

楕円曲線の等分点へのガロア群の表現と保型形式

小川 裕之 (大阪大学大学院 理学研究科)

1. 序

Dirichlet の η 関数というのはとても面白い関数で、たくさんの不思議な性質を持ち、整数論のいろいろな場面に顔を出します。今回この報告で、 η 関数を使ったある計算を紹介いたします。ここでの内容のほとんどは、山本芳彦先生 (2004 年 9 月末逝去) が 3 年に亘る闘病生活の中で考えられていたものです。山本芳彦先生の計算の面白さ、理論に適った実験により新しい考え方を発見していく手法の一端をここに紹介できればと思います。

η 関数とは、複素上半平面 H 上の関数で

$$\eta(z) = e^{\frac{2\pi iz}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})$$

で定義されます。右辺の無限積は広義一様に絶対収束するので、 H 上の零点を持たない正則関数です。 $x = e^{2\pi iz/24}$ とおくと、 η 関数は x の冪級数として

$$\begin{aligned} \eta(z) &= x - x^{25} - x^{49} + x^{121} + x^{169} - x^{289} - \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-12}{n}\right) x^{n^2} \end{aligned}$$

と展開されます。Rademacher などにより $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用に関する変換公式が知られているのですが、 η 関数は重さ $1/2$ の保型性 (指標付き) を持ちます。ですから η 関数を 4 つ掛けると重さ 2 の (指標付き) 保型形式が得られます。例えば $\eta(z)^2 \eta(11z)^2$ は $\Gamma_0(11)$ に関する重さ 2 の cusp form (newform) です。 $\eta(z) \eta(2z) \eta(7z) \eta(14z)$ は $\Gamma_0(14)$ に関する重さ 2 の cusp form (newform) です。このようなことは非常に良く知られたもので多くの方々の多くの研究があります。ところで ($\Gamma_0(N)$ に関する) 重さ 2 の cusp form は、こうやって η 関数を適当に掛けたり割ったりして、作ることができるのでしょうか？ 実はそれだけではうまくいきません。どうして重さ 2 のもの η 関数からできたのか、得られた関数を調べてみます。4 つの η 関数を 2 つずつに分けて、それら重さ 1 の関数の性質を調べてみます。次節で詳しく調べますが、level $N = 11$ の場合 newform $\eta(z)^2 \eta(11z)^2$ は重さ 1 の cusp form $\eta(z) \eta(11z)$ の自乗になっています。山本芳彦先生は、このような観察をまずは最も単純と思われる、重さ 2 の cusp form の空間の次元が 1 の場合を調べるのが適切と考えました。調べる level N は 12 個 ($N = 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49$) です。山本芳彦先生が最後に指導された赤阪正純君が修士の研究テーマとして詳しく調べています。赤阪正純君はそれらの level に対して (η 関数の変換公式から決まる $\Gamma_0(N)$ の指標に関する) 重さ 1 の cusp form の空間の次元をもとめました。

以下この報告では level $N = 11, 19, 26$ について紹介します。種数が 1 となる level 11, 19 については、そのほとんどは赤阪正純君の研究がもとになっています。level 26 は種数が 1 でないけど導手 26 の \mathbb{Q} 上の楕円曲線のあるものを選びました。他の level でも同様の計算が可能で、そのそ

それぞれについてとても興味深い観察が得られます. 例えば level 23 (種数 2, 絶対既約), level 2 (種数 0, 多様体が出てこない?), level 43 (種数 3, 導手 43 の楕円曲線の同種類が 1 つ) などは典型例として面白いものがあります. 山本芳彦先生の研究手法は, 例えて言うなら “火の無いところに煙を立てる” ようなものです. この研究をしているさ中, “重さが 0 の保型関数が一番難しいですね” “種数 0 っていう何にも手がかりの無いところが一番面白いんですね” 山本芳彦先生にもう少し時間の無かったことがとても悔やまれます.

