SERRE 予想

安田 正大

Contents

1. はじめに

本稿では, 2 次元法 ℓ 表現の保型性に関する Serre 予想について解説をする.

Serre 予想とは, $GL_{2,\mathbb{Q}}$ 上の保型形式と $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元連続表現との対応を, 正標数の体を係数とする表現の場合に予想するものである. Langlands による, 標数 0 の体を係数とする同様の予想の類似として, Serre は 1973 年にすでに, このような対応の存在を予想しており, [Ser3, §3] にはその特別な場合が述べられている. その後, 1987 年に出版された Serre の論文 [Ser4] において, この対応を精密な形で述べた予想 (下記の予想 3.5) が与えられるに至った. 1980 年代の半ばごろになって, この予想が精密な形で述べられ, 出版されるようになった背景には, Frey 曲線を用いて Fermat 予想を証明する戦略がこの頃から脚光をあびるようになったことが挙げられる. この精密な予想を認めると実際に Fermat 予想の証明が可能になることが, Serre [Ser4, 4.2. THÉORÈME] によって示されている.

最近 Khare [Kh2], Khare-Wintenberger [KW1], [KW2], [KW3] によって Serre 予想に対する肯定的解決が与えられた. 本稿では彼らの証明についての解説を中心に Serre 予想証明の歴史的経緯, Serre 予想の応用, Serre 予想の一般化などについても解説をする.

Serre 予想の証明については, 幸い, [田 2], [萩], [山内 1] の 3 氏による日本語による解説があり, これらはインターネットを通じて入手可能である. Serre 予想の証明中で用いられ, これらの文献に詳しい説明があるが, 本稿では詳細を省略したような議論もいくつかあるので, これらの文献もあわせて参考にしていただけると幸いである.

以下本稿の構成について説明する．本稿では，まず §3 で予想の主張を述べる．まず精密でない予想を予想 3.4 として述べ，次に精密な予想を予想 3.5 として述べる．

精密な予想の主張中には，$N(\overline{\rho})$, $k(\overline{\rho})$, $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})$ という 3 つの量が現れるが，それらの量の定義を次の §4 で与える．

§3 で与える Serre 予想の定式化は Serre の原論文 [Ser4] に沿ったものであるが，法 ℓ Katz 尖点形式を用いた別の定式化もある．法 ℓ Katz 尖点形式は次の §6 で説明する議論の一部でも用いられるため，ここでその定義を紹介し，それを用いた Serre 予想の別の定式化を述べる．

Serre 予想の提出後しばらくの間は，精密でない予想 3.4 と精密な予想 3.5 との間にはどのくらい違いがあるかについての研究が進んだ．Mazur, Ribet [R1] [R3], Gross [Gr2], Carayol [Car2], Edixhoven [Ed], Coleman-Voloch [CV], Diamond [Dia1], Buzzard [Bu] らの研究によって，$\ell \geq 3$ または $k(\overline{\rho}) \neq 2$ のときには，$\overline{\rho}$ に対する予想 3.4 と予想 3.5 とが同値であることが証明された．§6 ではこの同値性の証明について解説する．なお予想 3.4 と予想 3.5 との同値性は，現在ではすべての $\overline{\rho}$ に対してわかっており，それは Khare-Wintenberger [KW2], [KW3] による精密な Serre 予想の証明の帰結として得られる．

§7 では，Serre 予想の証明の感じをつかむために，証明の方針についての幾何学的だが大雑把で厳密ではない説明を与える．§8 では，Serre 予想の証明において中心的役割をはたす 2 つの定理である，保型性持ち上げ定理，および整合系への持ち上げ定理の主張を述べる．§11 では，Serre 予想の証明で使われる帰納法の初段階について説明する．この初段階の部分には解析数論が用いられる．§10 では整合系への持ち上げ定理の証明の概略を説明する．§12 ではレベルが 1 の場合の Serre 予想の証明を説明する．§14 ではレベルが一般の場合の Serre 予想の証明を説明する．

§15 では，Serre 予想の証明途中の議論を用いることによって得られる，Wiles [Wil] によるものとは異なる Fermat 予想の証明について述べる．§16 では，2 次元 Artin 表現についての Artin 予想への Serre 予想の応用について述べる．§17 では Serre 予想を一般化する最近の試みや将来の展望について述べる．

謝辞. 本原稿の執筆に当たり，サマースクールの主催者のお三方には大変お世話になりました．本原稿に書くべき内容について有益なご示唆をくださいました落合理氏，編集作業でお忙しい身であるにも関わらず，なかなか執筆の進まない筆者を叱咤激励してくださいました千田雅隆氏，そして本稿の内容について，誤りや改良すべき点をたくさんご指摘してくださいました山内卓也氏に心より感謝申し上げます．

九州大学の田口雄一郎氏には, Serre 予想の重さの最適化について, および Serre 予想の一般化に関するいくつかの文献についてご教示くださいましたことを感謝いたします. 教わりました内容がこの原稿にあまり反映されていないことを申し訳なく思います.

東北大学の小林真一氏には, Ribet [R1], [R3] の議論に関する, この原稿のもととなるノートを作成する際に, お手伝いしてくださいましたことを感謝いたします.

ケンブリッジ大学の吉田輝義氏には, 本原稿のもととなった, 2009 年度整数論サマースクール講演のための打ち合わせの際にお世話になりましたことを感謝いたします.

慶応義塾大学の坂内健一氏, 防衛大学の大渓幸子氏には, 訳語について有益なご教示を下さいましたことを感謝いたします.

東京大学の萩原啓氏には, 完成前の原稿に目を通し, いくつもの誤りをご指摘くださいましたことを感謝いたします.

2. 記号

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ, 有理整数のなす環, 有理数のなす体, 実数のなす体, 複素数のなす体とする. $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を固定する. 代数体 $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ に対し, G_F で F の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ を表わす. F の素点 v に対し, F の v での完備化を F_v で, v での分解群を $D_v \subset G_F$ で, v での惰性群を I_v で表わす.

素数 ℓ に対し, 位数 ℓ の体 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ を $\mathbb{F}_\ell$ で表わす. χ_ℓ で $G_\mathbb{Q}$ の ℓ 進円分指標 $\chi_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_\ell^\times$, もしくは $G_\mathbb{Q}$ の部分群へのその制限を表わす. ω_ℓ で法 ℓ 円分指標 $\omega_\ell : G_\mathbb{Q} \to \mathbb{F}_\ell^\times$ またはその Teichmuller 持ち上げ, もしくは $G_\mathbb{Q}$ の部分群へのそれらの制限を表わす.

3. 予想の主張

この節では Serre 予想の主張がどのようなものであるかを説明する. そのために, 少し記号の準備をする.

ℓ を素数とする. 位数 ℓ の有限体 $\mathbb{F}_\ell$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ をひとつ固定する. $c \in G_\mathbb{Q}$ を複素共役とする.

定義 3.1. 連続表現 $\overline{\rho} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ が奇であるとは, $\overline{\rho}(c)$ の行列式が -1 に等しいことをいう. とくに $\ell = 2$ のとき $\overline{\rho}$ はつねに奇である.

定義 3.2. 既約かつ奇な連続表現 $\overline{\rho} : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を Serre 型の表現, または S 型の表現とよぶ.

$\mathbb{F} \subset \overline{\mathbb{F}}_\ell$ を有限体とする, 連続表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ に対し, 合成 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を $\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ で表わす. $\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ が S 型のとき $\overline{\rho}$ を S 型の表現とよぶ.

N, k を 1 以上の整数とする. $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ を $\Gamma_1(N)$ に関する重さ k の尖点形式であって, 条件

- すべての整数 $n \geq 1$ に対し, f に Hecke 作用素 T_n をほどこした $T_n f$ は f の定数倍となる.
- すべての $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ に対し, f にダイアモンド作用素 $\langle a \rangle$ をほどこした $\langle a \rangle f$ は f の定数倍となる.

をみたすものとする. 本稿ではこのようなものをタイプ (N, k) の同時 Hecke 固有形式とよぶ. さらに $f \neq 0$ と仮定する. N を法とする Dirichlet 指標

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$$

が唯一つ存在して, $\langle a \rangle f = \varepsilon(a) f$ が任意の $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ について成り立つ. f をタイプ (N, k, ε) の同時 Hecke 固有形式とよぶ.

ℓ を素数とし, 同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ をひとつ固定する. $\rho_{f,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を, Deligne [De] の構成した f に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元既約表現とする.

定義 3.3. 連続表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ がタイプ (N, k) (resp. タイプ (N, k, ε)) で保型的であるとは, タイプ (N, k) (resp. タイプ (N, k, ε)) の 0 でない同時 Hecke 固有形式 $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ が存在して, $\overline{\rho}$ の半単純化が ρ_f の法 ℓ 還元の半単純化と同値になることをいう. ある $N \geq 1$, $k \geq 2$ が存在して $\overline{\rho}$ がタイプ (N, k) で保型的となるとき, $\overline{\rho}$ は保型的であるという.

予想 3.4 (弱い Serre 予想). $\overline{\rho}$ を S 型の表現とすると, $\overline{\rho}$ は保型的である.

精密な Serre 予想の主張を述べるためには, S 型の表現 $\overline{\rho}$ に対し

- ℓ と素な整数 $N(\overline{\rho}) \geq 1$.
- 指標 $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho}) : (\mathbb{Z}/N(\overline{\rho})\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$.
- 整数 $k(\overline{\rho})$ で $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq 2[\ell^2/2]$ をみたすもの.

を導入しないといけない. これらの定義, 中でも $k(\overline{\rho})$ の定義は少し複雑であるため, 次節 § 4 に回すことにする.

予想 3.5 (精密な Serre 予想). $\overline{\rho}$ を S 型の表現とする. $N(\overline{\rho})$, $k(\overline{\rho})$, $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})$ を次節 § 4 で与えられるものとする. このとき $\overline{\rho}$ はタイプ $(N(\overline{\rho}), k(\overline{\rho}))$ で保型的である. さらに $\ell \geq 5$ であれば, $\overline{\rho}$ はタイプ $(N(\overline{\rho}), k(\overline{\rho}), \widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho}))$ で保型的である.

注 3.6. Serre の原論文 [Ser4, 3.2] では, $\ell \geq 5$ と仮定せずに, 予想 3.5 の最後の主張に相当する主張を述べている. ただし [Ser4, 3.2] では, 上の $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho}) : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ とは値域の違う指標 $\varepsilon(\overline{\rho}) : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ を用い,

(3.1) タイプ $(N(\overline{\rho}), k(\overline{\rho}), \varepsilon(\overline{\rho}))$ の $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数同時 Hecke 固有尖点形式

の概念を導入して予想を述べている (次節 § 4 で $\varepsilon(\overline{\rho})$ の定義も与える). そのため [Ser4, 3.2] の予想は, 上の予想 3.5 と ($\ell \geq 5$ と仮定していない点を除くと) 同値だが, 定式化がわずかに異なる. Serre [Ser4, 3.2] の定式化は, 予想を主張中で $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ と $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の剰余体との同一視を用いず, 同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する必要もないという利点があるが, 本稿では (3.1) の概念 (これは §5 で Katz 保型形式を用いて定義する類似の概念とは少し異なる) を導入する手間を省くため, 予想 3.5 の形の定式化を採用した.

注 3.7. 本稿の定義 3.3 では, $\overline{\rho}$ が保型的であるということを, 空間 $S_k(\Gamma_1(N))$ および同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を用いて定義したが, それとは別に, 本稿 §5 で定義を復習する $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数の Katz 尖点形式 ([Ka2], [Gr2], [Ed] を参照) を用いて, $\overline{\rho}$ が保型的であることを定義する流儀もある. 後者については §5 で少し触れる. Khare-Wintenberger [KW2] [KW3] による Serre 予想の証明中では, 後者の流儀での保型性は活躍しないため, 本稿では定義 3.3 を採用した.

2006 年に出版された論文 [Kh2] で Khare は $N(\overline{\rho}) = 1$ の場合に, $\overline{\rho}$ に対する精密な Serre 予想を肯定的に解決した. さらに最近 Khare-Wintenberger [KW2] [KW3] は, $\ell = 2$ の場合にある保型性持ち上げ定理を仮定した下で, 精密な Serre 予想を肯定的に解決した. 彼らの仮定した保型性持ち上げ定理が Kisin [Ki5] によって証明されたことにより, 現在では精密な Serre 予想が肯定的に完全解決している.

定理 3.8. 精密な Serre 予想 3.5 は正しい.

本稿の主な目標は, Khare [Kh2], Khare-Wintenberger [KW2] [KW3] による定理 3.8 の証明について解説を与えることである.

予想 3.5 が発表されてからしばらくの間は, 予想の証明そのものではなく, 弱い予想 3.4 と強い予想 3.5 とが同値かどうかという点についての研究が進んだ.

Khare-Wintenberger の仕事 [KW2] [KW3] 以前に, Mazur, Ribet [R1], Carayol [Car2], Livne [Li], Ash-Stevens [ASt], Jordan-Livne [JL], Gross [Gr2], Coleman-Voloch [CV], Edixhoven [Ed], Ribet [R3], Diamond [Dia1], Buzzard [Bu] らによって次が証明されていた.

定理 3.9. $\overline{\rho}$ を S 型の表現とする. $\ell \geq 3$ であるか, または $k(\overline{\rho}) \neq 2$ をみたすとする. このとき, $\overline{\rho}$ について弱い予想 3.4 が成り立てば $\overline{\rho}$ について予想 3.5 が成り立つ.

注 3.10. Buzzard [Bu] では, $\ell = 2$, $k(\overline{\rho}) = 2$ となる $\overline{\rho}$ に対しても, $\overline{\rho}$ に関するとある条件の下で弱い予想 3.4 と予想 3.5 との同値性を証明している.

Khare-Wintenberger [KW2] [KW3] による予想 3.5 の証明の途中でも, 定理 3.9 の一部 (特に重さの最適化に関する部分) が用いられる.

4. $N(\overline{\rho})$, $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})$, $k(\overline{\rho})$ の定義

$\overline{\rho}$ を S 型の表現とする. この節では, 予想 3.5 の主張中に登場した $N(\overline{\rho})$, $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})$, $k(\overline{\rho})$ の定義を与える.

4.1. $N(\overline{\rho})$ **の定義.** $N(\overline{\rho})$ は $\overline{\rho}$ の Artin 導手であり,

$$N(\overline{\rho}) = \prod_{p \neq \ell} p^{\mathrm{art}_p(\overline{\rho})}$$

で与えられる. 定義により $N(\overline{\rho})$ は ℓ と素である. $\mathrm{art}_p(\overline{\rho})$ は $\overline{\rho}$ の p での分解群 $D_p \subset G_{\mathbb{Q}}$ への制限 $\overline{\rho}|_{D_p}$ だけから決まる 0 以上の整数である. $G_p = \rho(D_p)$ とおくと, これは $\mathbb{Q}_p$ の有限次ガロア拡大体の Galois 群とみなせるから, 各整数 $i \geq 0$ に対し, 下つき高次分岐群 $G_{p,i} \subset G_p$ が定まる ([Ser1, IV] を参照). 特に $G_{p,0}$ は p での惰性群, $G_{p,1}$ は p での暴惰性群となる. このとき

$$\mathrm{art}_p(\rho) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{[G_p : G_{p,i}]} \dim_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(V/V^{G_{p,i}})$$

である. この定義からは自明でないが, $\mathrm{art}_p(\rho)$ は 0 以上の整数となる.

4.2. $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})$ **の定義.** 整数 $k \in \mathbb{Z}$ であって, $(\det \overline{\rho})\omega_\ell^{1-k} : G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ が ℓ で不分岐となるものを選ぶ. このとき, $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho}) : (\mathbb{Z}/N(\overline{\rho})\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ および, $\varepsilon(\overline{\rho}) : (\mathbb{Z}/N(\overline{\rho})\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ はそれぞれ, 固定した同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccc}
G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} & \xrightarrow{(\det \overline{\rho})\omega_\ell^{1-k}} & \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\
\cong\downarrow & & \varepsilon(\overline{\rho})\uparrow & & \cong\downarrow \\
\widehat{\mathbb{Z}}^\times & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/N(\overline{\rho})\mathbb{Z})^\times & \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})} & \mathbb{C}
\end{array}$$

を可換にする唯一つの指標である. $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})$, $\varepsilon(\overline{\rho})$ は途中で選んだ整数 k のとりかたに依存しない. また後で定義する整数 $k(\overline{\rho})$ は $\ell - 1$ を法として k と合同である.

4.3. $k(\overline{\rho})$ **の定義.** 整数 $k(\overline{\rho})$ は $\overline{\rho}$ の ℓ での分解群への制限にしか依存しないが, 定義が面倒である. 次のように場合分けをして $k(\overline{\rho})$ を定義する:

- **Case 1:** $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が既約のとき.
- **Case 2:** $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が可約のとき. この場合はさらに 3 つに場合分けをする:
  - **Case 2.1:** $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ が自明のとき.
  - **Case 2.2:** $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ が自明ではないが半単純のとき.
  - **Case 2.3:** $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ が半単純でないとき. この場合をさらに 2 つに場合分けをする.
    - **Case 2.3.1:** 適当に指標でひねると有限群スキームから来るとき.
    - **Case 2.3.2:** 適当に指標でひねっても有限群スキームから来ないとき. この場合をさらに 2 つに場合分けをする.
      - **Case 2.3.2.1:** $\ell \geq 3$ のとき.
      - **Case 2.3.2.2:** $\ell = 2$ のとき.

Case 1: $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ **が既約のとき.** この場合に $k(\overline{\rho})$ の定義をする前に, レベル 2 の基本指標について復習しておく. $\ell^{1/(\ell^2-1)} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を ℓ の ℓ^2-1 乗根とし, 指標 $\chi : I_\ell \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を $\chi(\sigma) = \sigma(\ell^{1/(\ell^2-1)})/(\ell^{1/(\ell^2-1)})$ によって定めると, これは $\ell^{1/(\ell^2-1)}$ の選び方によらない. 指標 $\psi : I_\ell \to \mathbb{F}_{\ell^2}^\times$ がレベル 2 の基本指標であるとは, 体の埋め込み $\mathbb{F}_{\ell^2} \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell$ が存在して, 合成 $I_\ell \xrightarrow{\psi} \mathbb{F}_{\ell^2}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ が χ に一致することをいう. レベル 2 の基本指標はちょうど 2 つ存在する.

$\psi, \psi' : I_\ell \to \mathbb{F}_{\ell^2}^\times$ を 2 つのレベル 2 の基本指標とする. このとき $\overline{\rho}$ の惰性群 I_ℓ への制限は次の形である:

$$\overline{\rho}|_{I_\ell} \sim \begin{pmatrix} \psi^\alpha & 0 \\ 0 & \psi'^\alpha . \end{pmatrix}.$$

ここで

ψ は位数 ℓ^2-1 であり, 既約性の仮定により α は $\ell+1$ の倍数ではないから, $\alpha = \ell a + b$ の形に書いたとき, $0 \leq a < b \leq \ell-1$ であると仮定しても一般性を失わない. このとき $k(\overline{\rho}) = 1 + \alpha$ と定義する. 定義により $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell^2 - \ell$ が成り立つ.

