乗法群の 2 次簡約化とその応用

小川 裕之 (大阪大学大学院 理学研究科)

k を代数体, $\overline{k}$ をその代数閉包とする. $\alpha,\,\beta \in \overline{k}$ に対して,

$$h_{\alpha,\,\beta}\,:\,\mathbb{P}^1 \ni x \mapsto \frac{x-\alpha}{x-\beta} \in \mathbb{P}^1$$

$$A^{\times}_{\alpha,\,\beta} = h^{-1}_{\alpha,\,\beta}(\mathbb{P}^1 - \{0,\,\infty\})$$

とおく. $A^{\times}_{\alpha,\,\beta}$ $(= \mathbb{P}^1 - \{\alpha,\,\beta\})$ は, $k_{\{\alpha,\beta\}} = k(\alpha+\beta,\,\alpha\,\beta)$ 上定義された代数的集合である. universal domain Ω/k の任意の部分体 L について $\mathbb{P}^1(L) - \{0,\,\infty\} = L^{\times}$ であることに注意すると, $a,\,b \in A^{\times}_{\alpha,\,\beta}$ に対して,

$$a \otimes b = h^{-1}_{\alpha,\,\beta}(h_{\alpha,\,\beta}(a) \times h_{\alpha,\,\beta}(b)) \qquad a^{[-1]} = h^{-1}_{\alpha,\,\beta}(1/h_{\alpha,\,\beta}(a))$$

(右辺の “$\times$” は, 乗法群 $\mathbb{P}^1 - \{0,\,\infty\}$ における積) で, $A^{\times}_{\alpha,\,\beta}$ に乗法群の構造が入る. $a,\,b \neq \infty$ とすると

$$a \otimes b = \frac{a\,b - \alpha\,\beta}{a+b-\alpha-\beta} \qquad a^{[-1]} = \alpha+\beta-a$$

なので, この演算は $k_{\{\alpha,\beta\}}$ 上定義され, 単位元 $\infty = h^{-1}_{\alpha,\beta}(1)$ をもつ. $(A^{\times}_{\alpha,\,\beta},\,\otimes,\,\cdot^{[-1]},\,\infty)$ は, $k_{\{\alpha,\beta\}}$ 上の代数群になる. 特に $k_{\{\alpha,\beta\}} = k$ のとき, $A^{\times}_{\alpha,\beta}$ は k 上の代数群になる. $k_{\{\alpha,\beta\}} = k$ は, $\alpha,\,\beta \in k$ または, α と β が k 上共役のときに限り, このとき $\{\alpha,\beta\}$ を k-有理的と呼ぶ. 以下 k-有理的な組 $\{\alpha,\beta\}$ を扱うことにする.

$h_{\alpha,\beta}\,:\,A^{\times}_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1 - \{0,\infty\}$ だったので, $A^{\times}_{\alpha,\beta}$ は $\mathbb{P}^1 - \{0,\,\infty\}$ に $k(\alpha,\beta)$ 上同型である. k-有理的な $\{\alpha_1,\beta_1\}$, $\{\alpha_2,\beta_2\}$ に対して, k 上の代数群 $A^{\times}_{\alpha_1,\beta_1}$ と $A^{\times}_{\alpha_1,\beta_1}$ は $k(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$ 上同型である. さらに k 上同型になるための必要十分条件は, $k(\alpha_1,\beta_1) = k(\alpha_2,\beta_2)$ である.

従って k-有理的な $\{\alpha,\beta\}$ に対して, $A^\times_{\alpha,\beta}$ の k 同型類は, k の 2 次拡大体 K/k ($K=k(\alpha,\beta)$) で代表される. $A^\times_{\alpha,\beta}\mapsto k(\alpha,\beta)$ により,

$$\{A^\times_{\alpha,\beta}\,|\,\{\alpha,\beta\}\text{ は }k\text{-有理的}\}_{/\simeq_{/k}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{K/k\,|\,\text{高々 2 次の拡大}\}$$

2 次拡大 K/k に対応する k 同型類を $A^\times_{K/k}$ と書く.

K/k を 2 次拡大とする. k 上の代数群 $A^\times_{K/k}$ の k-有理点の全体 $A^\times_{K/k}(k)$ は群をなす. ($K=k$ のとき, $A^\times_{k/k}\simeq_{/k}\mathbb{P}^1-\{0,\infty\}$ 従って $A^\times_{k/k}(k)\simeq_{/k}k^\times$ である.) $A^\times_{K/k}(k)$ は, どの 2 拡大体 K をとっても, (k 同型類から) どの代表をとっても, 集合としては $\mathbb{P}^1(k)$ に等しい. $k(\alpha,\beta)=K$ なる k-有理的な $\{\alpha,\beta\}$ を選ぶことで, 群演算の自身は多少変わることになる. α,β は k 上共役なので, $a\in k$ に対して $h_{\alpha,\beta}(a)=\dfrac{a-\alpha}{a-\beta}\in K$ は k 上共役元の商. すなわち K/k でのノルムは 1 になる. 実際 $h_{\alpha,\beta}(\mathbb{P}^1(k))=\mathrm{Ker}\ N_{K/k}$ である. $\mathbb{P}^1(k)$ は, $A_{K/k}(k)$ と見ることで $\mathrm{Ker}\ N_{K/k}$ の k 上のモデルと思うことができる.

k の素点 ν をとる. ν の K への延長を ν' とおく. 完備体の高々 2 次の拡大 $K_{\nu'}/k_\nu$ に対しても上と同様に k_ν 上の代数群 $A^\times_{K_{\nu'}/k_\nu}$ が定義され, 代数群の reduction $A^\times_{K/k}\to A^\times_{K_{\nu'}/k_\nu}$ が定義される. ν が有限素点の場合には, ν の剰余体を $\mathbb{F}_\nu$, ν の K への延長 ν' に関する剰余体を $\mathbb{F}'$ と書いて, 有限体の高々 2 次の拡大 $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ に対しても $\mathbb{F}$ 上の代数群 $A^\times_{\mathbb{F}'/\mathbb{F}}$ が定義され, 代数群の reduction mod ν : $A^\times_{K/k}\dashrightarrow A^\times_{F'/F}$ が定義される.

$A^\times_{K/k}$ は, 乗法群 $\mathbb{G}_m$ を 2 次拡大 K/k でひねったものに過ぎないが, 定義体を K から k へ 2 次下げることに使える. 代数体, 代数曲線の整数論への応用が期待される. 本講演では, 幾つかの応用と具体的な計算にも触れる予定である.