2. level 11

level $N = 11$ の場合を考える. $f(z) = \eta(z)\eta(11z)$ とおく. $x = e^{\frac{2\pi iz}{24}}$ とおくと

$$f(z) = x^{12} - x^{36} - x^{60} + x^{132} + x^{180} - x^{276} + \dots$$

で良く見るとすべて x^{12} の冪になっています. $y = x^{12} = e^{\pi iz}$ とおいて

$$f(z) = y - y^3 - y^5 + y^{11} + y^{15} - y^{23} + y^{27} - y^{31} - y^{33} - y^{37} + 2y^{47} + y^{49} + \dots$$

となる. これは結局 $\Gamma_0(11)$ の cusp $i\infty$ での Fourier 展開を求めたことになる. さて Rademacher の変換公式によると, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(11)$ に対して

$$f(\sigma z) = \chi(\sigma)(cz + d)f(z)$$

が成り立つ. ここで χ は $\Gamma_0(11)$ の位数 2 の指標で

$$\chi(\sigma) = \left(\frac{-11}{d}\right) \chi_2(\sigma)$$

で与えられる. 最初の $\left(\frac{-11}{d}\right)$ は拡張された Legendre 指標 (11 を法とする Diricheler 指標) で, χ_2 は

$$\chi_2 : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{mod} 2} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq S_3 \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{\pm 1\} \subset \mathbb{C}^\times$$

で与えられる $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の位数 2 の指標である. ここで sgn は置換群の符号とする. $\Gamma_0(11)$ の 2 つの cusp $0, i\infty$ のそれぞれでの $f(z)$ の Fourier 展開を (Rademacher の変換公式を使って) 計算すると, $f(z)$ が $\Gamma_0(11)$ の指標 χ をもつ重さ 1 の cusp form であることがわかる ($f(z) \in S_1(\Gamma_0(11), \chi)$). この重さ 1 の cusp form $f(z)$ を自乗すると重さが 2 になる. $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(11)$ に対して

$$f(\sigma z)^2 = (\chi(\sigma)(cz + d)f(z))^2 = \chi(\sigma)^2 (cz + d)^2 f(z)^2 = (cz + d)^2 f(z)^2$$

χ の位数が 2 であることに注意. $f(z)$ は $\Gamma_0(11)$ に関する重さ 2 の cusp form である. ところでもし $f(z)$ とは線形独立な指標 χ に関する重さ 1 の cusp form g があれば, fg も重さ 2 の cusp form ($fg \in S_2(\Gamma_0(11))$) になり先の f^2 とは線形独立になる. $S_2(\Gamma_0(11))$ の次元は 1 なので結局そのような g は存在しない. 即ち $S_1(\Gamma_0(11), \chi)$ の次元は 1 である.

ここで述べた次元の計算は, 前節で触れた, 山本芳彦氏に指導を受けた最後の学生の赤阪正純君が修士論文にまとめました. 赤阪君はさらに $S_2(\Gamma_0(N))$ の次元が 1 次元になるすべての場合 ($N = 11, 14, 15, \dots, 49$ の 12 個) に, η 関数 2 つの積 ($\eta(mz)\eta(nz)$) をうまく選んで ($N = mn$) その積が $\Gamma_0(N)$ の適当な指標 χ に関する重さ 1 の cusp form であることを示し, さらに多くの場合にその cusp form の空間の次元を求めました.

これまで重さ 1 の cusp form の多くが θ 関数を使って構成されていましたが, その場合は Dirichlet 指標からくる $\Gamma_0(N)$ の指標 ($\Gamma_1(N)$ で消えている) に関する正則 modular form になっていまし

た. また Deligne-Serre の定理などで, 重さ 1 の cusp form の L-関数がガロア群の適当な表現の Artin L-関数に等しいことが知られていますが, その場合もその cusp form の指標は Dirichlet 指標でした.

L-関数について調べてみます. cusp form $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n$ に付随する L-関数を

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

とおく. $f(z) = \eta(z)\eta(11z)$ について, L-関数 $L(s, f)$ は Euler 積

$$L(s, f) = \prod_p L_p(p^{-s})^{-1}$$

をもつ. ここで各 Euler 因子は

$$L_p(T) = \begin{cases} 1 & p=2 \\ 1-T & p=11 \\ 1-T^2 & p \text{ は } \mathbb{Q}(\sqrt{-11})/\mathbb{Q} \text{ で惰性} \\ (1-T)^2 \text{ or } 1+T+T^2 & p \text{ は } \mathbb{Q}(\sqrt{-11})/\mathbb{Q} \text{ で完全分解} \end{cases}$$

完全分解する p に対する p -因子 $L_p(T)$ は, π を p を割る $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ の素元とすると $(\mathbb{Q}(\sqrt{-11}))$ の類数は 1) $\pi \equiv 1 \pmod{2}$ ($\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ の整数環での合同) のとき $L_p(T) = (1-T)^2$, そうでないとき $L_p(T) = (1+T+T^2)^{-1}$ である. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ のイデアルの指標を使って書ける. K の (2) を法とするイデアルの類を $H(2)$ とおく. K は類数 1 で 2 は惰性し, K の単数群は $\{\pm 1\}$ ($1 \equiv -1 \pmod{2}$) なので, (2) を法とするイデアル類の数は 3 ($= (2^2 - 1)/1$) である. $H(2)$ の位数 3 の指標 λ をとり, λ の Hecke L-関数を $L(s, \lambda) = \prod_p (1 - \lambda(p) Np^{-s})^{-1}$ で定義すると

$$L(s, f) = L(s, \lambda)$$

を得る. 重さ 1 の cusp form $f(z) = \eta(z)\eta(11z)$ の L-関数が, Hecke L-関数として表すことができた.