Case 2: $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ **が可約のとき.**

Case 2.1: $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ **が自明のとき.** このときは $k(\overline{\rho}) = \ell$ とおく.

Case 2.2. $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ **が自明ではないが半単純のとき.** このとき, $\overline{\rho}$ の惰性群 I_ℓ への制限は

$$\overline{\rho}|_{I_\ell} \sim \begin{pmatrix} \omega^a & 0 \\ 0 & \omega^b \end{pmatrix}$$

の形である. ここで, $(a,b) \neq (0,0)$ であり, また $0 \leq a \leq b \leq \ell - 2$ であると仮定しても一般性を失わない. $k(\overline{\rho}) = 1 + \ell a + b$ とおく. このとき $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell^2 - \ell - 2$ である.

Case 2.3: $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ **が半単純でないとき.** このとき, $\overline{\rho}$ の惰性群 I_ℓ への制限は

$$\overline{\rho}|_{I_\ell} \sim \begin{pmatrix} \omega^a & * \\ 0 & \omega^b \end{pmatrix}$$

$1 \leq a \leq \ell - 1$, $0 \leq b \leq \ell - 2$ の形である.

Case 2.3.1: $a \neq b + 1$ **または** $\overline{\rho}|_{D_\ell} \otimes \chi_\ell^{-b}$ **が有限のとき.** ここで有限というのは $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_\ell$ 上の有限平坦群スキームから来る, という意味であり, これは $a = b + 1$ かつ "peu ramifie" と同値であることが知られている. この場合は, $k(\overline{\rho}) = \min(1 + \ell a + b, 1 + \ell b + a)$ とおく. このとき $k(\overline{\rho}) \in [2, \ell^2 - \ell]$ であり, 両端を達成するのはいずれも $a = b + 1$ の場合である.

Case 2.3.2: $a = b + 1$ **かつ** $\overline{\rho}|_{D_\ell} \otimes \chi_\ell^{-b}$ **が有限でないとき.**

Case 2.3.2.1: $\ell \neq 2$ **のとき.** $k(\overline{\rho}) = \ell + \ell b + a = (\ell + 1)a$ とおく. このとき $\ell + 1 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell^2 - 1$ である.

Case 2.3.2.2: $\ell = 2$ **のとき.** このときは $k(\overline{\rho}) = 4$ とおく.

以上で整数 $k(\overline{\rho})$ の定義は終わりである. このような複雑な定義が考え出された技術的背景として,

(1) Deligne, Fontaine がそれぞれ, 通常 (ordinary) の場合, 重さが低い場合, レベルが ℓ と素な楕円保型形式に伴う ℓ 進表現を ℓ での分解群に制限したものの法 ℓ 還元の形を求めていたこと ([Ed, §2] を参照).

(2) $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数の Katz 尖点形式の空間に対する θ 作用素の理論. ([Ka2], [Ed, 3, 7] を参照. [田 1] にも少し説明がある.)

の 2 つがある.

5. 法 ℓ Katz 尖点形式

次節 §6 において定理 3.9 の証明を与えるが, その証明中で, 重さの最適化というプロセスを実行する際に, $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数の Katz 尖点形式, の空間, およびその空間上の θ 作用素とよばれる作用素が重要な役割を果たす. そのための準備と

して, この節では Katz 保型形式, および法 ℓ Katz 保型形式上の θ 作用素について復習する. 本稿では Katz 保型形式についての必要最低限の知識を紹介するにとどめる. 特に q 展開, Hasse 不変量について本稿では詳しくは触れない. これらの話題については [Ka2], [Ed], [Gr2] に記述がある.

$N \geq 1$ を整数, R を単位的可換環とする. R において N が可逆と仮定する. $k \geq 1$ を整数とする. R 係数のタイプ (N,k) の Katz 保型形式とは, R 上のスキーム S と S 上の一般化された楕円曲線 E, および S 上の群スキームの埋め込み $\alpha : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S \to E[N]$ からなる 3 つ組 (S,E,α) に対し, S 上の可逆層 $\omega_{E/S}^{\otimes k} = (0^*\Omega^1_{E/S})^{\otimes k}$ の切断 $f(S,E,\alpha) \in \Gamma(S, \omega_{E/S}^{\otimes k})$ を対応させる規則 f であって, 次の条件をみたすもののことである: 2 つの 3 つ組 (S,E,α), (S',E',α') と R 上のスキームの射 $\varphi : S' \to S$, および S' 上の一般化された楕円曲線の同型 $\beta : E' \cong E \times_S S'$ であって, β が α, α' と整合的なものが与えられたとき, β の誘導する同型 $\Gamma(S', \omega_{E'/S'}^{\otimes k}) \cong \Gamma(S', \varphi^*\omega_{E/S}^{\otimes k})$ は $f(S',E',\alpha')$ を $f(S,E,\alpha)$ の S' への引き戻しに送る.

R 係数のタイプ (N,k) の Katz 保型形式 f が Katz 尖点形式であるとは, N の任意の約数 d, および 3 つ組 (S,E,α) であって E が S 上の Néron d 角形になるものに対し, に対し, $f(S,E,\alpha) = 0$ が成り立つことをいう. R 係数のタイプ (N,k) の Katz 尖点形式 f 全体のなす R 加群を $S_k(\Gamma_1(N))_R$ で表わす.

$\mathfrak{H}$ を複素上半平面とする. $\Gamma_1(N)\backslash(\mathfrak{H} \amalg \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ を, $\mathbb{C}$ 上の一般化された楕円曲線のモジュライ空間とみなすと, $R = \mathbb{C}$ のときの $S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ は, 群 $\Gamma_1(N)$ に関する重さ k の尖点形式のなす空間 $S_k(\Gamma_1(N))$ と同一視される.

通常の $S_k(\Gamma_1(N))$ と同様, 空間 $S_k(\Gamma_1(N))_R$ にも Hecke 作用素 T_n (ここで n は 1 以上の整数), およびダイアモンド作用素 $\langle a \rangle$ (ここで a は $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$) の元) を作用させることができる. $f \in S_k(\Gamma_1(N))_R$ が同時 Hecke 固有形式であるとは, すべての T_n, $\langle a \rangle$ に関する固有元となることをいう.

ℓ を N と素な素数とする. 以下では主に $R = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ の場合を考える. Deligne (cf. [DS, Theorem 6.7]) は 0 でない同時 Hecke 固有形式 $f \in S_k(\Gamma_1(N))_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ に対し, f に付随する半単純 2 次元連続 Galois 表現 $\overline{\rho}_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ の同値類を構成した. 定義 3.3 においては, $\overline{\rho}$ が保型的であるということを, 空間 $S_k(\Gamma_1(N))$ および同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を用いて定義したが, そのかわりに $S_k(\Gamma_1(N))_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ を用いて, $\overline{\rho}$ が保型的であることを定義する流儀もある. 両者を区別するため, 一般的な用語ではないが, 本稿では後者の意味で保型的であることを Katz 保型的であるとよぶことにする.

不等式 $N \geq 2$, $\ell \geq 5$, $k \leq 12$ のうちの少なくともひとつが成り立ち, かつ $k \geq 2$ であれば $\overline{\rho}$ がタイプ (N,k) で保型的であることと, タイプ (N,k) で

Katz 保型的であることとは同値である. $k=1$ のとき, $\overline{\rho}$ がタイプ $(N,1)$ で保型的であるという性質は扱いが難しく, $k=1$ の場合を取り扱わない形で予想 3.5 は述べられている. 一方 $\overline{\rho}$ がタイプ $(N,1)$ で Katz 保型的であるという性質は, 比較的取り扱いが易しい. 以下に予想 5.1 として述べるように, Katz 保型的であるという性質を用いて精密な Serre 予想を定式化する流儀もあるが, その予想の主張中では $k=1$ の場合も取り扱われている.

S 型の表現 $\overline{\rho}$ に対し, 整数 $k'(\overline{\rho}) \geq 1$ を以下のように定義する.

- §4 の場合分け中の Case 2.1 において $k'(\overline{\rho}) = 1$.
- §4 の場合分け中の Case 2.3.2.2 において $k'(\overline{\rho}) = 3$.
- その他の場合 $k'(\overline{\rho}) = k(\overline{\rho})$.

予想 5.1. $\overline{\rho}$ を S 型の表現とする. $N(\overline{\rho})$, $k(\overline{\rho})$ を次節 § 4 で与えられるものとする. このとき $\overline{\rho}$ はタイプ $(N(\overline{\rho}), k'(\overline{\rho}))$ で Katz 保型的である.

予想 5.1 と先ほどの予想 3.5 との同値性は完全には知られておらず, 予想 3.5 が解決した現在でも予想 5.1 は $\ell = 2$ かつ $\overline{\rho}$ が 2 で不分岐の場合にまだ完全に解決していないないようである. また $\overline{\rho}$ が 2 面体的, すなわち $\mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ における $\overline{\rho}$ の像が 2 面体群となる場合には Wiese が予想 5.1 を証明している. Katz [Ka2] は θ 作用素と呼ばれる作用素 $\theta : S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{F}_\ell} \to S_{k+\ell+1}(\Gamma_1(N))_{\mathbb{F}_\ell}$ を構成した. θ 作用素は次の性質を持つ:

- 任意の整数 $n \geq 1$ に対し, $T_n\theta = n\theta T_n$ が成り立つ.
- 任意の $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ に対し, θ は $\langle a \rangle$ と可換である.

特に θ は同時 Hecke 固有形式を同時 Hecke 固有形式に送る. さらに f が 0 でない同時 Hecke 固有形式のとき, $\theta(f) \neq 0$ であり, $\overline{\rho}_{\theta(f)} \cong \overline{\rho}_f \otimes \chi_\ell$ が成り立つ.

Hasse 不変量とよばれる, $\mathbb{F}_\ell$ 係数のタイプ $(1, \ell-1)$ の Katz 保型形式 $A \neq 0$ が存在する ([Ka2]). A を掛け算する操作は $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 線形写像

$$A : S_k(\Gamma_1(N))_{\overline{\mathbb{F}}_\ell} \to S_{k+\ell-1}(\Gamma_1(N))_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$$

を誘導する. この写像は単射, かつすべての T_n, $\langle a \rangle$ の作用と可換である. $0 \neq f \in S_k(\Gamma_1(N))_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ に対し, 整数 $w(f) \geq 1$ を

$$w(f) = \min\{k - i(\ell-1) \mid f \in A^i S_{k-i(\ell-1)}(\Gamma_1(N))\}$$

によって定める. このとき, $\ell \nmid w(f)$ ならば $w(\theta f) = w(\theta f) + \ell + 1$ が, $\ell | w(f)$ ならば $w(\theta f) < w(\theta f) + \ell + 1$ が成り立つ. また q 展開を用いると $w(\theta^\ell f) = w(\theta f)$ であることもわかる. 数の列 $(w(\theta f), w(\theta^2 f), \ldots, w(\theta^{\ell-1} f))$ を f の θ サイクルという.

$0 \neq f \in S_k(\Gamma_1(N))_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ が同時 Hecke 固有形式かつ $1 \leq k \leq \ell+1$ の場合には, f の θ サイクルは ℓ, k, および T_ℓ の固有値 a_ℓ だけで決まり, その具体的な形が [Ed, 3.3 Proposition] に与えられている.

6. レベルと重さの最適化

本節では定理 3.9 の証明について解説する. 定理 3.9 は, Mazur, Ribet [R1] [R3], Gross [Gr2], Carayol [Car2], Edixhoven [Ed], Coleman-Voloch [CV] の結果・手法をもとにして, $\ell \geq 3$ の場合は Diamond [Dia1], $\ell = 2$ の場合は Buzzard [Bu] によって証明された. この定理 3.9 の証明には数多くの論文の手法が取り入れられており, 証明の議論は入り組んだものになっている.

定理 3.9 は, Serre 予想の解決にいたるまでの歴史において重要な役割を果たしており, また Khare-Wintenberger [KW3] による Serre 予想 3.5 の証明の中でも, 定理 3.9 のうちの重さの最適化の部分が用いられている. これが本稿で定理 3.9 の証明について, ある程度詳しく解説するする理由である.

$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を S の表現とする. $\ell \geq 3$ または $k(\overline{\rho}) \neq 2$ と仮定する. $\overline{\rho}$ が保型的と仮定する. このとき $\overline{\rho}$ がタイプ $(N(\overline{\rho}), k(\overline{\rho}))$ で保型的であることを証明したい. 証明は 9 つのステップからなる.

ステップ 1. $\overline{\rho}$ は保型的なので, ある $N \geq 1$ とある $k \geq 2$ が存在して, $\overline{\rho}$ はタイプ (N, k) で保型的となる.

ステップ 2. 必要ならば k を取り替えることによって, N を $N/\ell^{\mathrm{ord}_\ell(N)}$ とすることができる. これは $\ell \geq 3$ の場合は Ribet [R3, Theorem 2.1] であり, $\ell = 2$ のときは Buzzard [Bu, Proposition 1.1] に書かれている.

ステップ 3. $\overline{\rho}$ を適当に χ_ℓ の巾でひねることによって $k \leq \ell+1$ と仮定できる. ここで N が ℓ と素なことを用いている. このステップの詳細については Edixhoven [Ed, §3, §7] に書かれている. また $\ell \geq 5$ の場合は Ash-Stevens [ASt] にも書かれている.

以下のステップ 4 からステップ 7 までは, $\overline{\rho}$ を適当に χ_ℓ の巾でひねり $k \leq \ell+1$ としたものに対して実行する. そして, ステップ 7 からステップ 8 へ移行するときに θ 作用素を使って, ひねる前の $\overline{\rho}$ についての考察に戻る.

ステップ 4. 必要ならば N を $N\ell$ に置き換えることによって $k = 2$ とできる. このステップに $k \leq \ell+1$ であることを用いる. $\ell \geq 5$ ならばこれは Ash-Stevens [ASt] により, $N \geq 5$ であればこれは (Serre-)Gross [Gr2, Proposition 9.3] によって示されている. $k \leq 4$ かつ $N \leq 4$ のとき $S_k(\Gamma_1(N)) = 0$ であるから, $\ell \leq 3$ かつ $N \leq 4$ となることはありえない.

ステップ 5. Carayol [Car2], Livné [Li] の結果により, このとき N は $N(\overline{\rho})$ の倍数であることがわかる.

ステップ 6. $k=2$ のまま ℓ の外のレベルを最適化して $N(\overline{\rho})$ とすることができる. つまり $N=N(\overline{\rho})$ または $N=N(\overline{\rho})\ell$ とできる.

これが最も主要なステップであり, §6.1 でもう少し詳しく述べる. このステップの証明には, Mazur の原理, Carayol [Car2] の議論, および志村曲線のヤコビ多様体の Néron モデルに対する考察が用いられる. 証明は $\ell \geq 3$ の場合は Ribet [R3] で与えられた戦略に基づいて Diamond [Dia1] によって, $\ell=2$ の場合は Buzzard [Bu] によって与えられた.

ステップ 7. これはステップ 2 と同じである. 必要ならば k を取り替えることによって, $N=N(\overline{\rho})$ とすることができる. これは $\ell \geq 3$ の場合は Ribet [R3] であり, $\ell=2$ かつ $k(\overline{\rho}) \neq 2$ のときは Buzzard [Bu] にある.

ステップ 8. $N=N(\overline{\rho})$ のまま, k を $k(\overline{\rho})$ とすることができる. このステップは Edixhoven [Ed, Theorem 4.5] でなされている. Khare-Wintenberger [KW2], [KW3] による Serre 予想の証明の中で結果が使われる点でもこのステップは重要である. §6.2 でこのステップについてもう少し詳しく述べる.

ステップ 9. $\ell \geq 5$ のときには, N, k を変えずに ε を $\widetilde{\varepsilon}(\overline{\rho})$ に取り替えることができる. これは Carayol の補題 [Car2, Proposition 3] から従う.

6.1. **ステップ 6 について.**

ここではステップ 6 についてもう少し詳しく説明をする.

まず最初に, Carayol [Car2] の議論などを用いて, ステップ 6 を次の主張に帰着する:

主張 6.1. $\overline{\rho}$ がタイプ $(N,2,\varepsilon)$ で保型的とする. $p \neq \ell$ を N を 1 回だけ割る素数とする. $\overline{\rho}$ が p で不分岐であり, ε が $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/(N/p)\mathbb{Z})^\times$ を経由すると仮定する. このとき $\overline{\rho}$ はタイプ $(N/p,2)$ で保型的である.

主張 6.1 に帰着する方法について少し説明する. $\overline{\rho}$ はタイプ $(N,2)$ で保型的なので, $\overline{\rho}$ はタイプ $(N,2)$ の同時 Hecke 固有形式 f に付随する ℓ 進表現 ρ_f を法 ℓ 還元したものである.

$p \neq \ell$ を, $N/N(\overline{\rho})$ を割る素数とする. $\overline{\rho}$ を $G_{\mathbb{Q}_p}$ に制限したものの Swan 導手は, ρ_f を $G_{\mathbb{Q}_p}$ に制限したものの Swan 導手に等しい.

結局 $\overline{\rho}$ の Artin 導手 $N(\overline{\rho})$ と ρ_f の Artin 導手 N との違いは, Artin 導手と Swan 導手とのずれの部分にある. したがって,

$$\mathrm{ord}_p(N) - \mathrm{ord}_p(N(\overline{\rho})) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\rho}^{I_p} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \rho_f^{I_p} \tag{6.1}$$

が成り立つ. $\overline{\rho}$ の次元は 2 なので, 上式右辺の値は 0, 1, 2 のいずれかである.

f に付随する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現の p 成分を π_p とする. π_p は主系列表現, 特別表現, または超尖点表現のいずれかである.

Case 1. π_p が主系列表現のとき, 式 (6.1) の右辺が 0 でないとすると. 法 p, 位数 ℓ 巾の Dirichlet 指標 ϕ が存在して, $f \otimes \phi$ のレベルを N/p の約数にすることができる.

Case 2. π_p が特別表現のとき, π_p は Steinberg 表現の指標によるひねりである. ひねる指標を α とおく. Carayol [Car2] は次を示した ([R3, 4] を参照): α が分岐していると仮定し, 上式の右辺が 0 でないとすると, 法 p, 位数 ℓ 巾の Dirichlet 指標 ϕ が存在して, $f \otimes \phi$ のレベルを N/p の約数にすることができる.

Case 3. π_p が超尖点表現のとき, 式 (6.1) の右辺が 0 でないとすると, つぎの可能性しかない: $\overline{\rho}$ は p で不分岐かつ, $\rho_f^{I_p} = 0$. 補助的な素数 q を, 以下をみたすようにとる: $q \equiv -1 \mod \ell$. $q \nmid N$. $\overline{\rho}$ はタイプ $(Nq, 2, \varepsilon)$ で保型的であり, ε は q で不分岐. このような q の存在は実は Chebotarev の密度定理からわかる. $\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_q)$ の特性多項式がある a に対する $(T-a)(T-qa)$ の形をしているような素数 q であれば (もしかすると有限個の q を除いて) 上の条件をみたす.

