\sigma_2(\xi)| \leq |\sigma_2(\eta)|, \cdots, |\sigma_n(\xi)| \leq |\sigma_n(\eta)|$ なるとき, $||\xi|| < ||\eta||$ と定義する. $\mathfrak{A}$ を L の $\mathfrak{o}_K$-格子 (L に含まれる階数 2 の $\mathfrak{o}_K$-加群) とする.

定義 8.13 $\sigma_0(\alpha) > 0$ なる $\alpha \in \mathfrak{A}$ をとる. $\{\xi \in \mathfrak{A} : \xi \neq 0, ||\xi|| < ||\alpha||\} = \emptyset$ となるとき, α を $\mathfrak{A}$ の相対極小元であるという. $\mathfrak{A}$ の相対極小元全体のなす集合を $RM(\mathfrak{A})$ とおく.

定義 8.14 $\mathfrak{A}$ の相対極小元 α, β について, $\sigma_0(\alpha) < \sigma_0(\beta)$, $|\sigma_1(\alpha)| > |\sigma_1(\beta)|$, $|\sigma_2(\alpha)| \geq |\sigma_2(\beta)|, \cdots, |\sigma_n(\alpha)| \geq |\sigma_n(\beta)|$ なるとき, $\alpha \prec \beta$ と定義し, β を α の上位の相対極小元と呼ぶ. $\alpha \prec \gamma \prec \beta$ なる $\mathfrak{A}$ の相対極小元 γ が存在しないとき, $\alpha \to \beta$ と定義する. このとき α, β を隣の相対極小元という. 有向グラフ $(RM(\mathfrak{A}), \to)$ を RM-net と呼ぶ.

定義 8.15 $\mathfrak{A}$ の相対極小元 α, β で $\alpha \prec \beta$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}_K\alpha + \mathfrak{o}_K\beta$ なるものを $\alpha \prec_g \beta$ とおく. $\alpha \prec_g \gamma \prec_g \beta$ なる相対極小元 γ が存在しないとき, $\alpha \Rightarrow \beta$ と定義する. このとき α, β を隣の生成的相対極小元という. 有向グラフ $(RM(\mathfrak{A}), \Rightarrow)$ を gRM-net と呼ぶ.

定義 8.16 $\mathfrak{o}_K$-格子 $\mathfrak{A}$ に対して, $\mathfrak{o}_\mathfrak{A} = \{\alpha \in L : \alpha\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}\}$, $U_\mathfrak{A} = \{\alpha \in L^\times : \alpha RM(\mathfrak{A}) \subset RM(\mathfrak{A})\}$, $U_\mathfrak{A}^\times = \{\alpha \in L^\times : \alpha RM(\mathfrak{A}) = RM(\mathfrak{A})\}$ とおく. $\mathfrak{o}_\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{o}_K$ を含む L の整環で $\mathfrak{A}$ の整環という. 定数倍で向き $(\prec, \prec_g)$ は変わらないので, $U_\mathfrak{A}$, $U_\mathfrak{A}^\times$ をそれぞれ (有向グラフ (g)RM-net の) 自己相似群, 自己同型群と呼ぶ.

定理 8.17 $\xi \in L^\times$ に対して, $\mathfrak{A}_\xi = (1/\xi)\mathfrak{A}$ とおく. このとき $\mathfrak{o}_\mathfrak{A}^\times \subset U_\mathfrak{A}^\times \subset U_\mathfrak{A} \subset \bigcap_{\xi \in RM(\mathfrak{A})} RM(\mathfrak{A}_\xi)$ が成り立つ. 特に K の類数が 1 で $\mathfrak{A}$ が L のイデアル ($\mathfrak{o}_\mathfrak{A} = \mathfrak{o}_L$) なら $\mathfrak{o}_L^\times = U_\mathfrak{A}^\times = U_\mathfrak{A} = \bigcap_{\xi \in RM(\mathfrak{A})} RM(\mathfrak{A}_\xi)$ が成り立つ.

§9. 総実代数体 K 上の殆ど虚の 2 次拡大体 (殆ど虚の 2 次無理数) の単純 K-連分数への展開を, 以下の手続きで定義する. この連分数展開を高次連分数展開と呼ぶ.