L_2 を K の導手 (2) の類体とする. L_2 は K 上 3 次巡回拡大で (2) の外不分岐. 類体の一意性より L_2 は \mathbb{Q} 上ガロア拡大になる. 実際に L_2 は K 上 $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$ で定義され, \mathbb{Q} 上のその 3 次式の最小分解体である. L_2 の \mathbb{Q} 上のガロア群は S_3 に同型で, $\text{Gal}(L_2/K) (\simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の生成元 τ (位数 3) と, 複素共役 ι で生成される. ρ を $\text{Gal}(L_2/\mathbb{Q})$ の 2 次元既約表現の指標とする. S_3 の 2 次元既約表現は共役をのぞいてただ一つなので, その指標 ρ はただ一つに定まる. $L(s, \rho, L_2/\mathbb{Q})$ を指標 ρ に関する Artin L-関数とする. このとき

$$L(s, \lambda) = L(s, \rho, L_2/\mathbb{Q})$$

になるので, 重さ 1 の cusp form $f(z) = \eta(z)\eta(11z)$ の L-関数が, Artin L-関数として表された.

Deligne-Serre の定理の類似が η 関数の変換公式から現れた指標に対しても成り立つことを level $N = 11$ の場合に見た. 保型関数体の種数が 1 となる他の level N についても同等のことが言えますが, η 関数の積から得られる重さ 1 の cusp form を少し変形する必要がある. これについては次節の level $N = 19$ の場合に触れる.

ところで modular 曲線 $X_0(11) = \Gamma_0(11)\backslash\mathfrak{H}^*$ は種数が 1 つまり楕円曲線です.

$$X_0(11) : Y^2 + Y = X^3 - X^2 - 10X - 20$$

で定義される. $X_0(11)$ の 2 等分方程式は,

$$X^3 - X^2 - 10X - 79/4 = 0$$

で, 最小分解体 L' は \mathbb{Q} 上 S_3 -拡大である. 判別式は $-161051/16 = -2^{-4} 11^5$ なので, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ を中間体にもち, L/\mathbb{Q} は 2 と 11 の外不分岐である. L は K 上 3 次巡回拡大で分岐しうる素点は 2 と 11 の上にある. $11 - 1 = 10$ は 3 と素なので L/\mathbb{Q} は 2 のみ分岐で, 結局先の L_2 に一致する. 以上のことから, modular 楕円曲線 $X_0(11)$ の 2 等分点の体を L とおく. $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の 2 次元既約表現の指標 ρ の Artin L-関数 $L(s, \rho, L/\mathbb{Q})$ について

$$L(s, \rho, L/\mathbb{Q}) = \sum_n a_n n^{-s}$$

とする. Möllin 変換して

$$f(z) = \sum_n a_n q_2^n \quad (q_2 = e^{\pi iz})$$

とおくと, このとき $f(z)$ は $\Gamma_0(11)$ の指標 χ に関する重さ 1 の cusp form である.

3. level 19

level $N = 19$ のとき, $f(z) = \eta(z)\eta(19z)$ とおく. $x = e^{\frac{2\pi iz}{24}}$ とおくと,

$$f(z) = x^{20} - x^{44} - x^{68} + x^{140} + x^{188} - x^{308} - x^{380} - \dots$$

すべての項が x^4 の冪なので, $y = x^4 = e^{\frac{2\pi iz}{6}}$ とおくと,

$$f(z) = y^5 - y^{11} - y^{17} + y^{35} + y^{47} - y^{77} - y^{95} - y^{119} + y^{125} + \dots$$

となる. これも前節の level $N = 11$ のときと同様に, $\Gamma_0(19)$ の cusp $i\infty$ での $f(z)$ の Fourier 展開である. Rademacher の変換公式により, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(19)$ に対して

$$f(\sigma z) = \chi^5(\sigma) (cz + d) f(z)$$

が成り立つ. ここで χ は $\Gamma_0(19)$ の位数 6 の指標で,

$$\chi(\sigma) = \left(\frac{-19}{d}\right) \chi_6(\sigma) \quad \chi_6(\sigma) = e^{\frac{2\pi i}{6}(ac+cd+bd-bdc^2+3c)}$$