判別式 pq の, $\mathbb{Q}$ 上の四元数環に付随する志村曲線を考えることにより Carayol [Car2] は次を示した ([R3, 4] を参照): $\overline{\rho}$ はタイプ $(Nq/p, 2, \varepsilon')$ で保型的であり, ε' は q で不分岐.

以上で, さきほど書いた主張 6.1 にステップ 6 を帰着できた.

以下, 主張 6.1 の証明について説明する. 主張 6.1 の証明は, $\ell \geq 3$ のときは, Ribet [R3] に書かれた戦略に基づいて Diamond [Dia1] が証明を与えた. $\ell = 2$ の場合は, 多少異なる戦略を用いて Buzzard [Bu] が証明を与えた.

以下では $\ell \geq 3$ の場合に限り主張 6.1 の証明を説明する. この場合主張 6.1 の証明は $p \not\equiv 1 \mod \ell$ の場合の主張に帰着することによってなされる. $p \not\equiv 1 \mod \ell$ の主張 6.1 は, Mazur の原理とよばれる主張 (の重さが 2 の場合) である. これは Ribet [R3, (8.1)] に証明が書かれている.

$p \equiv 1 \mod \ell$ のときにどうすればよいかを, 述べる. まず補助的な素数 q を取る. q は $q \equiv -1 \mod \ell$, $q \nmid N\ell$ をみたしさらにちょっとした条件を満たすようにとる. するとレベルの引き上げにより $\overline{\rho}$ はタイプ $(Nq, 2, \varepsilon)$ で保型的である. ここで ε は p および q で不分岐に取れる. ここで志村曲線を使った議論をすると $\overline{\rho}$ はタイプ $(Nq/p, 2, \varepsilon')$ で保型的であることがわかる. ここで ε' は

$(\mathbb{Z}/(N/p)\mathbb{Z})^{\times}$ を経由するように取れる. $q \not\equiv 1 \mod \ell$ であるから, Mazur の原理により $\overline{\rho}$ はタイプ $(N/p, 2)$ で保型的である.

志村曲線を使った議論についてもう少し説明する. まず Néron モデルの閉ファイバーの構造について復習をする. A を $\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体, p を素数とする. $\mathcal{A}$ を A の $\mathbb{Z}_p$ 上の Néron モデルとする. $\mathcal{A} \mod p$ で $\mathcal{A}$ の閉ファイバーを表わす. これは $\mathbb{F}_p$ 上の群スキームとなる. $\mathcal{A} \mod p$ は次のような 3 重構造になっている: 上層部は $\mathbb{F}_p$ 上の有限エタール群スキームであり, この部分を $\psi(A, p)$ と書くことにする. 中間部は $\mathbb{F}_p$ 上のアーベル多様体である. 下層部は $\mathbb{F}_p$ 上のトーラスであり, この部分を $T(A, p)$ と書くことにする. $T(A, p)$ の指標のなす群を $X(A, p)$ と書く.

A としてモジュラ曲線の Jacobi 多様体, および志村曲線の Jacobi 多様体を考える. 具体的には次の 4 種類のアーベル多様体を考える.

- モジュラ曲線 $X(\Gamma_1(Nq) \cap \Gamma_0(pq))$ の Jacobi 多様体. このアーベル多様体を $J(pq)$ とおく.
- モジュラ曲線 $X(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))$ の Jacobi 多様体. このアーベル多様体を $J(p)$ とおく.
- モジュラ曲線 $X(\Gamma_1(Nq/p) \cap \Gamma_0(q))$ の Jacobi 多様体. このアーベル多様体を $J(q)$ とおく.
- 判別式 pq の $\mathbb{Q}$ 上の四元数環とレベル N/p の Eichler 整環から作られる志村曲線の Jacobi 多様体. このアーベル多様体を J' とおく.

このとき次の 2 つの短完全系列が存在することが示せる:

$$0 \to X(J', q) \to X(J(pq), p) \to X(J(p), p)^{\oplus 2} \to 0$$

$$0 \to X(J', p) \to X(J(pq), q) \to X(J(q), q)^{\oplus 2} \to 0$$

それぞれのアーベル多様体には Hecke 環が作用するが, 作用する Hecke 環が微妙に違うので, 少し気をつけないといけない. $\mathbb{T}$ をすべての T_n (n はすべての 1 以上の整数を動く) およびすべての $\langle a \rangle$ (a はすべての $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ の元を動く) で生成される $\mathrm{End}(J(pq))$ の部分環とする.

$\mathbb{T}$ は上の 2 つの短完全系列の中間部に作用するが, 左側からの像は $\mathbb{T}$ の作用で保たれることがわかるので, 結局上の 2 つの短完全系列に現れるすべての対象に $\mathbb{T}$ が作用する.

$\overline{\rho}$ がタイプ $(Nq/p, 2, \varepsilon)$ で ε が q で不分岐のものから来ないと仮定して矛盾を導く.

$\overline{\rho}$ に対応する $\mathbb{T}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とおく. $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ を $\mathfrak{m}$ に関する $\mathbb{T}$ の局所化とする. 仮定から (ただちではないが) $(X(J(q), q)^{\oplus 2}) \otimes_{\mathbb{T}} \mathbb{T}_{\mathfrak{m}} = 0$ である. した

がって $X(J',p)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}\xrightarrow{\cong}X(J(pq),q)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}$ である. また完全系列

$$X(J',q)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}\to X(J(pq),p)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}\to(X(J(p),p)^{\oplus 2})\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}\to 0$$

が得られる.

λ, μ の導入. $\lambda=\dim_{\mathbb{T}/\mathfrak{m}}(J(pq)[\mathfrak{m}])$, $\mu=\dim_{\mathbb{T}/\mathfrak{m}}(J'[\mathfrak{m}])$ とおく.

このとき次の 5 つの等式, 不等式が成り立つ.

- $\dim_{\mathbb{T}/\mathfrak{m}}X(J',p)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}=2\mu$.
- $\dim_{\mathbb{T}/\mathfrak{m}}X(J(pq),p)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}=2\lambda$.
- $\dim_{\mathbb{T}/\mathfrak{m}}X(J',q)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}\le\mu$.
- $\dim_{\mathbb{T}/\mathfrak{m}}X(J(pq),q)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}\le\lambda$.
- $\dim_{\mathbb{T}/\mathfrak{m}}X(J(p),p)\otimes_{\mathbb{T}}\mathbb{T}/\mathfrak{m}\le\mu$.

これらは, 各 Jacobi 多様体の $\mathfrak{m}$ トージョン点への $G_{\mathbb{Q}_p}$, $G_{\mathbb{Q}_q}$ の作用に関する不変部分を調べることによってわかる.

この 4 つの不等式から, $\mu=\nu=0$ が成り立つことになるが, それは矛盾である.

6.2. **ステップ 8 について.** ここではステップ 8 についてもう少し補足をする.

ステップ 8 の証明は,

- $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が既約のとき.
- $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が可約かつ $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ が半単純のとき.
- $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が可約かつ $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ が半単純でないとき.

の 3 通りに場合分けをして行われる. 証明にはステップ 3 の議論および §5 で述べた θ サイクルの記述を用い, さらにステップ 4 の議論および次の 2 つの定理を用いる:

定理 6.2 (Deligne, Fontaine. [Ed, 2.5, 2.6] を参照). ℓ を素数とする. $f\neq 0$ をタイプ (N,k,ε) の $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数同時 Hecke 固有 Katz 尖点形式とする. $2\le k\le\ell+1$ と仮定する. T_ℓ の作用の固有値を a_ℓ とおく,

(1) $a_\ell\neq 0$ であれば, f に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ の法 ℓ 表現 $\overline{\rho}_{f,\ell}$ の D_ℓ への制限は可約であり,

$$\begin{pmatrix}\omega_\ell^{k-1}\lambda(\varepsilon(\ell)/a_\ell) & * \\ 0 & \lambda(a_\ell)\end{pmatrix}$$

の形をしている. ここで $a\in\overline{\mathbb{F}}_\ell$ に対し, D_ℓ の不分岐指標であって Frobenius を a に送るものを $\lambda(a):D_\ell\to\overline{\mathbb{F}}_\ell$ で表わした.

(2) $a_\ell = 0$ であれば, f に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ の法 ℓ 表現 $\overline{\rho}_{f,\ell}$ の D_ℓ への制限は既約であり, $\overline{\rho}_{f,\ell}$ の惰性群 I_ℓ への制限は

$$\begin{pmatrix} \psi^{k-1} & 0 \\ 0 & \psi'^{k-1} \end{pmatrix}$$

の形をしている. ここで $\psi, \psi' : I_\ell \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ は 2 つのレベル 2 の基本指標である.

注 6.3. 主張 (1) は, クリスタリン表現に付随するフィルター付き φ 加群の弱許容性を用いて導くことも可能である. また, 定理の主張は, 現在では整係数 p 進 Hodge 理論や $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ についての p 進局所 Langlands 対応を用いることによって, k が $\ell+1$ よりも大きいある種の場合にも拡張されている ([BLZ], [BB, 3.2], [BG1] を参照).

定理 6.4 (Mazur の原理の $\ell = p$ の場合). $\overline{\rho}$ がタイプ $(N, 2, \varepsilon)$ で保型的であり, N が ℓ で 1 回だけ割れ, ε は $(\mathbb{Z}/(N/\ell)\mathbb{Z})^\times$ の指標 ε' を経由するとする. $\overline{\rho}$ が同時 Hecke 固有形式 $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ に付随する Galois 表現から得られるとし, f への T_ℓ 作用の固有値を, 固定した同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を通じて法 ℓ 還元したものを a_ℓ とおく. このときもし, $\overline{\rho}$ がタイプ $(N/\ell, 2, \varepsilon')$ で保型的でなければ, $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ は有限であり, かつ $a_\ell^2 = \varepsilon'(\ell)$ が成立する.

$\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が可約かつ $\overline{\rho}|_{I_\ell}$ が半単純のときには, さらに議論の途中で, 同伴形式 (companion form) の存在と付随する法 ℓ ガロア表現の馴分岐性との関係に関する Gross の結果 [Gr2, Theorem 13.10] が用いられる. 論文 [Gr2] では, p 進コホモロジー間の比較同型と Hecke 作用との整合性を仮定してこの結果を導いているが, この整合性の仮定は Cais [Cai] によって確かめられた. $\ell \geq 3$ または $k(\overline{\rho}) \neq 2$ の場合には, 上述の Gross の結果の代わりに Coleman-Voloch の結果 [CV, Theorem 0.1] を使えば, この整合性の仮定を確かめる必要はない.

7. Serre 予想の証明に関する大雑把かつ幾何的な説明

次節以降で説明する Khare [Kh2], Khare-Wintenberger [KW2] による Serre 予想の証明は, $N(\overline{\rho})$ を割る素数の個数に関する帰納法を用いて, $N(\overline{\rho}) = 1$ の場合に帰着し, $N(\overline{\rho}) = 1$ の場合には法 ℓ 表現の ℓ に関する帰納法を用いて証明がなされる. $N(\overline{\rho})$ を割る素数の個数に関する帰納法, ℓ に関する帰納法というと, 非常に奇抜な証明法であるかのようにきこえるが, (現実には構成されていない) Galois 表現に関する大域的なモジュライ空間の存在を仮定し, 議論の

細部を無視すれば, これは幾何的にみて自然な発想にもとづく方法であることが見て取れる. Serre 予想の証明に入る前のウォーミングアップとして, このことをこの節で簡単に説明する.

整数論に関係する分野で最近 10 年間に得られた大きな成果として,

(1) 谷山-志村予想の肯定的解決 ([BCDT]).
(2) 関数体上の GL_n に関する Langlands 対応の確立 ([Laf]).
(3) 基本補題の証明 ([Wa], [LN], [Ng]).
(4) Bloch・加藤予想の肯定的解決 ([V1], [V2], [HW]).
(5) 総実代数体上の楕円曲線に関する佐藤•Tate 予想の証明 ([CHT], [HSBT], [Tay4], [BLGHT]).
(6) 本稿で解説する Serre 予想の証明 ([Kh2], [KW2], [KW3]).

が挙げられる. この 6 つのうちの半数, (1) (5) (6) では, 保型性持ち上げ定理という定理が用いられる (Serre 予想の証明に用いられる保型性持ち上げ定理については後の §8 で少し触れる). 保型性持ち上げ定理の証明の中核をなすのが $R = \mathbb{T}$ 定理である. $R = \mathbb{T}$ 定理の R は Galois 表現の普遍変形環であり, $\mathbb{T}$ は (局所化された) Hecke 環である. R の幾何的なイメージは, 適当な条件をみたす大域体の Galois 表現の大域的モジュライ空間 X の構造層を, ひとつの閉点で完備化した, 形式的モジュライの座標環のようなものである. 大域的モジュライ空間 X は Galois 表現の整合系のモジュライ空間のようなものであると想像されるが, 現状では X の厳密な構成はなされておらず, R についてのこのイメージを数学的に厳密に定式化することはできていない. 一方 X の閉部分空間として, 保型表現から作られる Galois 表現の大域的モジュライ空間 $Z \subset X$ というものがあると想像すると, $\mathbb{T}$ の幾何的なイメージは, Z の構造層をひとつの閉点で完備化した, 形式的モジュライの座標環である. このような仮想的な空間 X, Z の概念を導入すれば, $R = \mathbb{T}$ 定理は, 閉部分空間 $Z \subset X$ が同時に開部分空間になるという定理であると解釈できる.

Serre 予想は, Z と X の閉点の集合が一致するという予想であると解釈できる. したがって保型性持ち上げ定理を認めれば, Serre 予想を証明するためには埋め込み $Z \subset X$ が連結成分の集合の間に誘導する写像 $\pi_0(Z) \to \pi_0(X)$ が全射であることを示せばよい. この視点に立つと, [Kh2], [KW2] による Serre 予想の証明は, 勝手な閉点 $x \in X$ からスタートし, Z の閉点 z および x と z とを結ぶ連結な曲線の鎖を X 内にうまく見つけることによって, x の属する X の連結成分が $\pi_0(Z)$ に属することを示す, という議論であると解釈できる.

$N(\overline{\rho})$ を割る素数の個数に関する帰納法, および ℓ に関する帰納法は, このような曲線の鎖をうまく見つけるためのプロセスである.

簡単のため上記の説明では, 保型性持ち上げ定理が完全に確立し, $Z \subset X$ が開部分集合であることが判明していると仮定した. しかし保型性持ち上げ定理は現状では完全には証明されておらず, そのためとある条件を満たす Z の点の近傍でしか, $Z \subset X$ が開であるとことがわかっていない. この制約があるため, Serre 予想の実際の証明においては, 連結な曲線の鎖を見つける議論が非常に複雑なものになっており, たとえば非 Fermat 型素数に関する解析数論的な議論を, 証明の議論中で用いたりしている.

最近では $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ に関する p 進局所 Langlands 対応の理論の進展により, [KW2] で用いられているものよりも強い主張を含むような保型性持ち上げ定理が使えるようになっている. こういった強い保型性持ち上げ定理を用いれば, 連結な曲線の鎖を見つける議論がより簡単になり, 上に書いたような解析数論的な議論を避けて通ることも可能なのではないかと期待される.

8. 保型性持ち上げ定理と整合系への持ち上げ定理

8.1. **Serre 予想証明のステップ.** [Kh2], [KW2], [KW3] による Serre 予想の証明は, 大きく分けて次の 4 段階からなる.

(1) 帰納法の初段階.
(2) $N(\overline{\rho}) = 1$ のときに予想 3.5 を示す.
(3) $N(\overline{\rho})$ が素数かつ $k(\overline{\rho}) = 2$ のときに予想 3.5 を示す.
(4) $N(\overline{\rho})$, $k(\overline{\rho})$ が一般のときに予想 3.5 を示す.

(1), (2), (3), (4) については, それぞれ §11, §12, §13, §14 でもう少し詳しく説明する.

段階 (1) では解析数論が使われ, 段階 (2), (3), (4) の議論とは大きく様相が異なるが, 段階 (2), (3), (4) については議論を進める方針が共通しており,

- 保型性持ち上げ定理
- 整合系への持ち上げ定理

とよばれるの 2 種類の定理が中心的役割をはたす. この 2 種類の定理の正確な形を述べることが本節の目的である.

Serre 予想の証明中では, いくつかのバージョンの保型性持ち上げ定理, 整合系への持ち上げ定理が用いられる. 本節ではまず, 保型性持ち上げ定理, 整合系への持ち上げ定理の主張において, すべてのバージョンに共通する部分を主張のプロトタイプとして与える. 次に, 保型性持ち上げ定理, 整合系への持ち

上げ定理を実際の Serre 予想の証明にどのように用いるのかについて簡潔に説明する.

最後にバージョン毎の相違点をリストアップすることで保型性持ち上げ定理, 整合系への持ち上げ定理の正確な記述が完了する.

8.2. **保型性持ち上げ定理のプロトタイプ.** 保型性持ち上げ定理のプロトタイプは以下の主張である.

主張 8.1 (プロトタイプ). $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を奇な連続表現とする. $\overline{\rho}$ は既約かつ保型的であると仮定する. $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を奇 (この仮定は ℓ が奇数のときだけ必要) な ℓ 進連続表現とする. さらに ρ は有限個の素点を除いて不分岐であり, ρ の法 ℓ 還元が $\overline{\rho}$ と同型であると仮定する. このとき ρ が何らかの条件 (C_ρ) を満たせば, ρ は保型的である.

8.3. **整合系への持ち上げ定理のプロトタイプ.** 整合系への持ち上げ定理のプロトタイプを説明する前に表現の整合系に関する用語の準備をする. まず局所体の ℓ 進表現に付随する Weil-Deligne 表現について復習する. p を素数, F_v を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とする. $G_{F_v} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_v)$ を F_v の絶対ガロア群, $W_{F_v} \subset G_{F_v}$ を Weil 群とする. $||\ || : W_{F_v} \to \mathbb{Q}^\times$ を次の合成で与えられる準同型とする

$$W_{F_v} \twoheadrightarrow W_{F_v}^{\mathrm{ab}} \overset{\cong}{\longleftarrow} F_v^\times \xrightarrow{|\ |} \mathbb{Q}^\times.$$

ここで同型 $F_v^\times \cong W_{F_v}^{\mathrm{ab}}$ は局所類体論の相互写像であり, F_v の素元を幾何的 Frobenius に送るように正規化したものである. E を標数 0 の体とする. F_v の Weil-Deligne 表現とは W_{F_v} の E 上の有限次元連続表現 $r : W_{F_v} \to \mathrm{GL}_E(V)$ (ここで $\mathrm{GL}_E(V)$ には離散位相を入れている) と E 線形写像 $N : V \to V$ との組 (r, N) であって, 任意の $w \in W_{F_v}$ に対し等式

$$r(w)N = ||w|| \cdot Nr(w)$$

が成り立つもののことをいう. $n \geq 1$ を整数, $\rho_v : G_{F_v} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を ℓ 進連続表現とする. $p \neq \ell$ のとき, [山内 2, 定理 3.2.2] の全単射によって, ρ_v の W_{F_v} への制限に, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 係数の Weil-Deligne 表現の同型類が対応する. この Weil-Deligne 表現の同型類を $WD(\rho_v)$ で表わす. $p = \ell$ のときは, さらに ρ_v が de Rham 表現であると仮定する. このとき [中, Theorem 2.42] に説明があるように, Berger [Be], Colmez [Co1] の結果から ρ_v は潜在的に半安定となる. したがって同型 $\overline{F}_v \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を選び, Fontaine の関手 [Fo, 2.3.7] を用いると, ρ_v に付随する Weil-Deligne 表現が得られる. この Weil-Deligne 表現の同型類を $WD(\rho_v)$ で表わす.