《高次連分数展開》

[Step 1] $\lambda_0 \in RM(\mathfrak{A})$ をとり, $\mathfrak{A}_0 = (1/\lambda_0)\mathfrak{A}$ とおく. $1 \in RM(\mathfrak{A}_0)$ である.

[Step 2] $\mathfrak{A}_{n-1}$ に関して 1 の隣のもの λ_n をとり, $\mathfrak{A}_n = (1/\lambda_n)\mathfrak{A}_{n-1}$ とおく. $1 \in RM(\mathfrak{A}_n)$ である.

[Step 3] [Step 2] を再帰的に繰り返し, L の数の列 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ を得る.

実 2 次無理数の正則有理連分数への展開との対応が少し見にくいが, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ が有理連分数展開の残余項の列に対応する. 定理 7.12 の高次連分数への拡張が次の定理である.

定理 9.18 ([Step4]) 残余項の列 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots$ が周期を持つとする. 一周期分の積を取ったものを η とおくと, $\eta \in \mathfrak{o}_\mathfrak{A}^\times$ で $(\mathfrak{o}_L^\times : \mathfrak{o}_K^\times \times \langle\eta\rangle) < \infty$ を満たす.

この定理では K の類数に関する条件などは必要ない. ともかく残余項の列が周期をもてば, K の単数と独立な L の単数が得られる. しかし, [Step 2] の "隣の" にあたる物だが, 1 の隣の相対極小元は無数にあるため, 確定した計算アルゴリズムではない.

定義 9.19 $\mathfrak{A}$ の相対極小元 α に対して, 上位の隣の相対極小元の中で, σ_0 で最も小さい値に埋め込まれるもの β を, 最小上位相対極小元といい, $\alpha \overset{m}{\to} \beta$ とかく. 上位の隣の生成的相対極小元の中で, σ_0 で最も小さい値に埋め込まれるもの β' を, 最小上位生成的相対極小元といい $\alpha \overset{m}{\Rightarrow} \beta'$ とかく.

定理 9.20 K の類数が 1 ならば, [Step 2] を最小上位相対極小元を選んで得られる残余項の列は周期をもつ.

最小上位生成的相対極小元を選んで得られる残余項の列の場合は, 幾つかの条件のもとで周期をもつことが証明できる. ただし, その "条件" が問題で, 現時点で得ている結果では, 効率的な条件ではなく, "残余項の列が周期をもったなら" といっているのに近いもので, とても満足のいくものではない.

§10. "生成的" なる条件を加えない方が残余項の列として高さ (height) の小さい系列が得られるのだが, 次の残余項を求める ([Step 2]) のにかかる計算量が多くなり実用的ではない. 私の素朴なプログラムでは, 高さの大きな代数的数を扱うには近似の精度が不十分なため計算が破綻することがあった. また "生成的" としない場合より高さの小さい単数が求められるはずなのだが, 実際に計算してみると同じ単数か K の単数だけずれたものが得られた. "生成的" なる条件を課すると, 代数的数の近似精度の問題と検索量を減らすことができるので, 大きな基本単数が現れる場合でも周期の長い場合でも単数を計算することができた. 以下の例で高次連分数展開を実際に連分数の形に書いてみせるが, "生成的" とした場合にはその連分数の分子に K の単数が現れ, 単純 K-連分数になる. 実 2 次無理数を有理連分数に展開するとき分子が ± 1 (有理数体の単数) になるものを考えたことを思い出せば, 高次連分数展開において "生成的" なるものを考えることは計算技術的な面だけでなく理論的な要請でもある.