で与えられる. χ_6 についてもう少し詳しく見ると,

$$\chi_6 : \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } 6} \text{SL}_2(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \longrightarrow \langle \zeta_6 \rangle \subset \mathbb{C}^\times \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \zeta_6 \quad (= e^{\frac{2\pi i}{6}})$$

前節と同様に, $\Gamma_0(19)$ の 2 つの cusp $0, i\infty$ での $f(z)$ の Fourier 展開を計算すると $f(z)$ が $\Gamma_0(19)$ の指標 χ^5 に関する重さ 1 の cusp form であることがわかる ($f(z) \in S_1(\Gamma_0(19), \chi^5)$). level $N = 11$ のときと違って指標 χ の位数が 2 でないので, $f(z)$ を自乗して重さが 2 ののものを作っても指標が消えない. 上の χ の定義式より, $\ker \chi \supset \Gamma_1(19) \cap \Gamma(6) \supset \Gamma(6 \times 19)$ だから $\ker \chi$ も合同部分群である. cusp form $f(z)$ は合同部分群 $\ker \chi$ に関する重さ 1 の cusp form ($f(z) \in S_1(\ker \chi)$) と見ることできる. $\ker \chi$ はそれより小さな level の主合同部分群を含まないので, この見方では $f(z) = \eta(z)\eta(19z)$ の level は $114 (= 6 \times 19)$ となる. 前節の $\eta(z)\eta(11z)$ のときはその指標の核

は $\Gamma(22)$ を含む ($\Gamma(11)$ は含まない) ので level は $22 (= 2 \times 11)$ となる. これはあとで Hecke 作用素を考えるにあたり必要となる.

$$S_1(\ker \chi) = \bigoplus_{k=0}^5 S_1(\Gamma_0(19), \chi^k)$$

$S_1(\Gamma_0(19), \chi^1)$ に属する cusp form g が取れたなら, fg は $\Gamma_0(19)$ の変換に関して指標の部分が消える. つまり $fg \in S_2(\Gamma_0(19))$ になる. 逆に F を $\Gamma_0(19)$ に関する重さ 2 の newform とすると, F/f は $\Gamma_0(19)$ の指標 χ に関する重さ 1 の modular form になる. $\Gamma_0(19)$ の cusp で zero であることがわかれば $F/f \in S_1(\Gamma_0(19), \chi)$ を得る. η 関数はもともと上半平面で非零正則なので, F/f も上半平面で正則である. あと $\Gamma_0(19)$ の各 cusp で零であればよい. $2\pi i F(z) dz$ は modular 曲線 $X_0(19) = \Gamma_0(19) \backslash \mathfrak{H}^*$ の正則微分形式であり, また $X_0(19)$ は種数が 1 なので微分因子の次数は $0 (= 2(1-1))$ なので極も零点ももたない. $X_0(19)$ の任意の点において局所変数を t とすると $2\pi i F(z) \frac{dz}{dt}$ は非零正則である. $\Gamma_0(19)$ の cusp x_0 を $i\infty$ につつす整数係数の一次分数変換 $\varphi \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ を適当にとると, x_0 の局所変数として $t = e^{2\pi i \varphi(z)/h}$ (h はある正の整数) がとれる.

$$2\pi i F(z) \frac{dz}{dt} = h t^{-1} F(z) \frac{dz}{d\varphi(z)} = h t^{-1} F(\varphi(z))$$

$F(z)$ は cusp で丁度 1 位の零点になっている. 例えば cusp $i\infty$ では $q = e^{2\pi iz}$ が局所変数で $F(z) = (\text{const}) q + (\text{higher terms})$ (F は正規化されていたので (const) は 1) と展開される. 一方 $f(z) = \eta(z)\eta(19z)$ の cusp $i\infty$ での展開は先に求めていた. $y = e^{\frac{2\pi iz}{6}}$ で, $f(z) = y^5 + (\text{higher terms})$ であった. 従って $q = y^6$ に注意すれば $F/f = (\text{const}) y + (\text{higher terms on } y)$ を得る. F/f は cusp $i\infty$ で零点になる. もう一つの cusp 0 でも同様にして零点になっていることがわかる. 即ち F/f は $\Gamma_0(19)$ の指標 χ に関する重さ 1 の cusp form である ($F/f \in S_1(\Gamma_0(19), \chi)$). F/f の $i\infty$ での Fourier 展開を少し計算しておきます.