$p \neq \ell$ または, $p = \ell$ かつ ρ_v が de Rham 表現であると仮定し, $WD(\rho_v) = (r, N)$ とおく. r の惰性群 $I_v \subset W_{F_v}$ への制限と N との組 $(r|_{I_v}, N)$ を ρ_v の惰性 Weil-Deligne パラメータとよぶ.

有限次代数体 F に対し, F の有限素点の全体を S_F^∞ とおく. 有限次代数体 E に対し,

$$\mathrm{Emb}(E) = \{(p, \iota) \mid p \text{ は素数}, \iota : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p\}$$

とおく.

定義 8.2. F を有限次代数体とする. G_F の 2 次元半単純狭義整合系 (であって平行な Hodge-Tate 重さを持つもの) とは, 3 つ組

$$(E, (\rho_{p,\iota})_{(p,\iota)\in\mathrm{Emb}(E)}, (r_q)_{q\in S_F^\infty})$$

であって, 次の条件をみたすもののことをいう.

- E は有限次代数体である.
- 各 $(p, \iota) \in \mathrm{Emb}(E)$ に対し, $\rho_{p,\iota}$ は半単純かつ有限個の素点を除き不分岐な p 進連続表現 $\rho_{p,\iota} : G_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ である.
- 各 $q \in S_F^\infty$ に対し, r_q は Weil-Deligne 群 WD_{F_q} の E 係数 2 次元フロベニウス半単純表現であって, 有限個の q をのぞき不分岐のものである.
- 整数 $a, b \in \mathbb{Z}$ が存在して, 任意の $(p, \iota) \in \mathrm{Emb}(E)$ および p の上にある任意の $q \in S_F^\infty$ に対し, $\rho_{p,\iota}$ を分解群 $G_{\mathbb{Q}_q}$ に制限したものは de Rham 表現であり, その Hodge-Tate 重さが $\{a, b\}$ に等しい.
- 任意の $(p, \iota) \in \mathrm{Emb}(E)$, および任意の $q \in S_F^\infty$ に対し, 同型

$$r_q \otimes_{E,\iota} \overline{\mathbb{Q}}_p \cong WD(\rho_{p,\iota}|_{D_q})^{\mathrm{Frob-ss}} \tag{8.1}$$

が存在する.

以下では 2 次元半単純狭義整合系のことを単に狭義整合系とよぶ. 狭義整合系 $(E, (\rho_{p,\iota})_{(p,\iota)\in\mathrm{Emb}(E)}, (r_q)_{q\in S_F^\infty})$ のことを, 記号を省略してしばしば $(\rho_{p,\iota})_{(p,\iota)}$ と表わす. 狭義整合系 $(\rho_{p,\iota})_{(p,\iota)}$ が既約 (resp. 奇) であるとは, 任意の (p, ι) に対して $\rho_{p,\iota}$ がが既約 (resp. 奇) であることをいう.

整合系への持ち上げ定理のプロトタイプは以下の主張である.

主張 8.3 (プロトタイプ). $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数の S 型の表現とする. $\overline{\rho}$ が条件 $(C'_{\overline{\rho}})$ をみたすと仮定する. このとき, ある有限次代数体 E および既約かつ奇な狭義整合系 $\rho = (\rho_{p,\iota})_{(p,\iota)\in\mathrm{Emb}(E)}$ が存在して, $\overline{\rho} \cong \rho_\ell \mod \ell$ であり, さらに ρ は条件 (C'_ρ) を満たす.

$\rho_{p,\iota}$ における ι の選び方が議論の中であまり重要な役割を果たさない場合は, 整合系の記号における ι を省略し, 整合系を $\rho = (\rho_p)_p$ と略記する.

8.4. **Serre 予想の証明の流れ.** 整合系への持ち上げ定理と保型性持ち上げ定理とを用いて, Serre 予想をどのように証明してゆくか, その大まかな流れをここで説明する. ここで説明する議論中では, Wiles [Wil] が Fermat 予想の証明に用いた $(3,5)$ トリックの方法の自然な拡張である (ℓ, ℓ') トリックが, 繰りかえし用いられる.

保型的であるかどうかを知りたい法 ℓ 表現 $\overline{\rho}$ からスタートする. $\ell_0 = \ell$, $\overline{\rho}_0 = \overline{\rho}$ とおく. 素数の列 $\ell_1, \ell_2, \ldots$ を選ぶ. 整合系への持ち上げ定理を適用して $\overline{\rho}_0$ を狭義整合系 $(\rho_{0,q})_q$ に持ち上げる. 整合系を別の素点 ℓ_1 で還元することによって, 法 ℓ_1 表現 $\overline{\rho}'_1$ を得る, $\overline{\rho}'_1$ を指標でひねることにより表現 $\overline{\rho}_1$ を得る. 整合系への持ち上げ定理を使って, $\overline{\rho}_1$ を狭義整合系 $(\rho_{1,q})_q$ に持ち上げる. これを繰り返して,

$$\begin{tikzcd}
 & (\rho_{0,q})_q \arrow[dl] \arrow[dr] & & & (\rho_{1,q}) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\overline{\rho}_0 & & \overline{\rho}'_1 & \overline{\rho}_1 & & \overline{\rho}'_2 & \overline{\rho}_2 & & \overline{\rho}'_n
\end{tikzcd}$$

が得られる. ここで $\overline{\rho}'_n$ が保型的であると仮定する. $\overline{\rho}'_n$ が保型的であるということから出発し, 以下の議論で $\overline{\rho}$ が保型的であることを示す.

(1) 保型性持ち上げ定理を適用して $\overline{\rho}'_n$ の持ち上げ ρ_{n-1,ℓ_n} は保型的であることを示す.
(2) 整合系のひとつのメンバーが保型的であれば, 他のメンバーも保型的となるから, $\rho_{n-1,\ell_{n-1}}$ も保型的である,
(3) したがってこれを還元した $\overline{\rho}_{n-1}$ も保型的である.
(4) $\overline{\rho}'_{n-1}$ は $\overline{\rho}_{n-1}$ をひねったものであるから $\overline{\rho}'_{n-1}$ も保型的である.

上の (1)-(4) の議論を繰り返し適用して, $\overline{\rho} = \overline{\rho}_0$ が保型的であることを示す

ここでポイントとなるのは, 保型性持ち上げ定理が, 一般に証明されてはおらず, Hodge-Tate 重さが比較的小さいような持ち上げに対してしか証明されていない (少なくとも [Kh2], [KW2] では使われていない) という点である.

上の図式を説明する際に, 素数の列 ℓ_1, ℓ_2, $\cdots$ を勝手に選んでいるかのような述べ方をしたが, 上の (1) において $\overline{\rho}'_n$ から ρ_{n-1,ℓ_n} に移行する際に保型性の条件が保たれるように実際にはかなり慎重に ℓ を選ばないといけない. このことが素数の列の選び方を複雑なものにしている.

8.5. **用語の準備.** E を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}$ を E の整数環, $\pi \in \mathcal{O}$ を素元, $\mathbb{F} = \mathcal{O}/(\pi)$ を $\mathcal{O}$ の剰余体とする. $\mathrm{CNL}_\mathcal{O}$ で局所ネター $\mathcal{O}$ 代数であって, その剰余体が $\mathcal{O}$ 代数として $\mathbb{F}$ と同型となるものを対象, 局所 $\mathcal{O}$ 代数としての局所準同型を射とする圏とする.

定義 8.4. F を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体とする.

(1) G_F の E 上の 2 次元連続 Galois 表現 V が重さ k であるとは, 任意の $E \subset \mathbb{C}_p$ に対し, $V \otimes_E \mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(k-1)$ が成立すること, 言い換えれば Hodge-Tate 重さが $\{0, k-1\}$ となることをいう.
(2) $A \in \mathrm{CNL}_\mathcal{O}$ とする. G_F の A 上の階数 2 の表現が通常 (ordinary) であるとは, 階数 1 の自由部分 A 加群 $W \subset V$, および整数 $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, V/W も階数 1 の自由 A 加群となり, 惰性群 I_F が W に χ_p^a で作用し V/W に自明に作用することをいう.

定義 8.5. G を副有限群, $d \geq 1$ を整数, $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$ を連続準同型とする. $A \in \mathrm{CNL}_\mathcal{O}$ に対し, $\overline{\rho}$ の A への持ち上げとは, 連続準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(A)$ であって, 合成

$$G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_d(A) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$$

が $\overline{\rho}$ に一致するもののことをいう.

8.6. **保型性持ち上げ定理の実際の条件.** Serre 予想の [Kh2], [KW2], [KW3] による証明に実際に用いられる保型性持ち上げ定理には, 条件 (C_ρ) に以下の 5 つのバージョンがある. 以下で 5 つめのバージョンを (5) ではなく (H) と名づけ, またバージョン (H) の特別な場合であるバージョン (3) をわざわざリストに含めているのは, 論文 [KW2] でこのバージョン (H) の保型性持ち上げ定理を仮定 (H) とよび, 証明せずに仮定した下で Serre 予想 3.5 を証明していたという歴史的経緯による. バージョン (H) の保型性持ち上げ定理は現在では Kisin [Ki5] によって解決されている.

バージョン (1). このバージョンでは $\ell \neq 2$, $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell + 1$, かつ $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限が既約と仮定する. 条件 (C_ρ) は

- ρ は ℓ でクリスタリン, かつ重さを k とすると $2 \leq k \leq \ell + 1$.

. である.

バージョン (2). このバージョンでも $\ell \neq 2$, $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell + 1$, かつ $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限が既約と仮定する. 条件 (C_ρ) は

- ρ は ℓ で潜在的に半安定かつ重さ 2.

である.

バージョン (3). このバージョンでは $\ell = 2$, かつ $\overline{\rho}$ の像が可解でないと仮定する. 条件 (C_ρ) は

- ρ は 2 でクリスタリンかつ重さ 2.

である.

バージョン (4). このバージョンでは $\ell = 2$, $k(\overline{\rho}) = 4$, かつ $\overline{\rho}$ の像が可解でないと仮定する. 条件 (C_ρ) は

- ρ は 2 で半安定かつ重さ 2.

である.

バージョン (H). このバージョンでは $\ell = 2$, かつ $\overline{\rho}$ の像が可解でないと仮定する. 条件 (C_ρ) は

- ρ は 2 で潜在的にクリスタリンかつ重さ 2.

である.

またプロトタイプ 8.1 の形をしていないが, Serre 予想の [KW1], [Kh2], [KW2], [KW3] による証明には, Skinner-Wiles [SW1], [SW2] による次の保型性持ち上げ定理も使われる.

定理 8.6. $\ell \geq 3$ を素数, E を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大, $\mathcal{O}$ を E の整数環 とする. $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ を奇な連続表現であって, 条件

- $\rho \otimes_{\mathcal{O}} E$ は絶対既約.
- ρ は有限個の素点を除き不分岐.
- ρ は ℓ で通常, かつある 2 以上の偶数 k に対し重さ k.

をみたすとする. さらに $\overline{\rho} = \rho \otimes_{\mathcal{O}} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ が既約でないか, または既約かつ保型的とする. このときある $N \geq 1$ に対し, ρ はタイプ (N, k) で保型的である.

8.7. **整合系への持ち上げ定理の実際の条件:** $N(\overline{\rho}) > 1$ **のとき.** 定理 3.8 の証明には, 6 つのバージョンの整合系への持ち上げ定理 ([Kh2, Theorem 5.1], [KW2, Theorem 5.1]) を用いる. 各バージョンについて, プロトタイプ 8.3 における条件の組 $((C'_{\overline{\rho}}), (C'_\rho))$ を以下に記述する.

バージョン (1). このバージョンにおける条件 $(C'_{\overline{\rho}})$ は

- $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell + 1$.
- $\ell = 2$ ならば, $k(\overline{\rho}) = 2$ かつ $\overline{\rho}$ の像は可解でない.
- $\ell \geq 3$ ならば, $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限は絶対既約.

であり, (C'_ρ) は

- ρ_ℓ は 任意の $p \neq \ell$ で極小分岐.
- ρ_ℓ は ℓ でクリスタリンかつ重さ $k(\overline{\rho})$.

である.

バージョン (2). このバージョンにおける $(C'_{\overline{\rho}})$ は

- $\ell \neq 2$ であれば $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell + 1$
- $\ell = 2$ ならば, $\overline{\rho}$ の像は可解でない.
- $\ell \geq 3$ ならば, $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限は絶対既約.

であり, (C'_ρ) は

- ρ_ℓ は任意の $p \neq \ell$ で極小分岐
- ρ_ℓ は ℓ で重さ 2.
- $k(\overline{\rho}) \geq \ell + 1$, すなわち $k(\overline{\rho}) = \ell + 1$ または $\ell = 2$, $k(\overline{\rho}) = 4$ であれば, ρ の ℓ での惰性 Weil-Deligne パラメータは, $(\omega_\ell^{k(\overline{\rho})-2} \oplus 1, 0)$ である.
- $k(\overline{\rho}) \leq \ell$ であれば, ρ の ℓ での惰性 Weil-Deligne パラメータは, (id, N), $N \neq 0$ である.

である.

バージョン (2)'. このバージョンでは $\ell \geq 3$ であると仮定する. 条件 $(C'_{\overline{\rho}})$ は

- $\overline{\rho}$ は ℓ の外で不分岐.
- $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell + 1$ かつ $k(\overline{\rho}) \neq \ell$.
- $\overline{\rho}$ の像は 2 面体的でない.
- $\overline{\rho}$ は ℓ で通常である.

であり, 条件 (C'_ρ) は

- $\overline{\rho}_\ell$ は ℓ の外で不分岐.
- ρ_2 は 2 でクリスタリンかつ重さ 2.
- 各素数 $p \neq \ell$ に対し, ρ_p の I_ℓ への制限は
$$\begin{pmatrix} \omega_\ell^{k(\overline{\rho})-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
の形であり, さらに $k(\overline{\rho}) = 2$ のときは $* = 0$.
- ρ_ℓ は ℓ で de Rham かつ重さ 2 であり, ρ_ℓ の I_ℓ への制限は,
$$\begin{pmatrix} \omega_\ell^{k(\overline{\rho})-1}\chi_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形である. さらに $k(\overline{\rho}) \leq \ell - 1$ ならば ρ_ℓ の $G_{\mathbb{Q}_\ell(\mu_\ell)}$ への制限はクリスタリンであり, $k(\overline{\rho}) = \ell + 1$ ならば ρ_ℓ は ℓ で半安定である.

である.

バージョン (2)". このバージョンでも $\ell \geq 3$ であると仮定する. 条件 $(C'_{\overline{\rho}})$ は

- $k(\overline{\rho}) = 2$ または $k(\overline{\rho}) = \ell + 1$.
- $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限は既約.
- 各素数 $p \neq \ell$ に対し, 群 $\overline{\rho}(I_p)$ の位数は ℓ 巾.
- $k(\overline{\rho}) = 2$ ならば $N(\overline{\rho}) \geq 2$.

であり, 条件 (C'_ρ) は

- 各 $p \neq \ell$ に対し, ρ_ℓ は p で極小分岐.
- $k(\overline{\rho}) = 2$ ならば, ρ_ℓ は ℓ でクリスタリンかつ重さ 2.
- $k(\overline{\rho}) = \ell + 1$ ならば, ρ_ℓ は ℓ で半安定かつ重さ 2.
- 代数体 E, $\mathbb{Q}$ 上の $[E : \mathbb{Q}]$ 次元アーベル多様体 A および埋め込み $\mathcal{O}_E \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ が存在して, $(\rho_p)_p$ は A から得られる整合系に一致する.

である.

バージョン (3). このバージョンでは $q \equiv 1 \mod \ell$ をみたす素数 $q \geq 3$, および $0 < i \leq q - 2$ をみたす整数 i を固定する. さらに $\ell = 2$ のときは i が偶数であると仮定する. 条件 $(C'_{\overline{\rho}})$ は

- $\ell \neq 2$ であれば $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell + 1$
- $\ell = 2$ ならば, $\overline{\rho}$ の像は可解でない.
- $\ell \geq 3$ ならば, $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限は絶対既約.
- $N(\overline{\rho})$ は q でちょうど 1 回だけ割り切れる.
- $\overline{\rho}$ の I_q への制限 $\overline{\rho}|_{I_q}$ は

$$\begin{pmatrix} \omega_{q,\ell}^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値.

である. ここで $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_q$ および $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_q$ を固定しており, 表現 $\omega_{q,\ell}$ は, 可換図式

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times \arrow[d] & G_{\mathbb{Q}} \arrow[l, "\omega_{q,\ell}"'] \arrow[r, "\omega_q"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{F}}_q^\times \arrow[d] \\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times & \overline{\mathbb{Q}}^\times \arrow[l] \arrow[r] & \overline{\mathbb{Q}}_q^\times \end{tikzcd}$$

が存在するような唯一の指標 $G_{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ の I_q への制限である. 条件 (C'_ρ) は

- ρ_ℓ は任意の $p \neq \ell, q$ で極小分岐.
- ρ_ℓ は ℓ で重さ 2.
- $k(\overline{\rho}) \geq \ell + 1$ であれば, ρ の ℓ での惰性 Weil-Deligne パラメータ r_ℓ は, $(\omega_\ell^{k(\overline{\rho})-2} \oplus 1, 0)$ である.
- $k(\overline{\rho}) \leq \ell$ であれば, ρ の ℓ での惰性 Weil-Deligne パラメータ r_ℓ は, (id, N), $N \neq 0$ である.
- $\rho_\ell|_{D_q}$ は
$$\begin{pmatrix} \omega_q^i & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
の形の表現と同値.
- $\overline{\rho}_q$ が既約ならば, $k(\overline{\rho}_q) = i + 2$ または $k(\overline{\rho}_q \otimes \chi_q^{-i}) = q + 1 - i$.

である.

バージョン (4). このバージョンでは $q \equiv -1 \mod \ell$ をみたす素数 q, および I_q のレベル 2 の基本指標 $\omega_{q,2} : I_q \to \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$ を固定する. さらに $0 \leq j < i \leq q-1$ をみたす整数 i, j であって, $\omega_{q,2}^{i+qj}$ の位数が ℓ の巾であるようなものを固定し, $\ell = 2$ のときは $i + j$ が偶数であると仮定する. 条件 (C'_ρ) は

- $\overline{\rho}$ の D_q への制限 $\overline{\rho}|_{D_q}$ は
$$\begin{pmatrix} \omega_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
の形である.

である. (C'_ρ) は

- ρ_ℓ は任意の $p \neq \ell, q$ で極小分岐.
- ρ_ℓ は ℓ で重さ 2.
- $k(\overline{\rho}) \geq \ell + 1$ であれば, ρ の ℓ での惰性 Weil-Deligne パラメータ r_ℓ は, $(\omega_\ell^{k(\overline{\rho})-2} \oplus 1, 0)$ である.

