種数 1 の保型関数体 $M_0(N)$ の newform の構成について
– η 関数による具体的な構成 –

赤坂 正純 (大阪大学大学院 理学研究科)
小川 裕之 (大阪大学大学院 理学研究科)
山本 芳彦 (大阪大学大学院 理学研究科)

η 関数の積が適当な level と指標付きの保型形式になることは, すでによく知らている. 例えば, $\eta(\tau)^2\,\eta(11\tau)^2$ は $\Gamma_0(11)$ に関する重さ 2 の cusp form で, $\eta(\tau)\,\eta(2\tau)\,\eta(7\tau)\,\eta(14\tau)$ は $\Gamma_0(14)$ に関する重さ 2 の cusp form である. 与えられた level に関する newform を見つける方法はいくらでもあるのだが, ここでは η 関数を使って具体的に構成する方法について考察してみたい. η 関数を使う利点は, Rademacher 等によって変換公式が具体的に書かれていること, 極や零点の解析がある程度可能であること, 2 次体の整数論とのかかわりの大きいことなどが挙げられる.

η 関数は, 無限積

$$\eta(\tau) = e^{2\pi i\tau/24} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2n\pi i\tau})$$

で定義された複素上半平面上の零点をもたない正則関数で,

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \epsilon(a,b;c,d)\sqrt{\frac{c\tau+d}{i}}\,\eta(\tau) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

なる変換公式をもつ (詳細は Rademacher などを参照). 雑な言い方だが η 関数は重さ 1/2 だから, 2 つの積をとると重さ 1 に, 4 つの積で重さ 2 になる. 今, $\Gamma_0(N)$ に関する保型関数体 $M_0(N)$ の種数が 1 の場合を考える. つまり $N = 11$, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49 の 12 個の level について, η 関数を使って newform を構成する. これらの場合には, 重さ 2 の cusp form の次元が 1 なので, 重さ 2 の cusp form を作ればそれが newform になる. 実際 $N = 17$, 19, 49 の 3 つを除くと, η 関数 4 つの積で重さ 2 の cusp form が得られる. 保型性や cusp での Fourier 展開などは, η 関数の定義式や Rademacher の変換公式から計算できる. 残った 3 つの level に対して重さ 2 の cusp form を求めるために, うまくいった 9 つの場合の仕組みを調べてみる. $N = 11$, 20, 27, 32, 36 の場合は, η 関数 2 つ

の積の平方になっている. 例えば $N=11$ のとき $f_1(\tau)=\eta(\tau)\,\eta(11\tau)$ とおくと, $f_1(\tau)^2$ が重さ 2 の cusp form である. また $f_1(\tau)$ は重さ 1 の指標 ε の cusp form である. ε は位数 2 の $\Gamma_0(11)$ の指標で,

$$\varepsilon(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \mathrm{sgn}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right))\left(\tfrac{d}{11}\right)$$

で与えられる. sgn は奇数 N に対して, $\mathrm{sgn}:\Gamma_0(N)\xrightarrow{\bmod 2}\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)\simeq S_3\xrightarrow{\mathrm{sgn}}\{\pm1\}$ で定義する. 指標の位数が 2 なので, f_1 の平方は指標をもたない重さ 2 の cusp form になる. f_1 は Hecke 作用素 T_p $(p\neq 2, 11)$, U_q $(q=2, 11)$ に関する固有形式になっている. この意味では f_1 の level は 22 か 44 とするべきかもしれないが, ともかく重さ 1 の Hecke 固有形式が見つかった. $N=20, 27, 32, 36$ の場合も同様で, 重さ 2 の cusp form は, ある重さ 1 の (位数 2 の) 指標をもつ Hecke 固有形式の平方である. $N=14$ の場合, $f_1(\tau)=\eta(\tau)\,\eta(14\tau)$, $f_2(\tau)=\eta(2\tau)\,\eta(7\tau)$ とおくと, それらの積 $f_1(\tau)\,f_2(\tau)$ が重さ 2 の newform であった. f_1, f_2 はそれぞれ適当な指標をもつ重さ 1 の正則保型形式である. Rademacher の変換公式から指標を計算すると, f_1 の指標 ε は位数 8 で, f_2 の指標は ε の共役になっている. $f_1\,f_2$ が指標を持っていないこととつじつまがあっている. Hecke 作用素の作用は $f_1|T_7=-f_2$, $f_2|T_7=-f_1$ で, $f_3=f_1|T_3$, $f_4=f_1|T_5$ $(=f_2|T_3)$ とおくと, $-f_3\,f_4=f_1\,f_2$ で, $\langle f_1|T_p : p\nmid 14\rangle=\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$ となっている. この 4 次元の Hecke 不変空間の中で 4 つの Hecke 固有形式 $\pm\sqrt{2}\,(f_1+f_2)-f_3+f_4$, $\pm\sqrt{2}\,(f_1-f_2)+f_3+f_4$, が見つかる. ただしこれら Hecke 固有形式は重さは 1 だが level の計算は易しくない. $\Gamma_0(14)$ に関する保型性は, f_1, f_2, f_3, f_4 の指標の値がばらばらなので期待できない. おそらく $\Gamma(14)$ か $\Gamma(56)$ ぐらいではなかろうか.

以上をまとめると, 保型関数体 $M_0(N)$ の種数が 1 の場合, $f_1(\tau)=\eta(\tau)\,\eta(N\tau)$ とおくと $\langle f_1|T_p : p\nmid 6N\rangle$ は高々 4 次元で, 1 次元の Hecke 不変空間の直和に分解する. それぞれ Hecke 固有形式は適当な level (N か $4N$ ぐらい, 未確認) の重さ 1 の newform になっている. また, 重さ 2 の newform は f_1 を Hecke 作用素で移したもの 2 つの積で得られる.