$$F/f = y + y^7 - y^{19} + 2y^{25} - y^{43} - 3y^{55} + y^{61} - y^{73} - 3y^{85} + 2y^{121} - \dots$$

f の展開で現れた y の冪指数は 6 を法として 5 余り, F/f の展開で現れたものは 6 を法として 1 余る. 展開を少し詳しく計算すると F/f と $\sqrt{3}f$ の係数に数論的乗法性があることが観察できる. 実際このことも証明できます. ここで $g_{\pm}(z) := F(z)/f(z) \pm \sqrt{3}f(z)$ とおく. g_{\pm} とともに $\ker \chi$ に関する重さ 1 の cusp form である. それぞれ L-関数を作ると, 係数に数論的乗法性があることから Euler 積表示をもつ. 実際

$$L(s, g_{\pm}) = \prod_p L_p(p^{-s})^{-1}$$

ここで各 Euler 因子は

$$L_p(T) = \begin{cases} 1 & p = 2, 3 \\ 1 + T & p = 19 \\ 1 - T^2 & p \text{ は } \mathbb{Q}(\sqrt{-19})/\mathbb{Q} \text{ で惰性} \\ 1 + T^2 \text{ or } 1 - T + T^2 & p \text{ は } \mathbb{Q}(\sqrt{-19})/\mathbb{Q} \text{ で完全分解} \\ \text{or } 1 \pm \sqrt{3}T + T^2 & \end{cases}$$

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$ は類数 1 で, 2 も 3 も惰性している. (6) を法とする合同類群 $H(6)$ は位数 24 の巡回群で 5 の上の素イデアル $\mathfrak{p}_5 = ((1 + \sqrt{-19})/2)$ で生成される. 位数 12 の, (6) を法とするイデアルの指標

$$\lambda: H(6) \longrightarrow \langle \zeta_{12} \rangle \in \mathbb{C}^*$$

を $\lambda(p_5) = \zeta_{12} = e^{\frac{2\pi i}{12}}$ で定義するとき,

$$L(s, g_+) = L(s, \lambda) (= L(s, \bar{\lambda}))$$

を得る. $L(s, g_-)$ についても

$$L(s, g_-) = L(s, \lambda^5) (= L(s, \bar{\lambda}^5))$$

従って, η 関数の積から得られた重さ 1 の cusp form g_{\pm} について, その L-関数は K 上の法 (6) の指標の Hecke L-関数であることがわかった. L_{λ} を, 指標 λ に関する K の上の類体とする. 前節同様 L_{λ} は \mathbb{Q} 上のガロア拡大体で, ガロア群は位数 24 の二面体群である. 結局 $L(s, g_{\pm})$ は $\text{Gal}(L_6/\mathbb{Q})$ の 2 次元既約表現の指標に関する Artin L-関数として表すことができる.

ところで (少し見方を変えて) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$ の法 (6) の指標 λ について, λ (λ^{11}), λ^5 (λ^7) の Hecke L-関数は, 重さ 1 の cusp form の L-関数になっていたわけだが, λ^3 (λ^9), λ^4 (λ^8), λ^6 の L-関数はどうなっているのだろうか. ここでは λ^4 について調べてみる. λ^4 は (6) を法とする位数 3 の指標になるのだが, λ^4 の導手は (2) になる. つまり λ^4 に関する K の類体は, 導手が (2) の K の類体 L_2 である. $L(s, \lambda^4) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ に対して, Möllin 変換して

$$f_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_2^n \quad (q_2 = e^{\pi iz})$$

具体的に係数を求めて

$$\begin{aligned} f_0(z) = & q_2 - q_2^5 - q_2^7 + q_2^9 - q_2^{11} - q_2^{17} + q_2^{19} + 2q_2^{23} + q_2^{35} - q_2^{43} - q_2^{45} - q_2^{47} \\ & + q_2^{55} - q_2^{61} - q_2^{63} - q_2^{73} + q_2^{77} + q_2^{81} + 2q_2^{83} + q_2^{85} - q_2^{95} - q_2^{99} + \dots \end{aligned}$$

さてここで, この関数 f_0 を自乗してみる. $f_0(z)$ が q_2 の奇関数 (奇数次の項しか現れない) なので, その自乗は q_2 の偶関数 (偶数次の項しか現れない). だから $q = q^2 = e^{2\pi iz}$ で

$$f_0(z)^2 = q - 2q^3 - 2q^4 + 3q^5 - q^7 + q^9 + 3q^{11} + 4q^{12} - 4q^{13} - 6q^{15} + \dots$$

これは $F(z)$ ($\Gamma_0(19)$ に関する重さ 2 の newform) に等しい!!