- $k(\overline{\rho}) \leq \ell$ であれば, ρ の ℓ での惰性 Weil-Deligne パラメータ r_ℓ は, (id, N), $N \neq 0$ である.
- $\rho_\ell|_{D_q}$ は
$$\begin{pmatrix} \omega_{q,2}^{i+qj} & * \\ 0 & \omega_{q,2}^{qi+j} \end{pmatrix}$$
の形の表現と同値.
- $q \geq 3$ かつ $\overline{\rho}_q$ が既約ならば, $\overline{\rho}_q$ を適当な χ_q の巾でひねった表現 $\overline{\rho}'_q$ に対して,
  - $i > j+1$ のとき $k(\overline{\rho}'_q) = i-j$ または $k(\overline{\rho}'_q) = q+1-(i-j)$.
  - $i = j+1$ のとき $k(\overline{\rho}'_q) = q$.

  が成り立つ.

である.

9. 保型性持ち上げ定理の証明の流れ

§8 に述べた保型性持ち上げ定理 のうちのバージョン (1), (2), (3), (4) は, [Wil], [TW], [Dia2], [DFG] [Ki4] によって既に知られている結果を用いると, 以下に述べる定理 9.3 の形の保型性持ち上げ定理を示すことに帰着される.

定理 9.3 を述べるために少し準備をする. まず F を総実代数体とする. §8 に述べた保型性持ち上げ定理の証明には, 以下に述べる定理 9.3 を $F = \mathbb{Q}$ の場合にしか適用しない. しかし, 定理 9.3 の証明の途中で, $F = \mathbb{Q}$ に限らないほうが都合のよい状況が発生する. また, §10 で解説する整合系への持ち上げ定理 の証明中で $F \neq \mathbb{Q}$ に対する定理 9.3 が必要となる. そのため, ここでは $F = \mathbb{Q}$ とは仮定せずに話を進める.

$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体の整数環とする. $\mathcal{O}$ の剰余体を $\mathbb{F}$ とおく. $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を S 型の表現とする.

定義 9.1. 連続指標 $\psi : \mathbb{A}_F^\times / \overline{F^\times (F_\infty^\times)} \to \mathcal{O}^\times$ が数論的であるとは, あるコンパクト開部分群 $U \subset \mathbb{A}_F^\times$ および整数 $t \in \mathbb{Z}$ が存在して, $u \in U$ に対して $\psi(u) = \mathbb{N}(u_\ell)^t$ と書けることをいう. ここで $u_\ell \in (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^\times$ は u の ℓ の上の素点成分, $\mathbb{N} : (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^\times \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ はノルム写像である.

次の仮定をおく

仮定 9.2.
- $F/\mathbb{Q}$ は ℓ で不分岐と仮定する.
- $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が既約かまたは $k(\overline{\rho}) = \ell + 1$ ならば, $F/\mathbb{Q}$ は ℓ で完全分解すると仮定する.

- $\ell = 2$ ならば $\overline{\rho}(G_F)$ は可解でないと仮定し, $\ell \geq 3$ ならば $\overline{\rho}$ の $G_{F(\mu_\ell)}$ への制限が既約であると仮定する.

$\psi : \mathbb{A}_F^\times/\overline{F^\times(F_\infty^\times)} \to \mathcal{O}^\times$ を ℓ の上にある素点以外で不分岐な数論的指標であって, ψ に対応する G_F の連続指標を $\rho_\psi : G_F \to \mathcal{O}^\times$ と書くと, $\chi_\ell\rho_\psi$ が $\det\overline{\rho}$ の持ち上げになっているようなものとする. さらに $\mathcal{O}_{F_\ell} = \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell$ とおき, 次のいずれかを仮定する:

- ψ の $\mathcal{O}_{F_\ell}^\times$ への制限は $\mathbb{N}(u)^{2-k(\overline{\rho})}$ の形である.
- ψ の $\mathcal{O}_{F_\ell}^\times$ への制限は $\omega_\ell^{k(\overline{\rho})-2}$ の形である.
- $k(\overline{\rho}) = 2$ かつ ψ の $\mathcal{O}_{F_\ell}^\times$ への制限は $\mathbb{N}(u)^{1-\ell}$ の形である.

つぎの仮定について考える: (α) $\overline{\rho}|_{G_F}$ は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現であって, ℓ の上にあるすべての素点で不分岐, かつすべての無限素点で重さ $k(\overline{\rho})$ の離散系列表現となるものからくる.

(β) $\overline{\rho}|_{G_F}$ は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現であって, ℓ の上にあるすべての素点で導手の指数が 1 以下, かつすべての無限素点で重さ 2 の離散系列表現となるものからくる.

v を ℓ の上にある F の素点とする. $\overline{\rho}|_{D_v}$ の持ち上げ $\widetilde{\rho}_v$ を考える. $\ell \geq 3$ のとき, 次の条件 (A), (B), (C) について考える.

(A) ℓ の上にある F の任意の素点 v に対し, 整数 $2 \leq k \leq \ell + 1$ が存在して $\widetilde{\rho}_v$ は重さ k のクリスタリン表現である. さらにもしある v に対して $k = \ell + 1$ ならば $k(\overline{\rho}) = \ell + 1$ かつ, $F/\mathbb{Q}$ は ℓ で完全分解する.

(B) ある整数 k が存在して, ℓ の上にある F の任意の素点 v に対し, $\widetilde{\rho}_v$ の $G_{\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}(\mu_\ell)}$ への制限は重さ 2 のクリスタリン表現であり, $\widetilde{\rho}_v$ の惰性 Weil-Deligne パラメータは $(\omega_\ell^{k-2} \oplus 1, 0)$ である.

(C) ℓ の上にある F の任意の素点 v に対し, $\widetilde{\rho}_v$ は重さ 2 のクリスタリンでない半安定表現であり,

$$\begin{pmatrix} \gamma_v\chi_\ell & * \\ 0 & \gamma_v \end{pmatrix}$$

の形である. ここで γ_v は $\gamma_v^2 = \psi_v$ をみたす不分岐指標である.

定理 9.3. F を総実代数体であって仮定 9.2 をみたすものとする. さらに $\ell \geq 3$ または $k(\overline{\rho}) = 2$ ならば条件 (α), (β) の両方を, そうでなければ条件 (β) だけを仮定する. ρ_F を $\overline{\rho}|_{G_F}$ の持ち上げとする. ρ_F は有限個の素点を除き不分岐かつ総奇と仮定する. $\ell \geq 3$ であれば, 条件 (A), (B), (C) のいずれかを仮定する. $\ell = 2$ であれば, 2 の上にある F の各素点に対し, ρ_F は v で重さ 2 で半安

定であり, さらに $\overline{\rho}_F$ が v で有限でない場合には ρ_F は v で重さ 2 でクリスタリンであると仮定する. このとき ρ_F は保型的である.

保型性持ち上げ定理に関する技術は, Wiles [Wil], Taylor-Wiles [TW] によってその基礎的部分が開発され, Fermat 予想に華々しく応用された後, Diamond, 藤原, Kisin によって少しずつ改良され, 使いやすくパッケージ化された技術になりつつある. この技術の中核に位置するのが Taylor-Wiles の継接ぎ議論とよばれる議論である. 上の保型性持ち上げ定理 9.3 の証明に関する技術は, 基本的には Kisin [Ki4] で開発されたものをもとにしている. Taylor-Wiles の継接ぎ議論の基本的な仕組み, および Kisin [Ki4] で開発された技術について, 本稿では詳しくふれない. これらについては, 山下氏による日本語で書かれた優れた解説 [山下 1], [山下 2] があるのでそちらを参照していただけると幸いである.

保型性持ち上げ定理 9.3 の証明を大まかに説明すると次のようになる.

ステップ 1. 必要ならば F をその許容的拡大 (§9.1 を参照) に取り替えることによって, $\overline{\rho}$ の保型的な持ち上げであって, 十分に制御された分岐をもつものが存在するような状況にする. このステップは Skinner-Wiles [SW3] のアイデアに基づく.

ステップ 2. 局所変形についての考察したい種々の条件について, その条件に関する枠つき普遍変形環がよい性質をみたすことを示す. 以下の §9.2 で, Serre 予想の証明に用いられる保型性持ち上げ定理において, どのような局所変形問題を考えるかの定義を説明し, 続く §9.3 で, それらの枠つき普遍変形環が持つよい性質について述べる.

ステップ 3. F の有限素点の有限集合 V を適当に選ぶごとに, $\overline{\rho}$ の大域変形問題を設定し, ステップ 2 で述べた局所変形環の性質, および Galois コホモロジーの計算を用いて, 考察すべき大域変形環 $\overline{R}^{\psi}_{S\cup V}$ の局所変形環上の最小生成元の個数を適当な Selmer 群を用いて記述する.

ステップ 4. 各整数 $n \geq 1$ に対し, Chebotarev の密度定理を用い, F の有限素点からなる補助的な有限集合 Q_n であって, $|Q_n|$ およびステップ 3 で計算した最小生成元の個数が n によらない良い値となるようなものの存在を示しておく. $\ell \geq 3$ のとき, この補助的な集合 Q_n は, 双対 Selmer 群を消すように選ばれる. $\ell = 2$ の場合, このステップはかなり複雑であり, 論文 [KW3] 中で新しく開発された議論が用いられる.

ステップ 5. 偶数次総実代数体上の総定符号四元数環を用いて, 適当な保型形式の空間および適当な Hecke 環を構成しておく. ステップ 4 で存在を証明した補助的な素点の有限集合 Q を選ぶごとに, 適当な保型形式の空間 $M_{\mathbb{Q}}$ およ

び適当な有限可換 ℓ 群 $\Delta_{\mathbb{Q}}$ が定まり, $M_{\mathbb{Q}}$ は $\mathcal{O}[\Delta_{\mathbb{Q}}]$ 加群の構造を持つ. [BöK, Appendix] の方法を用いて, $\Delta_{\mathbb{Q}}$ および $M_{\mathbb{Q}}$ の定義を工夫することにより, いわゆる "non-neatness" の問題を克服し, $M_{\mathbb{Q}}$ が自由 $\mathcal{O}[\Delta_{\mathbb{Q}}]$ 加群となるようにする.

ステップ 6. Taylor-Wiles の継接ぎ理論を適用し, $R = \mathbb{T}$ 型の定理を証明する.

ステップ 7. ステップ 1 で F をその許容的拡大に取りかえ, ステップ 6 で取りかえた後の F に対して定理 9.3 の主張を証明した. Langlands の基底変換の理論 [Lan], [AC] を用いて, 取りかえた後の F に対する定理 9.3 の主張から, とりかえる前の F に対する主張を導き, 定理 9.3 の証明が完了する.

以下本節では, §9.1 で許容的拡大の定義を復習した後, §9.2 で Serre 予想の証明に用いられる保型性持ち上げ定理において, どのような局所変形問題を考えるかの定義を説明し, 続く §9.3 で, それらの枠つき普遍変形環が持つよい性質について述べる. 最後に §9.4 で [Ki5] によるバージョン (H) の保型性持ち上げ定理 の証明について簡単にふれる.

9.1. **許容的拡大.** $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を S 型の表現とする. さらに $\overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}}$ が既約と仮定する. 総実代数体 F が $\overline{\rho}$ に対して許容的であるとは, 次の 4 条件をみたすもののことを言う.

- 拡大 $F/\mathbb{Q}$ は ℓ で不分岐.
- $\overline{\rho}|_{D_\ell}$ が既約ならば, 拡大 $F/\mathbb{Q}$ は ℓ で完全分解.
- $\overline{\rho}|_{G_{F(\mu_\ell)}}$ は既約.
- $\overline{\rho}(G_{\mathbb{Q}}) = \overline{\rho}(G_F)$.

総実代数体の拡大 F'/F が $\overline{\rho}$ に対して許容的であるとは, 次の 2 条件をみたすことをいう.

- F, F' は $\overline{\rho}$ に対して許容的.
- F'/F は可解な Galois 拡大.

9.2. **変形問題の定式化.** 保型性持ち上げ定理の証明においても, 整合系への持ち上げ定理の証明においても, 主役となる登場人物は Galois 表現に対する数々の変形問題である.

そこで [KW3] で用いられる変形問題の定式化についてここでまとめておく. 変形問題の一般論については, しっかりとした解説が本報告集内の記事 [今] にある.

E を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}$ を E の整数環, $\pi \in \mathcal{O}$ を素元, $\mathbb{F} = \mathcal{O}/(\pi)$ を $\mathcal{O}$ の剰余体とする. $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ で局所ネター $\mathcal{O}$ 代数であって, その剰余体が $\mathcal{O}$ 代数として $\mathbb{F}$ と同型となるものを対象, 局所 $\mathcal{O}$ 代数としての局所準同型を射とする圏とする.

G を副有限群, $d \geq 1$ を整数, $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$ を連続準同型とする. $A \in \mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ に対し $\overline{\rho}$ の持ち上げ全体のなす集合を対応させる $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ から集合の圏への関手を $\mathcal{D}^{\square}$ で表わし, $\overline{\rho}$ の枠つき変形関手とよぶ. $A \in \mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ に対し準同型

$$\mathrm{GL}_d(A) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$$

の核を $\mathrm{GL}_d(A)_1$ とおく. A に $\mathrm{GL}_d(A)_1$ を対応させる, 圏 $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ から群の圏への関手を $(\mathrm{GL}_d)_1$ とおく. $(\mathrm{GL}_d)_1$ は表現可能であり, $\mathcal{D}^{\square}$ には $(\mathrm{GL}_d)_1$ が共役により作用する. $A \in \mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ とし, ρ_1, ρ_2 を $\overline{\rho}$ の 2 つの変形とする. ρ_1 と ρ_2 が同値であるとは, $\mathrm{GL}_d(A)_1$ の元 g が存在して, $\rho_1 = g\rho_2 g^{-1}$ をみたすことをいう. $\overline{\rho}$ の A への持ち上げの同値類のことを $\overline{\rho}$ の A への変形とよぶ. A に対し $\overline{\rho}$ の変形全体のなす集合を対応させる $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ から集合の圏への関手を $\mathcal{D}$ で表わし, $\overline{\rho}$ の変形関手とよぶ. 関手間の標準的な射 $\mathcal{D}^{\square} \to \mathcal{D}$ を, 枠を忘れる射とよぶ.

定義 9.4. 副有限群 G が ℓ 有限性をみたすとは, G の任意の開部分群 U に対し, U から $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ への連続群準同型が高々有限個しか存在しないことをいう.

以下では G が ℓ 有限性をみたすと仮定する. 関手 $\mathcal{D}^{\square} : \mathrm{CNL}_{\mathcal{O}} \to (\mathrm{Sets})$ は表現可能である. $\mathcal{D}^{\square}$ を表現する $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ の対象を $R^{\square}$ で表わし $\overline{\rho}$ の普遍枠つき変形環とよぶ. 普遍表現を $\rho^{\square}_{\mathrm{univ}} : G \to \mathrm{GL}_d(R^{\square})$ で表わす. $R^{\square}$ の相対接空間は 1 コサイクルのなす空間 $Z^1(G, \mathrm{Ad})$ と標準的に同型である. $\mathcal{D}^{\square} \to \mathcal{D}$ を, 枠を忘れる自然変換とする. $\mathcal{D}$ は変形包 (hull) R を持ち, その変形包は同型を除いて一意的である. $\rho_{\mathrm{univ}} : G_F \to \mathrm{GL}_2(R)$ とおく. $\mathcal{F}_R$ を R の表現する関手とすると, $\mathcal{D}^{\square} \to \mathcal{D}$ は $\mathcal{D}^{\square} \to \mathcal{F}_R \to \mathcal{D}$ と分解する.

命題 9.5 ([KW3, Proposiiton 2.1]). ρ_{univ} の定める点を $\xi \in \mathcal{F}_R(R^{\square})$ とおく. このとき $f_\xi : \mathcal{D}^{\square} \to \mathcal{F}_R$ は滑らか, $R \to R^{\square}$ は形式的に滑らかで, 次元は $d^2 - \dim(H^0(G, \mathrm{Ad}))$ である.

$\overline{\rho}$ の変形についての条件を与えるとは, $\mathcal{D}$ の部分関手であって相対的に表現可能なものを与えることをいう. $\overline{\rho}$ の変形についての条件は, しばしば X などの記号を用いて表わされる. $\overline{\rho}$ の変形についての条件を記号 X で表わすとき, 対応する $\mathcal{D}$ の部分関手を $\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}$ で表わす.

X を $\overline{\rho}$ の変形についての条件とし, $\mathcal{D}_X^{\square} = \mathcal{D}^{\square} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{D}_X$ とおく. $\mathcal{D}_X^{\square}$ は普遍枠つき変形環 $R^{\square}$ の剰余環 $R_X^{\square}$ によって表現される. 本稿では特に, $R_X^{\square}$ が $\mathcal{O}$ 上平坦かつ, 被約すなわち 0 以外に巾零元を持たない場合を考察する. E の有限次拡大 E' に対し, $\mathcal{O}'$ を E' の整数環とし, $\mathcal{O}$ 代数の局所準同型 $R^{\square} \to \mathcal{O}'$ であって商 $R^{\square} \to R_X^{\square}$ を経由するものの全体を $X(E')$ で表わす. あとで述べる命題 9.7 を用いて次が示せる.

命題 9.6. X を $\overline{\rho}$ の変形についての条件とし, $R_X^{\square}$ が $\mathcal{O}$ 上平坦かつ被約と仮定し,
$$I = \bigcap_{E'} \bigcap_{\varphi \in X(E')} \operatorname{Ker} \varphi$$
とおく. ここで E' は (ある固定した E の代数閉包に含まれる) E の有限次拡大をすべて動く. このとき $R_X^{\square} = R^{\square}/I$ が成立する.

(証明). [KW3, Corollary 2.3] を参照. □

上の命題より, $R_X^{\square}$ が $\mathcal{O}$ 上平坦かつ被約となるような $\overline{\rho}$ の変形についての条件 X は, E の各有限次拡大 E' に対し集合 $X(E')$ を与えることによって特徴づけられる. $\mathcal{O}'$ を E' の整数環とすると, $X(E')$ は $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(R^{\square}, \mathcal{O}')$ の部分集合であり, 後者は連続準同型 $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(E')$ であって, 条件

- ρ の像は $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}')$ に属する.
- $\mathcal{O}'$ の剰余体を $\mathbb{F}'$ とおくと, 合成 $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}') \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}')$ は合成 $G \xrightarrow{\overline{\rho}} \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}')$ に一致する.

を満たすもの全体のなす集合 $\mathcal{D}^{\square}(E')$ とみなせる. §9.3 では, 局所体の法 ℓ 表現 $\overline{\rho}$ の変形についてのいくつかの条件 X を, 各 E' に対し $\mathcal{D}^{\square}(E')$ の部分集合 $X(E')$ を定めることによって具体的に与える.

命題 9.7 ([KW3, Proposition 2.2]).