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ とおく. K は類数 1 の実 2 次体で, 基本単数は $1+\sqrt{2}$ である. $L = K(\sqrt{1+\sqrt{2}})$ は殆ど虚の 2 次拡大体である. $\lambda_0 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ は K には属さない L の単数だが, K の単数と独立ではない ($\lambda_0^2 = 1+\sqrt{2} \in \mathfrak{o}_K^\times$). $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}_K + \mathfrak{o}_K\lambda_0$ とおくと $\lambda_0 \in RM(\mathfrak{A})$ である ([Step 1]). $\mathfrak{A}_0 = (1/\lambda_0)\mathfrak{A} = \mathfrak{o}_K + \mathfrak{o}_K\, 1/\lambda_0$ とおく. $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})/\lambda_0 \in RM(\mathfrak{A}_0)$ で $1 \overset{m}{\to} \lambda_1$ である ([Step 2]). $1/\lambda_0$ の係数 $1+\sqrt{2}$ は K の単数なので, $\mathfrak{A}_0$ は 1 と λ_1 で生成される. つまり $1 \overset{m}{\Rightarrow} \lambda_1$ である. $\mathfrak{A}_1 = (1/\lambda_1)\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{o}_K + \mathfrak{o}_K\, 1/\lambda_1$ とおく. $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2} = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})/\lambda_1 \in RM(\mathfrak{A}_1)$ で, $1 \overset{m}{\to} \lambda_2$ である ([Step 2]). $1/\lambda_0$ の係数 $1-\sqrt{2}$ も K の単数なので, $1 \overset{m}{\Rightarrow} \lambda_2$ である. $\mathfrak{A}_2 = (1/\lambda_2)\mathfrak{A}_1$ とおくと, 実は $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_0$ となる. つまり $\mathfrak{A}_2$ に対して [Step 2] で得られる相対極小元は $\mathfrak{A}_0$ に対して得られた λ_1 に等しい. 以下 λ_1, λ_2 が繰り返される. $\eta = \lambda_1\lambda_2 = 2+\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}})$ は K の単数と独立な L の単数である.

この例で, 高次連分数展開が実 2 次無理数の正則有理連分数への展開の拡張で, 定理 9.18, 9.20 が定理 7.12 の拡張になっていることを確かめる. $\lambda_1 = (1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})/\lambda_0$ だったので $\lambda_0 = 1/(-1+(-1+\sqrt{2})\lambda_1)$ である. 同様に $\lambda_1 = 1/(1+(1-\sqrt{2})\lambda_2)$, $\lambda_2 = 1/((-2-\sqrt{2})+\lambda_1)$ なので,

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{-1+(-1+\sqrt{2})\lambda_1} = \frac{1}{-1\,+}\;\frac{-1+\sqrt{2}}{1+(1-\sqrt{2})\lambda_2} \\ &= \frac{1}{-1\,+}\;\frac{-1+\sqrt{2}}{1}\;\frac{1-\sqrt{2}}{+\,-2-\sqrt{2}\,+}\;\frac{-1+\sqrt{2}}{1}\;\frac{1-\sqrt{2}}{+\,-2-\sqrt{2}\,+}\;\cdots\end{aligned}$$

これは $\lambda_0 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ の周期的な K-連分数への展開である. [Step 2] を生成的に選んでいたので, 単純 K-連分数となった. 定理 9.20 より, この連分数展開の残余項の一周期分の積 $\eta = \lambda_1\lambda_2$ は K の単数と独立な L の単数である.

最後に少し周期の長い例と, 計算の完結していない例を挙げる. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{37})$, $L = K(\sqrt{\alpha})$ ($\alpha = (13+3\sqrt{37})/2$) とおく. $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = -41 < 0$ なので L/K は殆ど虚の 2 次拡大である. $\lambda_0 = \sqrt{\alpha}$ の単純 K-連分数への展開は長さ 43 の周期をもち, 一周期分の残余項の積を計算して次の単数を得た.

$$\begin{aligned}&(356681054758809194063606089546158722258951698387 65 + 586380041933549207105906211427247664992378193 2115\sqrt{37})/2 \\ &+ (451182174412400215488251447588524411767990570 3600 + 741738925636276812397656445318881607774284981629\sqrt{37})\sqrt{\alpha} \\ =&(6+\sqrt{37})^{30}\,(\frac{57702177558177015 + 49685801818128135}{2}\sqrt{37} + (15713325811983300 + 7668288872219621\sqrt{37})\sqrt{\alpha})\end{aligned}$$

同じ実 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{37})$ で $L' = K(\sqrt{\beta})$ ($\beta = (11+3\sqrt{37})/2$) とおく. $N_{K/\mathbb{Q}}(\beta) = -53 < 0$ なので L/K は殆ど虚の 2 次拡大である. $\sqrt{\beta}$ の単純 K-連分数展開は 200 項まで計算したが, その長さでは周期が得られなかった. 一般の K-連分数展開では近似精度や計算量の問題で 10 項以上は計算が進まず, 結局 K の単数と独立な L' の単数はこの方法ではまだ見つけられていない.