前節のように modular 楕円曲線 $X_0(19)$ の等分点の体との関係調べる. $X_0(19)$ は

$$X_0(19) : Y^2 + Y = X^3 + X - 9X - 15$$

で定義される楕円曲線で, 2 等分方程式は

$$X^3 + X^2 - 9X - 59/4 = 0 \quad \text{判別式} = -19^3/2^4$$

6 等分方程式は

$$\begin{aligned} & (X^3 - 15X^2 - 77X - 87) && \text{判別式} = -2^2 19^3 \\ & \times (X^3 + 4X^2 + 18X + 46) && \text{判別式} = -2^2 19^3 \\ & \times (X^6 + 15X^5 + 86X^4 + 105X^3 - 2X^2 + 123X + 38) = 0 && \text{判別式} = -2^4 3^3 19^4 \end{aligned}$$

結局 L_2 が 2 等分点の体で, L_{λ} が 6 等分点の体の部分体 (X -座標の体) になっている.

以上の結果は, 山本芳彦氏が亡くなる半年前に得たもので, とても不思議な, それでいてとても自然に見えます. 山本芳彦氏は $F/f, g_{\pm}$ について, もっと踏み込んだ説明を考えました. 素数 p に対

して重さ 1 の Hecke 作用素を次で定義します. level N の重さ 1 の cusp form $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ ($y = q_h = e^{\frac{2\pi iz}{h}}$) に対して

$$f|T_p = \sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n \quad b_n = a_{pn} + \left(\frac{-N}{p}\right) a_{n/p}$$

と定義します. また

$$f|U_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} y^n$$

と定義します. level $N = 19$ の今の場合に戻って, $f(z) = \eta(z)\eta(19z)$ とする. $N_0 = 6 \times 19 = 114$ とおく. このとき f と F/f で張られた 2 次元複素線形空間は, Hecke 作用素 T_p ($p \nmid N_0$), U_p ($p \mid N_0$) の作用で閉じていて, その作用は可換である. また T_5 に関して

$$F/f = f|T_5 \quad (F/f)|T_5 = 3f$$

この空間への T_5 の行列表現は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ なので

$$F/f \pm \sqrt{3}f$$

が Hecke 作用素の同時固有関数である. これは先の g_{\pm} に他ならない. Hecke 作用素 T_5 の作用で $f \in S_1(\Gamma_0(19), \chi^5)$ が, $f|T_5 = F/f \in S_1(\Gamma_0(19), \chi)$ に移る. $S_1(\ker \chi)$ への作用としては閉じている. $S_1(\ker \chi)$ の部分空間 $S_1(\Gamma_0(19), \chi) \oplus S_1(\Gamma_0(19), \chi^5)$ は Hecke 不変部分空間になっている.

さて Hecke 作用素を使うと, $f(z) = \eta(z)\eta(19z)$ とおく. この節のはじめに定めた $\Gamma_0(19)$ の指標 χ に関して $f(z) \in S_1(\Gamma_0(19), \chi^5)$ である. $y = e^{\frac{2\pi iz}{6}}$ で展開したときの冪指数は 6 を法として 5 に合同で, 6 を法として 5 に合同な $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})/\mathbb{Q}$ で完全分解する素数 5 をとる. このとき $f|T_5 \in S_1(\Gamma_0(19), \chi)$ で $f|T_5 f$ は $\Gamma_0(19)$ に関する重さ 2 の newform になる. $g_{\pm} = f|T_5 \pm \sqrt{3}f \in S_1(\ker \chi)$ は正規化された Hecke 固有形式で, L-関数 $L(s, g_{\pm})$ は $X_0(19)$ の 6 等分点の体のガロア群の 2 次元既約表現の指標の Artin L-関数に等しい. また $X_0(19)$ の 2 等分点の体のガロア群の 2 次元表現の指標の Artin L-関数を Möllin 変換して得られた関数 $f_0(z)$ は, $\Gamma_0(19)$ の重さ 1 の Hecke 固有形式で, 実は χ^3 を指標にもつ.