1. R が平坦な $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ 代数であれば, E の有限次拡大体 E' が存在して, R は E' 有理点を持つ.
2. $R[1/\ell]$ の任意の極大イデアル I に対し, E の有限次拡大体 E' および, R から E' の整数環 $\mathcal{O}'$ への $\mathcal{O}$ 上の局所準同型 $R \to \mathcal{O}'$ が存在して, I は $R[1/\ell] \to \mathcal{O}'[1/\ell] = E'$ の核となる。
3. I を有限集合とし, 各 $i \in I$ に対し $R_i \in \mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ であって性質
    - R_i は平坦.
    - $\mathrm{Spec}(R_i)$ は $\mathcal{O}$ 有理点をもつ
    - R_i は整域
    - $R_i[1/\ell]$ は正則

をみたすものとする. このとき $\widehat{\bigotimes}_i R_i$ も同じ性質を持つ.

9.3. **いくつかの局所変形環の性質.** §9.2 と同じく, E を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大, $\mathcal{O}$ を E の整数環, $\mathbb{F}$ を $\mathcal{O}$ の剰余体, $\pi \in \mathcal{O}$ を素元とする. q を $\mathbb{Q}$ の素点とする. $q = \infty$, $q = \ell$ であってもよい.

F_v を $\mathbb{Q}_q$ の有限次拡大とし, D_v を F_v の絶対 Galois 群とする. $\overline{\rho}_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続表現とする. $q = \infty$ のときは $F_v = \mathbb{R}$ と仮定する. $q = \ell$ のときは F_v が $\mathbb{Q}_\ell$ の不分岐拡大であり, $\overline{\rho}_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ は $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ の連続表現に延長可能と仮定する.

この節では, $\overline{\rho}_v$ の局所変形についての, Serre 予想の証明中で必要となるいくつかの条件を導入し, それらの問題に関する枠つき普遍変形環の性質に関する結果を述べる. この結果は, 大域変形環の局所変形環 (の完備テンソル積) 上の表示を求める際に用いるし, また $R = \mathbb{T}$ 定理を証明する際にも用いる.

ここで考察する $\overline{\rho}_v$ の局所変形についての条件は次のものである.

(1) 奇な変形.
(2) 重さの低いクリスタリン変形.
(3) クリスタリンでない重さ 2 の半安定変形.
(4) $F_v(\mu_\ell)$ 上クリスタリンとなる重さ 2 の変形.
(5) 極小分岐となる惰性剛 (inertia-rigid) な変形,
(6) 惰性群のアーベル表現を固定した, 惰性剛な変形.
(7) 惰性群の非アーベル表現を固定した, 惰性剛な変形.
(8) 半安定表現のひねりとなる変形.

各々の条件について, 正確な定義を §9.3.1 – §9.3.10 で述べる.

連続指標 $\psi : D_v \to \mathcal{O}^\times$ であって, $\psi\chi_\ell$ が $\det \overline{\rho}$ の持ち上げとなるものを固定する. $q = \infty$ のときは, $\psi = 1$ と仮定し, $q \neq \infty$ のときは, ψ を惰性群 $I_v \subset D_v$ のとある開部分群に制限すると, 円分指標 χ_ℓ の整数乗に一致すると仮定する. 上に挙げた, $\overline{\rho}_v$ の変形についてのいずれの条件においても, 行列式が $\psi\chi_\ell$ となるような $\overline{\rho}_v$ の変形のみを考える.

定理 9.8 ([KW3, Theorem 3.1]). $\overline{\rho}_v$ の変形についての, 上に挙げた条件に関する普遍枠つき変形環 $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ は次の性質をみたす.

- 奇な変形のとき $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ は整域であり, $\mathcal{O}$ 上平坦かつ相対次元 2 であり, $\overline{R}_v^{\square,\psi}[1/\ell]$ は正則である.

- 重さの低いクリスタリン変形, 重さ 2 の半安定変形, または重さ 2 かつ $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}(\mu_\ell)$ 上クリスタリンな変形のとき, $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ は整域であり, $\mathcal{O}$ 上平坦かつ相対次元 $3+[F_v:\mathbb{Q}_\ell]$ であり, $\overline{R}_v^{\square,\psi}[1/\ell]$ は正則である.
- ひねった半安定変形のとき, $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ は整域であり, $\mathcal{O}$ 上平坦かつ相対次元 3 であり, $\overline{R}_v^{\square,\psi}[1/\ell]$ は正則である.
- 上の 3 種類の惰性剛変形のいずれかのとき, $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ は $\mathcal{O}$ 上平坦かつ各既約成分は相対次元 3 であり, $\overline{R}_v^{\square,\psi}[1/\ell]$ は正則である.

注 9.9. 筆者は確かめていないが, $\overline{\rho}_v$ の変形についての上で考察したいずれの条件においても, $\overline{R}_v^{\square,\psi}$ 自身が整域になることがわかるが, それを示すのは計算が大変であり後に使わないので省略する, と [KW3] に書かれている.

上の定理 9.8 と命題 9.7 から次が導かれる.

系 9.10 ([KW3, Proposition 3.2]). F を総実な有限次代数体, $\overline{\rho}: G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続表現, S を F の素点の有限集合であって ∞ および ℓ の上にある素点をすべて含むものとする. $v \in S$ に対し v での分解群の埋め込み $D_v \subset G_F$ を選び, $\overline{\rho}$ の D_v への制限を $\overline{\rho}_v$ とおく. 各 $v \in S$ に対し X_v を上の定理 9.8 に出てくる形の, $\overline{\rho}_v$ の変形についての条件とする. このとき, 必要ならば $\mathcal{O}$ を, E の有限次拡大の整数環に置き換えることによって, $\overline{R}^{\square,\mathrm{loc},\psi} = \widehat{\bigotimes}_{v\in S}\overline{R}_v^{\square,\psi}$ は $\mathcal{O}$ 上平坦かつ一般ファイバーの各既約成分の次元が $3|S|$ かつ $\overline{R}^{\square,\mathrm{loc},\psi}[1/\ell]$ は正則となる. さらに $\ell\infty$ を割らない各 $v \in S$ について, X_v が半安定変形ならば, $\overline{R}^{\square,\mathrm{loc},\psi}$ は整域である.

以下, 上に挙げた $\overline{\rho}_v$ の変形についての各条件について, 正確な定義を説明してゆく.

9.3.1. 奇な変形. $q=\infty$ と仮定する. $D_\infty = \{1, c\}$. とおく. $\overline{\rho}_\infty : D_\infty \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続表現とする. $\det(\overline{\rho}_\infty(c)) = -1$ と仮定する.

E の各有限次拡大 E' に対して, $\mathcal{D}^\square(E')$ に属する $\rho_\infty : D_\infty \to \mathrm{GL}_2(E')$ のうち $\det \rho_\infty(c) = -1$ をみたすものを $X(E')$ とおく.

9.3.2. $q=\ell$ の場合の, $\overline{\rho}_v$ の変形についての条件を述べるための準備. $q=\ell$ とする. F_v を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次不分岐拡大とする. $\overline{\rho}_\ell : D_v \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続表現であって, $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ の連続表現に延長可能なものとする. §4 で S 型の表現 $\overline{\rho}$ に対して, 整数 $k(\overline{\rho})$ を定義したのと同じ方法で, 整数 $k(\overline{\rho}_v) \geq 2$ を定義できる. $\overline{\rho}_v$ が可約であるか, または $F_v = \mathbb{Q}_\ell$ であると仮定する. $\ell \geq 3$ のときはさらに $2 \leq k(\overline{\rho}_v) \leq \ell+1$ であると仮定する.

次の補題はすぐにわかる.

補題 9.11. F を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次不分岐拡大体, E を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}$ を E の整数環, $\mathbb{F}$ を $\mathcal{O}$ の剰余体とする. ρ を G_F の $\mathbb{F}$ 上の 2 次元連続表現 $\overline{\rho}$ の $\mathcal{O}$ への持ち上げとする.

(1) $\rho \otimes_{\mathcal{O}} E$ がクリスタリン, かつ $2 \le k \le \ell$ を満たすある整数 k について重さ k であると仮定する. このとき $\overline{\rho}$ が通常であれば ρ も通常となる.
(2) $F = \mathbb{Q}_\ell$, かつ $\rho \otimes_{\mathcal{O}} E$ がクリスタリンかつ重さ $\ell + 1$ であると仮定する. このとき $\overline{\rho}$ が通常であれば ρ も通常となる.
(3) $\rho \otimes_{\mathcal{O}} E$ が半安定, 非クリスタリンかつ重さ 2 であれば, ρ は通常である.
(4) $\rho \otimes_{\mathcal{O}} E$ が重さ 2, かつ $\rho \otimes_{\mathcal{O}} E$ の $G_{\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}}(\mu_\ell)}$ への制限がクリスタリンであると仮定する. このとき $\overline{\rho}$ が通常であれば ρ も通常である.

$\overline{\rho}_v$ が既約のときは, さらに $F_v = \mathbb{Q}_\ell$ であると仮定する. さらに $\ell \ge 3$ のときには, Serre 重さ $k(\overline{\rho}_v)$ が条件 $2 \le k(\overline{\rho}_v) \le \ell + 1$ を仮定する. $\overline{\rho}_v$ が可約かつ $F_v \ne \mathbb{Q}_\ell$ のとき上の補題により $\overline{\rho}|_{I_v}$ は通常となる.

9.3.3. 重さの低いクリスタリン変形. $q = \ell$ とする. $\overline{\rho}_v$ は §9.3.2 の最初の段落の仮定をみたすとする. さらに $k(\overline{\rho}_v) = \ell + 1$ のときは $F_v = \mathbb{Q}_\ell$ と仮定する. $\ell = 2$ ならば $k(\overline{\rho}_v) = 2$ と仮定する.

注 9.12. $k(\overline{\rho}_v) = \ell + 1$ であれば, $\overline{\rho}_v$ の I_v への制限は

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi}_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形の表現と同値である.

E の各有限次拡大 E' に対して, 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^{\square}(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とする.

- ρ_v の行列式指標は $\psi\chi_\ell$ に等しい.
- $k(\overline{\rho}_v) \le \ell$ であれば, $\overline{\rho}_v$ は重さ $k(\overline{\rho}_v)$ でクリスタリンである.
- $k(\overline{\rho}_v) = \ell + 1$ であれば $\rho_v|_{I_v}$ が $\begin{pmatrix} \chi_\ell^\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形である.

注 9.13. $\overline{\rho}_v$ が可約であれば, 考えている持ち上げは通常となる. このことは $k(\overline{\rho}_v) \le \ell$ ならば補題 9.11 によりわかり, $k(\overline{\rho}) = \ell + 1$ ならば通常の定義よりわかる.

9.3.4. クリスタリンでない重さ 2 の半安定変形. $q=\ell$ とする. $\overline{\rho}_v$ は §9.3.2 最初の段落の条件をみたすとする. さらに $\ell \geq 3$ ならば $k(\overline{\rho}_v)=\ell+1$ と仮定し, $\ell=2$ ならば $k(\overline{\rho}_v)=4$ と仮定する.

$\ell \geq 3$ のときは, 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^{\square}(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とおく.

- ρ_v は潜在的に半安定かつ重さ 2 である.
- ρ_v の行列式指標は $\psi\chi_\ell$ に等しい.
- ρ_v の惰性 Weil-Deligne パラメータは (id, N) かつ $N \neq 0$ である.

$\ell=2$ のときは, 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^{\square}(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とおく.

- ρ_v の行列式指標は $\psi\chi_2$ に等しい.
- ρ_v は半安定かつ重さ 2 である.

注 9.14. 補題 9.11 により

$$\overline{\rho}_v|_{I_v} \cong \begin{pmatrix} \overline{\chi}_\ell^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であれば,

$$\rho_v|_{I_v} \cong \begin{pmatrix} \omega_\ell^{k-1}\chi_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

9.3.5. $F_v(\mu_\ell)$ 上クリスタリンとなる重さ 2 の変形. $q=\ell$ とする. $\overline{\rho}_v$ は §9.3.2 最初の段落の条件をみたすとする. さらに $k(\overline{\rho}_v) \leq \ell$ と仮定する.

$\ell \geq 3$ のときは, 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^{\square}(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とおく.

- ρ_v は潜在的に半安定かつ重さ 2 である.
- ρ_v の行列式指標は $\psi\chi_\ell$ に等しい.
- $\overline{\rho}_v$ の惰性 Weil-Deligne パラメータは $(\omega_\ell^{k(\overline{\rho})-2} \oplus 1, 0)$ である.

$\ell=2$ のときは, 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^{\square}(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とおく.

- ρ_v の行列式指標は $\psi\chi_2$ に等しい.
- ρ_v はクリスタリンかつ重さ 2 である.

注 9.15. 補題 9.11 により

$$\overline{\rho}|_{I_v} \cong \begin{pmatrix} \overline{\chi}_\ell^{k-1} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であれば,

$$\rho|_{I_v} \cong \begin{pmatrix} \omega_\ell^{k-1}\chi_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. さらに $\overline{\rho}_v$ が v で有限平坦であれば (これは $k=2$ のときのみ起こりうる) $\rho_v|_{I_v}$ はクリスタリンかつ重さ 2 である.

9.3.6. 惰性剛な変形. ここでは [KW3] で惰性剛な変形とよばれている, 変形についての条件の一般的な枠組みについて述べる. 以下に続く $\overline{\rho}_v$ の変形についての 3 種類の条件は, この惰性剛な変形の特別な場合である.

G を ℓ 有限性をみたす副有限群, I を G の正規部分群であって, 次の 2 条件をみたすものとする:

- I は有限群である.
- G/I は $\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型である.

$F \in G$ であって $F \mod I$ が G/I の生成元となるようなものをひとつ固定する. $\overline{\rho}: G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$ を連続表現とする. $\overline{\rho}$ の $\mathcal{O}$ への持ち上げ $\rho_0: G \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ をひとつ固定する. ρ_0 の行列式指標を $\phi: G \to \mathcal{O}^\times$ とおく. $\mathcal{M}_\phi$ を, $\mathcal{O}$ 代数の圏から集合の圏への, 次で与えられる関手を表現するアフィン $\mathcal{O}$ スキームとする: $\mathcal{O}$ 代数 A に対し, $\mathcal{M}_\phi(A)$ は次の条件をみたす群準同型 $\rho_I: I \to \mathrm{GL}_d(A)$ と元 $f \in \mathrm{GL}_d(A)$ との組 (ρ_I, f) の集合である.

- f は $\rho_I(I)$ を正規化する.
- 任意の $\tau \in I$ に対し, $f\rho_I(\tau)f^{-1} = \rho_I(F\tau F^{-1})$ が成り立つ.
- $\det(\rho_I) = \phi|_I$, $\det(f) = \phi(F)$ が成り立つ.

注 9.16. $(\rho_I, f) \mapsto ((\rho_I(\tau))_{\tau\in I}, f)$ の与える $\mathcal{M}_\phi \to \mathrm{GL}_d^{|I|+1}$ は閉埋め込みなので, $\mathcal{M}_\phi$ はアフィンスキームである.

$\mathcal{M}_{\phi,0} \subset \mathcal{M}_\phi$ を, 次の性質で特徴付けられる閉部分スキームとする: 性質: 任意の $\tau \in I$ に対し, $\rho_I(\tau)$ の特性多項式は $\rho_0(\tau)$ の特性多項式に一致する. 関手 $\mathcal{M}_*$ を表現する $\mathcal{O}$ 代数を A_* で表わす. $A_{\phi,0}$ に値を持つ普遍データが存在する. $\mathcal{M}_{\phi,0,\mathrm{fl}}$ を $A_{\phi,0}$ を $\mathcal{O}$ トージョン元でのなすイデアルで割った剰余環に対応する $\mathcal{M}_{\phi,0}$ の閉部分スキームとする. 言い換えれば $\mathcal{M}_{\phi,0,\mathrm{fl}}$ は $\mathcal{M}_{\phi,0}$ の $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ の生成点の上にあるファイバーのスキーム論的閉包を $\mathcal{M}_{\phi,0}$ の中でとったものである.

補題 9.17 ([KW3, Lemma 2.9]). $\xi_{\overline{\rho}}$ を $\overline{\rho}$ の定める $\mathcal{M}_{\phi,0}$ の点とすると, $\xi_{\overline{\rho}}$ は $\mathcal{M}_{\phi,0,\mathrm{fl}}$ の点を与える.

(証明). 持ち上げ ρ_0 の存在から従う. □

$\overline{R}^{\square}_{\phi,0,\mathrm{fl}}$ を, $A_{\phi,0,\mathrm{fl}}$ の, $\xi_{\overline{\rho}}$ に対応する極大イデアルについての完備化として定義する. 定義よりこれは有限平坦局所 $\mathcal{O}$ 代数かつ CNL の対象となる. $\overline{R}^{\square}_{\phi,0,\mathrm{fl}}$ の閉点を, 記号の濫用により $\xi_{\overline{\rho}}$ で表わす.

命題 9.18 ([KW3, Proposition 2.10]). $\mathrm{Spec}(\overline{R}^{\square}_{\phi,0,\mathrm{fl}})$ の各既約成分は d^2 次元, かつ忠実平坦であり, $\overline{R}^{\square}_{\phi,0,\mathrm{fl}}[1/\ell]$ は正則である.

E' を E の有限次拡大, $\mathcal{O}'$ を E' の整数環, $\mathbb{F}'$ を $\mathcal{O}'$ の剰余体とする. $\xi : \overline{R}^{\square}_{\phi,0,\mathrm{fl}} \to \mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}$ 代数の準同型とすると ξ に対応する $\overline{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ の $\mathcal{O}'$ への持ち上げが存在する. この持ち上げを ρ_ξ で表わす.

命題 9.19 ([KW3, Proposition 2.11]). このような持ち上げ ρ_ξ の全体は, $\overline{\rho}$ の持ち上げ ρ であって $\det\rho = \phi$ かつ, $\rho \otimes E'$ の I への制限が $\rho_0|_I$ と共役となるようなものの全体と一致する.

9.3.7. 極小分岐となる惰性剛な変形. $q \neq \ell, \infty$ と仮定する. 合成 $D_v \xrightarrow{\overline{\rho}_v} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$ による I_v の像を G とおく. G が位数 ℓ の巡回群でないと仮定する. 次の 2 通りに場合分けして, E の各有限次拡大 E' に対して, $\mathcal{D}^{\square}(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ のなす集合 $X(E')$ を記述する.

Case 1. G の位数が ℓ と素のとき. このときは $X(E')$ を $\rho_v(I_v) = \overline{\rho}_v(I_v)$ をみたす $\overline{\rho}_v$ の全体と定める.

Case 2. G の位数が ℓ で割れるとき. G が位数 ℓ の巡回群でないとの仮定, および群 I_v の構造から, このとき H は可換でないことがわかる. H の q Sylow 部分群の中心を C とおくと, $C \neq \{1\}$ である. 次の 2 通りに場合分けする:

Case 2.1. C が巡回群のとき. このとき $\ell = 2$ かつ G は 2 面体群であり, その位数を $2d$ とおくと d は奇数かつ $q|d$ となる. 必要ならば E を拡大体に取り替えることによって, F_v の分岐 2 次拡大 L および G_L の指標 $\gamma : G_L \to \mathbb{F}^\times$ が存在して, $\overline{\rho}_v$ は $\mathrm{Ind}_L^{F_v}\gamma$ と同値となる. $\widehat{\gamma}$ を γ の Teichmüller 持ち上げとする. 位数 2 の分岐指標 $\delta : G_L \to \mathbb{Q}_2^\times$ をひとつ選び, $\rho_0' = \mathrm{Ind}_L^{F_v}\widehat{\gamma}\delta$ とおく. ρ_0' を適当に選んだ不分岐指標でひねり, その行列式指標を $\psi\chi_2$ に等しくしたものを ρ_0 とおく. 変形についての条件 X として, この ρ_0 に関する惰性剛な変形を考える.