4. level 26

保型関数体の種数が 1 でない例 level $N = 26$ の場合を計算する. 重さ 2 の cusp form の空間 $S_2(\Gamma_0(26))$ の次元は 2 で, \mathbb{Q} 上定義された 2 つの Hecke 同時固有関数をもつ場合である. $f_1(z) = \eta(z)\eta(26z)$, $f_2(z) = \eta(2z)\eta(13z)$ とおく. どちらも $\gcd(1+16, 24) = \gcd(2+13, 24) = 3$ なので, cusp $i\infty$ で $y = x^3 = e^{\frac{2\pi iz}{8}}$ で展開される.

$$\begin{aligned} f_1(z) &= y^9 - y^{17}y^{-25} + y^{49} + y^{65} - y^{105} - y^{129} + y^{185} + \dots \\ f_2(z) &= y^5 - y^{21} - y^{37} + y^{85} - y^{109} + y^{117} + y^{125} + y^{141} - y^{189} - y^{197} + \dots \end{aligned}$$

Rademacher の変換公式により, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(26)$ に対して

$$\begin{aligned} f_1(\sigma z) &= \chi(\sigma)(cz+d)f(z) \\ f_2(\sigma z) &= \chi(\sigma)^5(cz+d)f(z) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで χ は $\Gamma_0(26)$ の位数 8 の指標で,

$$\chi(\sigma) = \left(\frac{-23}{d}\right) \chi_8(\sigma) \quad \chi_8(\sigma) = e^{\frac{2\pi i}{8}((a-2d-bdc)c_0+bd)}$$

($c = 26c_0$ とおいた) で与えられる. χ_8 についてもう少し詳しく見ると,

$$\begin{aligned} \chi_8 : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } 8'} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ mod } 8' &\longrightarrow \langle \zeta_8 \rangle \subset \mathbb{C}^\times \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \zeta_8 \quad (= e^{\frac{2\pi i}{8}}) \end{aligned}$$

ここで mod 8' は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を法 $\begin{pmatrix} 8\mathbb{Z} & 8\mathbb{Z} \\ 16\mathbb{Z} & 8\mathbb{Z} \end{pmatrix}$ でみたものとする. f_1, f_2 ともに $\Gamma_0(26)$ の cusp (4 つある) で零になる. 重さ 1 の cusp form である. $f_1 \in S_1(\Gamma_0(23), \chi)$, $f_2 \in S_1(\Gamma_0(23), \chi^5)$ である. cusp $i\infty$ での y -展開 (Fourier 展開) に現れる y の冪指数は f_1 が 8 を法として 1 と合同で, f_2 が 8 を法として 5 と合同になっている. 前節 level $N = 19$ のときに定義した Hecke 作用素の作用を見てみる. 素数 $p \equiv 5 \pmod{8}$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$ で惰性しない素数とする. $p = 5, 13, 37, 61$ など. Hecke 作用素を f_1 に作用させると,

$$f_1|T_5 = -y^5 + y^{13} - y^{21} + y^{37} + 2y^{45} - 3y^{85} + y^{109} - 3y^{125} + y^{141} + \dots$$

f_2 とは異なるが y -展開の冪指数は 8 を法として 5 と合同になっている.

$$f_1|U_{13} = f_2 \quad f_1|T_{37} = -f_1|T_5$$

f_2 は f_1 から Hecke 作用素で得られる. 以下すべて f_2 が $f_1|T_5$ の定数倍に等しい. f_2 に作用させてみると

$$f_2|T_5 = y + y^{17} + 2y^{25} - y^{65} + y^{81} - y^{105} - 2y^{113} + y^{121} - y^{129} - 2y^{153} + \dots$$

y -展開に現れる冪指数は 8 を法として 1 に合同であるが, f_1 とは異なる.

$$f_2|U_{13} = f_1 \quad f_2|T_{37} = -f_2|T_5$$

これらすべて $f_1 \leftrightarrow f_2$ で対称になる. y -展開の冪指数が 8 を法として 3 のものと 7 のものも作ることができる. そのためには, 素数 $p \equiv 3 \pmod{8}$ を $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$ で惰性しない素数をとる. $p = 3, 43, 131, 139$ など.

$$\begin{aligned} f_1|T_3 &= y^3 + y^{27} - y^{35} - y^{43} - y^{51} - y^{91} - y^{131} + y^{139} + 2y^{147} + y^{179} + \dots \\ f_2|T_3 &= -y^7 + y^{15} + y^{39} + y^{47} - y^{63} - y^{71} - y^{111} + y^{119} + y^{135} + y^{151} + \dots \end{aligned}$$