Case 2.2. C **が巡回群でないとき.** このとき $q = 2$ であり, C は巡回群でない位数 4 のアーベル群となる. さらに $\ell = 3$ であり, G は交代群 A_4 に同型となる. $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_3)$ に属する 4 元

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

からなる群 $\widetilde{C}$ を考える. 必要ならば E を拡大体に取り替えることによって, $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$ における $\widetilde{C}$ の正規化群を $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$ の元で適当に共役をとったものが S_4 と同型, かつ $\mathrm{PGL}_2(\mathcal{O}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$ によるその像が G を指数 2 の部分群として含むようにできる. これによって合成 $I_v \hookrightarrow D_v \xrightarrow{\overline{\rho}_v} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$ 持ち上げ $I_v \to \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$ が得られる. $\ell = 3 \neq 2$ なので, この持ち上げをさらに $I_v \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ に持ち上げて, さらに $\rho_0 : D_v \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ に拡張して, ρ_0 の行列式指標が $\psi\chi_3$ に一致するようにできる. 変形についての条件 X として, この ρ_0 に関する惰性剛な変形を考える.

9.3.8. 惰性群のアーベル表現を固定した, 惰性剛な変形. 必要ならば E を拡大体に取り替えることによって, $\mathbb{F}$ が 1 の原始 $q-1$ 乗根を含むと仮定する. $\overline{\rho}_v$ の像が上三角行列にふくまれ, さらにある表現 $\overline{\chi} : \mathrm{Gal}(F_v(\mu_q)/F_v) \to \mathbb{F}^\times$ が存在して $\overline{\rho}_v|_{I_v}$ が

$$\begin{pmatrix} \overline{\chi} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形であると仮定する. $\overline{\chi}$ の Teichmüller 持ち上げを χ で表わす. さらに $\overline{\chi}|_{I_v}$ の非自明な持ち上げ χ' であって, ω_q の巾であるものを取る. 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^\square(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とする.

- $\det \rho_v = \psi\chi_\ell$ である.
- $\rho_v|_{I_v}$ は $1 \oplus \chi'$ と同値である.
- $\overline{\chi}|_{I_v} = 1$ ならば, $\rho_v|_{I_v}$ は像が上三角行列に含まれ,

$$\begin{pmatrix} \chi' & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  の形である.

9.3.9. 惰性群の非アーベル表現を固定した, 惰性剛な変形. $F_v = \mathbb{Q}_q$ と仮定する. $q \equiv 1 \mod \ell$ と仮定する. $\mathbb{F}$ は 1 の原始 q^2-1 乗根をもつと仮定する. $\overline{\rho}_v$

は像が上三角行列に含まれ, 適当に不分岐指標でひねると

$$\begin{pmatrix} \chi_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の形であると仮定する. $\chi' : I_q \twoheadrightarrow \mathbb{F}_{q^2}^\times \to \mathcal{O}^\times$ を I_q のレベル 2 の指標であって, 位数が ℓ の巾となるものとする. 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^\square(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とする.

- $\det \rho_v = \psi\chi_\ell$ である.
- $\rho_v|_{I_v}$ は像が上三角行列に含まれ,

$$\begin{pmatrix} \chi' & * \\ 0 & \chi'^q \end{pmatrix}$$

の形である.

9.3.10. 半安定表現のひねりとなる変形. $\overline{\rho}_v$ は像が上三角行列に含まれ, ある指標 $\overline{\gamma}_v : D_v \to \mathbb{F}^\times$ に対して,

$$\begin{pmatrix} \overline{\gamma}_v\chi_\ell & * \\ 0 & \overline{\gamma}_v \end{pmatrix}$$

の形であると仮定する. $\overline{\gamma}_v$ の持ち上げ $\gamma_v : D_v \to \mathcal{O}^\times$ であって, 条件

- $\gamma_v|_{I_v}$ は $\overline{\gamma}_v|_{I_v}$ の Teichmüller 持ち上げである.
- $\gamma_v^2 = \psi$.

をみたすものをひとつ選ぶ. 以下の条件をみたす $\mathcal{D}^\square(E')$ に属する $\rho_v : D_v \to \mathrm{GL}_2(E')$ の全体を $X(E')$ とする.

- $\det \rho_v = \psi\chi_\ell$ である.
- ρ_v は像が上三角行列に含まれ,

$$\begin{pmatrix} \gamma_v\chi_\ell & * \\ 0 & \gamma_v \end{pmatrix}$$

の形である.

9.3.11. 枠つき変形空間の特異点解消. $\overline{\rho}_v$ の変形についての, 上に挙げた条件のうちのいくつかについて定理 9.8 を証明する際に, 枠つき変形空間の特異点解消の議論を用いる. ここではその一般論について述べる.

G を ℓ 有限性をみたす副有限群, $d \geq 1$ を整数, $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{F})$ を連続準同型とする.

$R^\square$ を $\overline{\rho}$ の普遍枠つき変形環とする. $\overline{R}^\square_X$ を $R^\square$ の, $(\mathrm{GL}_d)_1$ 作用で不変なとあるイデアルによる剰余環とする. $\overline{R}^\square_X$ は部分変形問題 $\mathcal{D}^\square_X \subset \mathcal{D}^\square$ を定める.

定義 9.20. 次のデータ $(\mathcal{R}, f, \mathcal{R}_0, \mathcal{Y}_0)$ を $\mathcal{D}_X$ の滑らかな特異点解消とよぶ:

(1) $\mathcal{R}$ は $\mathcal{O}$ 上平坦なスキーム, $f : \mathcal{R} \to \mathrm{Spec}(\overline{R}^\square_X)$ は $\mathcal{O}$ 上の射であって以下の条件をみたす:
   - f は固有かつ $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\overline{R}^\square_X)} \to f_*(\mathcal{O}_\mathcal{R})$ は単射である.
   - $\mathcal{R}[1/\ell] \to \mathrm{Spec}(\overline{R}^\square_X)[1/\ell]$ は閉埋め込みである.
   - $\mathrm{Spec}(\overline{R}^\square_X)$ の閉点の f による逆像を $\mathcal{Y} \subset \mathcal{R}$ とおくと, $\mathcal{Y}$ は幾何的に連結である.

(2) $(\mathcal{R}_0, \mathcal{Y}_0)$ は $\mathcal{R} \to \mathrm{Spec}\mathcal{O}$ の滑らかな代数化である. すなわち, $\mathcal{R}_0$ は有限型かつ滑らかな $\mathcal{O}$ 上のスキーム, $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{R}_0$ は閉部分スキームであって, $\mathcal{O}$ 上の射 $\mathcal{R} \to \mathcal{R}_0$ であって $\mathcal{Y}$ を $\mathcal{Y}_0$ に送るものが与えられていて, $\mathcal{R}$ の $\mathcal{Y}$ に沿った完備化から $\mathcal{R}_0$ の $\mathcal{Y}_0$ に沿った完備化への標準的な射は同型になる.

命題 9.21 ([KW3, Proposition 2.12]). $\mathcal{D}^\square_X$ の滑らかな完備化 $\mathcal{R}$ が存在すると仮定する. このとき $\overline{R}^\square_X$ は整域であり $\overline{R}^\square_X[1/\ell]$ は正則である. また $\overline{R}^\square_X$ の $\mathcal{O}$ 上の相対次元は $\mathcal{R}$ の $\mathcal{O}$ 上の相対次元に一致する. $\overline{K}$ の整数環を $\overline{\mathcal{O}}$ とおき, $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}})_c$ で, $\mathcal{O}$ 代数の準同型 $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathcal{O}} \to \mathcal{R}$ であって, $\mathrm{Spec}\,\overline{\mathcal{O}}$ の閉点を $\mathcal{Y}$ の点に送るもの全体を表わす. このとき, $\overline{\rho}$ の $\overline{\mathcal{O}}$ に係数の枠つき変形であってかつ条件 X をみたすもの全体は, $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{O}})_c \to \mathcal{D}^\square(\overline{\mathcal{O}})$ の像に一致する.

9.3.12. 定理 *9.8* の証明の概略. $q = \infty$ のとき. このように定めた $X(E')$ が, 実際に $\overline{\rho}_\infty$ の変形についての条件 X を与えており, X に対応する普遍枠つき変形環の剰余環 $\overline{R}^{\square,\psi}_\infty$ について定理 9.8 が成り立つことが, $\ell \geq 3$ の場合と $\ell = 2$ の場合とに分け, 後者の場合には枠つき変形空間の特異点解消の方法を用いることによって示される,

$q = \ell$ のとき, 上に挙げた各場合において, $(X(E'))_{E'}$ が, 実際に $\overline{\rho}_v$ の変形についての条件 X を与えており, X に対応する普遍枠つき変形環の剰余環 $\overline{R}^{\square,\psi}_v$ について定理 9.8 が成り立つことが, 以下の 5 通りに場合分けし, 各場合に以下に述べる理論を用いることによって示される.

- $\overline{\rho}_v$ が既約, $k(\overline{\rho}_v) \leq \ell$ かつ変形についての条件が重さの低いクリスタリン変形のとき. この場合は Fontaine-Laffaille [FL] の理論を用いた考察によって定理 9.8 を示す.

- $\overline{\rho}_v$ が既約かつ重さ 2 の変形のとき．このときは Savitt [Sav] の理論を用いた考察によって定理 9.8 を示す．
- $\overline{\rho}_v$ が通常で, $k(\overline{\rho}_v) \leq \ell$ で, 重さが低いクリスタリンな変形, あるいは潜在的にクリスタリンで重さ 2 の変形のとき, このときは枠つき変形空間の特異点解消を用いて定理 9.8 を示す．
- $\overline{\rho}_v$ が可約, 半安定, 重さ 2 の変形のとき．このときは, 枠つき変形空間の別の形の特異点解消を用いて定理 9.8 を示す．
- であって, 変形問題が重さ $\ell+1$ のクリスタリン持ち上げのとき．このときは, Berger-Li-Zhu [BLZ] の結果を用いた考察によって定理 9.8 を示す

$q \neq \ell, \infty$ かつ, 3 種類の惰性剛な変形に対する定理 9.8 は, 以下の惰性剛な変形についての次の一般的な結果から従う．

$q \neq \ell, \infty$ かつ半安定表現のひねりとなる変形に対する定理 9.8 は, 枠つき変形空間の特異点解消を用いて示される．

9.4. **バージョン (H) の保型性持ち上げ定理について．** ここで バージョン (H) の保型性持ち上げ定理の Kisin [Ki5] による証明について簡潔にふれる．

バージョン (H) の保型性持ち上げ定理では, 主張中で $\ell = 2$ と仮定している．$\ell \geq 3$ に対する, バージョン (H) の保型性持ち上げ定理と同様の主張は, 論文 [Ki4] で証明されている．Kisin [Ki5] によるバージョン (H) の保型性持ち上げ定理は, この論文 [Ki4] の議論に沿ったものである．

K を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大, $\mathcal{O}_K$ をその整数環, k を $\mathcal{O}_K$ の剰余体とする．$W(k)$ を Witt ベクトルのなす環とし, $\mathfrak{S} = W(k)[[u]]$ とおく．論文 [Ki4] において, $\ell = 2$ の場合を除外していた主要な理由は, 議論の途中で, $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦 ℓ 群スキームのなす圏と, $\mathfrak{S} = W(k)[[u]]$ 上の, とある条件をみたす付加構造つきの加群の圏 (Mod/$\mathfrak{S}$) との間の [Ki1] で確立された圏同値を用いているが, この圏同値の確立に $\ell \geq 3$ という条件が必要なためである．

ここで圏 (Mod/$\mathfrak{S}$) の定義を復習する．K の素元 π をひとつ固定し, π の $W(k)[1/\ell]$ 上の最小多項式を $E(u)$ で表わす．$\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ を環の連続自己準同型であって $W(k)$ 上 Frobenius 自己同型と一致し, $\varphi(u) = u^\ell$ をみたすただひとつのものとする．このとき, 圏 (Mod/$\mathfrak{S}$) は, 射影次元 1 以下かつ ℓ の適当な巾で消える有限生成 $\mathfrak{S}$ 加群 $\mathfrak{M}$ と, $\mathfrak{M}$ の φ 半線形自己準同型 $\varphi_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ であって, $\varphi_{\mathfrak{M}}$ の誘導する $\mathfrak{S}$ 加群の準同型写像 $\varphi_{\mathfrak{M}} \otimes 1 : \varphi^*(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S},\varphi} \mathfrak{S} \to \mathfrak{M}$ の余核が $E(u)$ 倍できえるものとの組 $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ を対象とする圏である．$(\mathfrak{M}_1, \varphi_{\mathfrak{M}_1})$, $(\mathfrak{M}_2, \varphi_{\mathfrak{M}_2})$ を圏 (Mod/$\mathfrak{S}$) の対象とするとき, $(\mathfrak{M}_1, \varphi_{\mathfrak{M}_1})$ から $(\mathfrak{M}_2, \varphi_{\mathfrak{M}_2})$ への

射は $\mathfrak{S}$ 線形な写像 $\mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ であって $\varphi_{\mathfrak{M}_1}$, $\varphi_{\mathfrak{M}_2}$ と両立的なものの全体である.

$(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ を圏 $(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})$ の対象とすると, $\mathfrak{S}$ 線形写像 $\psi : \mathfrak{M} \to \varphi^*(\mathfrak{M})$ であって, 合成 $\psi \circ (\varphi_{\mathfrak{M}} \otimes 1)$ が $E(u)$ 倍写像となるものが唯一つ存在する. $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ が連結であるとは, 十分大きい整数 n に対し, 合成

$$\varphi^{n-1*}(\psi) \circ \varphi^{n-2*}(\psi) \cdots \circ \psi : \mathfrak{M} \to \varphi^{n*}(\mathfrak{M})$$

の像が $(p, u)\mathfrak{M}$ に含まれることをいう.

Kisin [Ki5] は次を示した

定理 9.22 ([Ki5, Theorem 0.8]). ℓ を素数とし, K, $\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{S}$ を上の通りとする. このとき, $\mathcal{O}_K$ 上の有限平坦かつ連結な ℓ 群スキームのなす圏と, 連結な対象のなす圏 $(\mathrm{Mod}/\mathfrak{S})$ の充満部分圏との間に標準的な圏同値が存在する.

この圏同値と [Ki4] の議論を用いて, バージョン (H) の保型性持ち上げ定理の証明がなされる.

定理 9.22 の証明は, $\ell \geq 3$ の場合に [Ki1] でなされているのと同様, Breuil 加群の圏というものを間に挟んで, 定理 9.22 の p 可除群版の圏同値を確立することによってなされる.

$\ell = 2$ の場合の困難は, $\ell \geq 3$ のときに Breuil 加群の圏を間に挟む際に用いていた p 可除群に対する Grothendieck-Messing の理論がうまく使えない点にある. Kisin [Ki5] では, Grothendieck-Messing の理論のかわりに Zink [Z1], [Z2] のディスプレイとウィンドウの理論を用いてこの困難を克服している.

10. 整合系への持ち上げ定理の証明の流れ

整合系への持ち上げ定理の証明は次のようにしてなされる.

ステップ 1. $\overline{\rho}$ の大域変形問題を設定し, 定理 9.8 で述べた局所変形環の性質, および Galois コホモロジーの計算, とくに Selmer 群の位数と双対 Selmer 群の位数の比に関する Wiles の公式を用いて, 考察すべき大域変形環 $\overline{R}_S^{\psi}$ の Krull 次元が 1 以上であることを示す.

ステップ 2. Chebotarev の密度定理を用いて, Taylor-Wiles の継接ぎ議論に必要な, 補助的な素点の集合の存在を示しておく.

ステップ 3. ステップ 5 で Taylor-Wiles の継接ぎ議論を行うための準備, およびステップ 4 で Skinner-Wiles [SW3] の手法を用いた議論を行うための準備として, 偶数次総実代数体上の総定符号四元数環を用いて, 適当な保型形式の空間および適当な Hecke 環を構成しておく.

ステップ 4. Moret-Bailly 型の定理と (ℓ, ℓ') トリックとを用いて, $\overline{\rho}$ の潜在的保型性, すなわち $\overline{\rho}_F = \overline{\rho}|_{G_F}$ が保型的となるような総実代数体 F の存在を示す. さらに Skinner-Wiles [SW3] のアイデアによる, 許容的拡大で基底変換したあとでレベルを最適化する手法を用いて, 少し F を拡大することにより $\overline{\rho}_F$ の局所条件および $\overline{\rho}_F$ を与える保型表現の局所条件を改良する.

ステップ 5. ステップ 2, ステップ 3 を用いて, $\overline{\rho}_F$ の適当な大域変形環 $R_F^{\psi_F}$ に対して Taylor-Wiles の継接ぎ理論を適用し, $\overline{R}_F^{\psi_F}$ が $\mathcal{O}$ 上有限かつ 1 次元であることを示す.

ステップ 6. ステップ 1, ステップ 5 の結果および de Jong [dJ] の議論を用いて, 大域変形環 $\overline{R}_S^{\psi}$ が $\mathcal{O}$ 上有限かつ 1 次元であることを示す. このことから, 必要ならば E をその拡大体に取りかえることによって, 適当な条件をみたす $\overline{\rho}$ の $\mathcal{O}$ 上への変形 ρ_ℓ が存在することがわかる.