となる. 他の $p = 43, 131, 139$ では

$$\begin{aligned} f_1|T_{43} &= -f_1|T_3 & f_1|T_{131} &= -f_1|T_3 & f_1|T_{139} &= f_1|T_3 \\ f_2|T_{43} &= -f_2|T_3 & f_2|T_{131} &= -f_2|T_3 & f_2|T_{139} &= f_2|T_3 \end{aligned}$$

結局, f_1 を Hecke 作用素で動かして得られる関数の全体のなす複素線形空間を V_{26} とおくと, V_{26} の次元は 6 で, $f_1, f_1|T_3, f_1|T_5, f_2 (= f_1|U_{13}), f_2|T_3, f_2|T_5$ を基底にもつ. この空間での Hecke 同時固有関数は

$$\begin{aligned} g_1 &= 2f_1 + \sqrt{3}f_1|T_3 + f_1|T_5 + 2f_2 + \sqrt{3}f_2|T_3 + f_2|T_5 \\ g_2 &= 2f_1 - \sqrt{3}f_1|T_3 + f_1|T_5 + 2f_2 - \sqrt{3}f_2|T_3 + f_2|T_5 \\ g_3 &= 2f_1 + \sqrt{3}f_1|T_3 - f_1|T_5 - 2f_2 - \sqrt{3}f_2|T_3 + f_2|T_5 \\ g_4 &= 2f_1 - \sqrt{3}f_1|T_3 - f_1|T_5 - 2f_2 + \sqrt{3}f_2|T_3 + f_2|T_5 \\ g_5 &= -f_1 & -f_1|T_5 & +f_2 & +f_2|T_5 \\ g_6 &= -f_1 & +f_1|T_5 & -f_2 & +f_2|T_5 \end{aligned}$$

である。それぞれについて L -関数を作ると、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-26})$ の導手が \wp_2 (2 の上の素イデアル) の冪のイデアル指標の Hecke L -関数として書くことができる。さらに Galois 群の 2 次指標の Artin L -関数になると思われるが、まだ確かめてはいない。導手が 26 の \mathbb{Q} 上の楕円曲線の同種類は 2 つあるのだが、Artin L -関数としての表示はそれらの楕円曲線の 8 分点の体の Galois 群の 2 次指標からくるものと思われる。

$f_1(z) = \eta(z)\eta(26z)$ に Hecke 作用素を作用させて得た関数だが、これらから重さ 2 の cusp form を作る。 $F_1, F_2 \in S_2(\Gamma_0(26))$ を newform とする。

$$\begin{aligned} F_1 &= q - q^2 + q^3 + q^4 - 3q^5 - q^6 - q^7 - q^8 - 2q^9 + 3q^{10} + 6q^{11} + q^{12} + q^{13} + \dots \\ F_2 &= q + q^2 - 3q^3 + q^4 - q^5 - 3q^6 + q^7 + q^8 + 6q^9 - q^{10} - 2q^{11} - 3q^{12} - q^{13} + \dots \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} f_1 f_2 | T_3 &= -q^2 + 2q^3 - q^5 + q^6 - q^7 - q^8 - 4q^9 + 2q^{10} + 4q^{12} + q^{13} + \dots \\ &= (F_1 - F_2)/2 \end{aligned}$$

である。幾つか等式をあげると、

$$\begin{aligned} F_1 &= -f_1 | T_3 f_1 | T_5 = -f_2 | T_3 f_2 | T_5 \\ F_2 &= f_1 | T_3 (f_1 | T_5 + 2f_2) = f_2 | T_3 (f_2 | T_5 + 2f_1) \end{aligned}$$

これらのことから、 $f_1, f_2 | T_5 \in S_1(\Gamma_0(26), \chi)$, $f_1 | T_3 \in S(\Gamma_0(26), \chi^3)$, $f_2, f_1 | T_5 \in S_1(\Gamma_0(26), \chi^5)$, $f_2 | T_3 \in S_1(\Gamma_0(26), \chi^7)$ がわかる。またそれらがそれぞれの空間の基底になる。

参考文献

- [1] 赤坂 正純, 種数 1 の保型関数体の重さ 1 の newform について, 大阪大学大学院修士論文, 2005.
- [2] P. Deligne-J. P. Serre, *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 7, 1974, pp.507-530
- [3] H. Rademacher, *Topics in analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973
- [4] J. P. Serre, *Modular forms of weight one and Galois representations*, in "Algebraic Number Fields", ed. A. Fröhlich, Acad. Press, 1977
- [5] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami, Publishers and Princeton Univ. Press, 1971