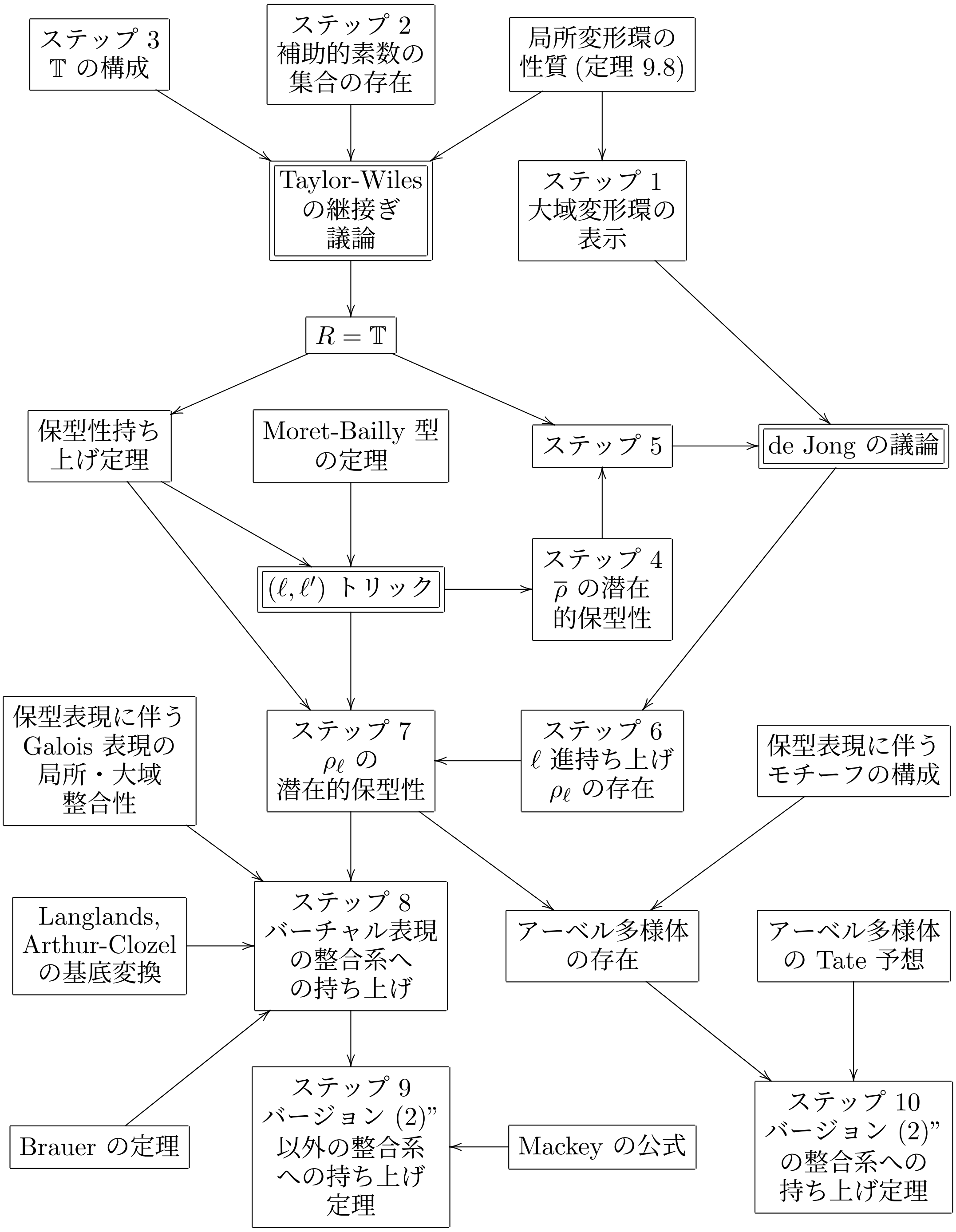
ステップ 7. $\overline{\rho}$ の潜在的保型性, および保型性整合系への持ち上げ定理を用いて, 適当な条件をみたす総実代数体 F' が存在して, $\rho_\ell|_{G_{F'}}$ が $\mathrm{GL}_{2,F'}$ の尖点的保型表現に付随する Galois 表現と同値であることを示す.

ステップ 8. GL_2 上の保型表現の巡回基底変換の理論 [Lan], [AC], および Hilbert 保型形式に伴う Galois 表現の局所・大域整合性 ([Car1], [Sai], [BR], [Sk]), および Brauer の誘導定理を用いる Taylor [Tay3, Proof of Theorem 6.6], Dieulefait [Die1, 3.2] のアイデアにより, ステップ 7 の整合系を $G_{\mathbb{Q}}$ のバーチャル表現の整合系に伸ばす.

ステップ 9 最後に Taylor [Tay2, 5.3.3], Dieulefait [Die1, 3.2], Wintenberger [Win, 4] に従い, Mackey の公式を用いて内積を計算することにより, $G_{\mathbb{Q}}$ のバーチャル表現の整合系が, 実は本当の表現の整合系であることがわかり, $(\rho_{p,\iota})$ という $\overline{\rho}$ の整合系への持ち上げが得られ, バージョン (2)" 以外の整合系への持ち上げ定理の証明が完了する.

ステップ 10 バージョン (2)" の整合系への持ち上げ定理はステップ 7 において, [Tay1] の方法を用いることにより示される. 具体的には, ステップ 7 においてさらに [BR] の結果を用いて, 適当な条件をみたす総実代数体 F' が存在して, ステップ 6 で見つけた ρ_ℓ の制限 $\rho_\ell|_{G_{F'}}$ が適当な自己準同型をもつ F' 上のアーベル多様体から来ることを示す. 最後に Faltings [Fa] によるアーベル多様体に関する Tate 予想 [Tat1] の証明を用いて, ρ_ℓ がアーベル多様体から来ることを示し, バージョン (2)" 以外の整合系への持ち上げ定理の証明が完了する.

上で説明した整合系への持ち上げ定理の証明の流れを以下に図示する.



以上のステップのうち, ステップ 6, ステップ 8, ステップ 9, ステップ 10 は, 大きな結果をブラックボックスとして用いるものの, わかり易い議論しか用い

ず, 少し紙面を割けば詳しく説明することも可能であるが, Serre 予想の証明に関する文献 [Ki3], [Kh5], [山内 1] に説明があるため本稿では省略する.

以下, 上のいくつかのステップについての補足をして, この節を終わりにしたい.

10.1. **大域変形環の局所変形環上の表示.** 整合系への持ち上げ定理の証明のステップ 1 で述べた, 大域変形環の表示に関する結果が具体的にどのようなものであるかについてここで述べる.

10.1.1. 大域変形問題. ここで Serre 予想の証明に現れる大域変形問題について説明する. F を総実代数体とする. 以下では F の素点の集合として S と V という 2 種類のものを同時に考察するが, 整合系への持ち上げ定理の証明のステップ 1 で必要な大域変形問題においては, V は空集合である整合系への持ち上げ定理の証明のステップ 2, および保型性持ち上げ定理の証明中で, 補助的な素点の集合を選ぶが, V がその補助的な素数の集合である場合の大域変形問題が, Taylor-Wiles の継接ぎ議論を行う際に必要となる.

ℓ を素数とする. E を $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大体とし, $\mathcal{O}$ を E の整数環, $\mathbb{F}$ を $\mathcal{O}$ の剰余体とする. $\overline{\rho}: G_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ を連続, 絶対既約かつ総奇な表現とする. $\phi: G_F \to \mathcal{O}^\times$ を $\det\overline{\rho}$ の持ち上げとなる総奇な指標とし, $\phi = \psi\chi_p$ とおく. ψ は数論的指標であると仮定する. F の素点の有限集合 S, V であって次の条件をみたすものを固定する:

- S と V とは共通部分をもたない.
- F の無限素点および ℓ を割る素点はすべて S に属する.
- $\overline{\rho}$ および ϕ は $S \cup V$ の外不分岐.

$W = S \cup V$ とおく. W の外不分岐な F の最大 Galois 拡大の Galois 群を G_W で表わす.

圏 $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ の対象 A に対し, 組 $(V_A, \{\beta_{v,A}\}_{v\in S})$ であって, 条件

- V_A は ρ の A への変形であって, 行列式が $\psi\chi_\ell$ となるもの.
- 各 $v \in S$ に対し, $\beta_{v,A}$ は V_A の基底のもち上げであって, $\overline{\rho}$ の表現空間に与えられている基底の持ち上げとなるもの.

をみたすものの同型類のなす集合を対応させる関手を表現する $\mathrm{CNL}_{\mathcal{O}}$ の対象を $R^{\square,\psi}_{S\cup V}$ で表わす. 各 $v \in S$ に対し, 定理 9.8 で考察した変形問題の条件 X_v (のうち選択可能なもの) をひとつ選び固定する. $\overline{\rho}|_{D_v}$ の, 行列式を $\psi\chi_\ell|_{D_p}$ に固定した枠つき普遍変形環を $R^{\square,\psi}_v$ で表わす. 条件 X_v の定める $R^{\square,\psi}_v$ の剰余環を $\overline{R}^{\square,\psi}_v$ で表わす. $\mathcal{O}$ 上の完備テンソル積 $\hat{\bigotimes}_{v\in S} R^{\square,\psi}_v$, $\hat{\bigotimes}_{v\in S}\overline{R}^{\square,\psi}_v$ をそれぞ

れ $R_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$, $\overline{R}_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$ で表わす. $\overline{R}_{S\cup V}^{\square,\psi} = R_{S\cup V}^{\square,\psi} \otimes_{R_S^{\mathrm{loc},\psi}} \overline{R}_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$ とおく. $V=\emptyset$ のとき, $R_{S\cup V}^{\square,\psi}$, $\overline{R}_{S\cup V}^{\square,\psi}$ をそれぞれ $R_S^{\square,\psi}$, $\overline{R}_S^{\square,\psi}$ で表わす.

10.1.2. *Selmer* 群 $H^1_{\{L_v\}}(G_W, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho}))$ と双対 *Selmer* 群 $H^1_{\{L_v^\perp\}}(G_W, \mathrm{Ad}^{0*}(\overline{\rho})(1))$. $\overline{\rho}$ の表現空間の $\mathbb{F}$ 線形自己準同型の全体を $\mathrm{Ad}(\overline{\rho})$ で表わし, $\mathrm{Ad}(\overline{\rho})$ の元であって, トレースが 0 となるものの全体を $\mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})$ で表わす. $\mathrm{Ad}(\overline{\rho})$, $\mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})$ は群 G_W の $\mathbb{F}$ 上の連続線形表現となる. 各 $v \in W$ に対し, $H^1(D_v, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho}))$ の部分空間 L_v を次で定める:

- $v \in S$ かつ $v \nmid 2$ のとき $L_v = 0$.
- $v \in S$ かつ $v | 2$ のとき L_v は境界準同型 $H^0(D_v, \mathrm{Ad}(\overline{\rho})/\mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})) \to H^1(D_v, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho}))$ の像.
- $v \in V$ のとき $L_v = H^1(D_v, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho}))$.

準同型 $H^1(G_W, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})) \to \prod_{v\in W} H^1(D_v, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho}))$ による $\prod_{v\in W} L_v$ の逆像を $H^1_{\{L_v\}}(G_W, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho}))$ とおく.

$\mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})$ の $\mathbb{F}$ 線形双対を $\mathrm{Ad}^{0*}(\overline{\rho})$ で表わす. $v \in V$ に対し, 局所 Tate 双対性の与える完全対 $H^1(D_v, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})) \times H^1(D_v, \mathrm{Ad}^{0*}(\overline{\rho})(1)) \to \mathbb{F}$ に関する, $L_v \subset H^1(D_v, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho}))$ の完全零化空間を $L_v^\perp \subset H^1(D_v, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})(1))$ で表わす. 準同型 $H^1(G_W, \mathrm{Ad}^{0*}(\overline{\rho})(1)) \to \prod_{v\in W} H^1(D_v, \mathrm{Ad}^{0*}(\overline{\rho})(1))$ による $\prod_{v\in W} L_v^\perp$ の逆像を $H^1_{\{L_v^\perp\}}(G_W, \mathrm{Ad}^{0*}(\overline{\rho})(1))$ とおく.

10.1.3. 大域変形環の局所変形環上の表示. [KW3, §4] では, [Bö], [Ki4], [Ki2] の方法を発展させて, $R_{S\cup V}^{\square,\psi}$ の $R_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$ 上の最小生成元およびおよび $\overline{R}_{S\cup V}^{\square,\psi}$ の $\overline{R}_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$ 上の最小生成元の個数を求め, $V=\emptyset$ の場合に最小生成元の間の最小関係式の個数を上から評価している.

補題 10.1 ([KW3, Lemma 4.4]). $R_{S\cup V}^{\square,\psi}$ の $R_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$ 上の最小生成元の個数, および $\overline{R}_{S\cup V}^{\square,\psi}$ の $\overline{R}_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}$ 上の最小生成元の個数はともに

$$\dim_{\mathbb{F}} H^1_{\{L_v\}}(G_W, \mathrm{Ad}^0(\overline{\rho})) - \delta_\ell + \sum_{v\in S} \dim_{\mathbb{F}} H^0(D_v, \mathrm{Ad}(\overline{\rho})) - \dim_{\mathbb{F}} H^0(G_W, \mathrm{Ad}(\overline{\rho}))$$

に等しい, ここで $\ell \geq 3$ のとき $\delta_\ell = 0$, $\ell = 2$ のとき $\delta_\ell = 1$ である.

補題 10.2. $V=\emptyset$ と仮定する. 補題 10.1 で与えた最小生成元の個数を g とし, 全射 $\varphi : R_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}[[X_1,\ldots,X_g]] \to R_S^{\square,\psi}$ をひとつ固定する. このとき, イデアル $\mathrm{Ker}\,\varphi R_S^{\square,\mathrm{loc},\psi}[[X_1,\ldots,X_g]]$ は高々$\dim_{\mathbb{F}} H^1_{\{L_v^\perp\}}(G_W, \mathrm{Ad}^{0*}(\overline{\rho})(1))$ 個の元で生成される.

$V=\emptyset$ とする．普遍変形のトレースの値で生成される $\overline{R}_S^{\square,\psi}$ の部分環を $\overline{R}_S^{\psi}$ で表わす．補題 10.1, 10.2 と Wiles の公式 [DDT, Theorem 2.19] を用いて次が示される．

命題 10.3 ([KW3, Proposition 4.5]). *$V=\emptyset$ と仮定する．環 $\overline{R}_S^{\psi}$ の次元は 1 以上である．*

10.2. **潜在的保型性定理.** 整合系への持ち上げ定理の証明のステップ 4, ステップ 7 で述べた, 大域変形環の表示に関する結果が具体的にどのようなものであるかについてここで述べる．

定理 10.4. *$\overline{\rho}$ を S 型の表現とし, $\ell\geq 3$ のときは, さらに $2\leq k(\overline{\rho})\leq \ell+1$ と仮定する．$\ell=2$ のときは $\overline{\rho}$ の像が可解でないと仮定し, $\ell\geq 3$ のときは $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限が既約であると仮定する．このとき, 偶数次総実代数体 F であって, 条件*

- 拡大 $F/\mathbb{Q}$ は ℓ で不分岐である．
- $\rho|_{D_\ell}$ が既約であれば, 拡大 $F/\mathbb{Q}$ は ℓ で完全分解する．
- $\overline{\rho}(G_{\mathbb{Q}})=\overline{\rho}(G_F)$ が成り立つ．
- $\overline{\rho}|_{G_{F(\mu_\ell)}}$ も既約である．

をみたし, さらに条件

- $\ell\geq 3$ または $k(\overline{\rho})=2$ であれば, $\overline{\rho}|_{G_F}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現であって, すべての無限素点で重さ $k(\overline{\rho})$ かつ, ℓ の上にあるすべての素点で不分岐となるものが存在する．
- $\overline{\rho}|_{G_F}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現であって, すべての無限素点で重さ 2 かつ, ℓ の上にあるすべての素点で導手の指数が 1 以下となるものが存在する．
- $k(\overline{\rho})=\ell$ かつ $\overline{\rho}$ の I_ℓ への制限が自明であれば, ℓ の上にある F の各素点 v に対し $\rho|_{D_v}$ は不分岐である．
- ℓ と異なる素数の有限集合 $\{p_i\}$ および, 各 i に対して $\mathbb{Q}_{p_i}$ の有限次拡大体 F_i が与えられたとき, F を, 任意の埋め込み $F\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_{p_i}$ の像の完備化が F_i を含むようにできる．
- $\ell\geq 3$ かつ $k(\overline{\rho})=\ell+1$ のときは, F が ℓ で完全分解するようにできる．
- $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 L が与えられたとき, F と L とが $\mathbb{Q}$ 上線形無関連になるように F を選ぶことができる．

をみたすものが存在する．

11. 証明の第 1 段階

定理 11.1. (1) (Tate [Tat2] および Serre [Ser3]) ℓ が 2 または 3 のとき, S 型の表現 $G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ は存在しない.

(2) (Brumer-Kramer [BrK], Schoof [Scho]) 素数 ℓ が $2, 3, 5, 7$, 13 のいずれかのとき, $\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体であって, ℓ の外良い還元を持ち, ℓ で高々半安定還元をもつようなものは存在しない.

注 11.2. 定理 3.8 の証明に用いるのは $\ell = 2$ と $\ell = 5$ の場合だけである. また, 後に書く Fermat の最終定理の証明にも $\ell = 2$ の場合を用いる).

注 11.3. Brueggeman[Br] は一般化された Riemann 予想を仮定して, 定理 11.1 (1) を $\ell = 5$ の場合に拡張していた.

注 11.4. 定理 11.1 の主張の根拠は

(1) $\ell = 2, 3,\ 2 \leq k \leq 2[\frac{\ell^2}{2}]$ のとき, $S_k(\Gamma_1(\ell)) = 0$ であること, および

(2) ℓ が $2, 3, 5, 7$, 13 のいずれかのとき, $S_k(\Gamma_1(\ell)) = 0$ であること

にある. (ただし (2) ではアーベル多様体を GL_2 型のものに限定していない).

以下に, 定理 11.1 の証明の概略を述べる. Odlyzko の上界 ℓ を 2 または 3 とする. $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ を S 型の表現であって $N(\overline{\rho}) = 1$ のものとする. $\overline{\rho}$ の核に対応する $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体を K とおく. K の定義により Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ は $\overline{\rho}$ の像 $\overline{\rho}(G_{\mathbb{Q}})$ と標準的に同型である. $N(\overline{\rho}) = 1$ という条件より, K の判別式 d_K は ℓ の巾である. Odlyzko の上界により, このとき

$$d_K^{1/\sharp G} > (\sharp G \text{ に依存する明示的な値}) \tag{11.1}$$

である.

$v|\ell$ を K の素点とし, $G_v = \mathrm{Gal}(K_v/\mathbb{Q}_\ell) \subset G$ を v における分解群とする. G_v は可解である. $\mathcal{D}_{K_v/\mathbb{Q}_p}$ を共役差積とする. $K_v/\mathbb{Q}_p$ が暴分岐のとき,

$$\mathcal{D}_{K_v} = (\text{明示的な式}) \tag{11.2}$$

が成り立つ. これより $\sharp G \geq 60$ のとき, (11.1) および (11.2) の両方をみたすことはありえないことがわかる.

$\sharp G < 60$ のとき, G は可解となる. G の可能性を具体的に分類し, 個々の可能性をつぶしてゆくことで主張 (1) が得られる.

$\ell = 2, 3, 5, 7, 13$ のとき, それぞれ $p = 3, 2, 2, 3, 2$ とおく. このとき次が示せる:

命題 11.5. (1) $\mathbb{Z}[1/p]$ 上の $(\ell, \dots, \ell)$ 型の有限平坦可換群スキーム G であって,

- 任意の $\sigma \in I_p$ の $G(\overline{\mathbb{Q}})$ への作用が $(\sigma-1)^2=0$ をみたす.
- G は fppf 層の圏に於ける単純対象.

をみたすものは, μ_ℓ と $\mathbb{Z}/\ell$ のみである.

(2) $\mathrm{Ext}^1(\mu_\ell, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$ が成り立つ. (Ext^1 は fppf 層の圏で考えている.)

(証明の概略). (1) Odlyzko の上界を用いて, $\ell \neq 2$ のとき $L = \mathbb{Q}(G(\overline{\mathbb{Q}}), \zeta_{2\ell}, p^{1/\ell})$, $\ell = 2$ のとき $L = \mathbb{Q}(G(\overline{\mathbb{Q}}), \zeta_3, \zeta_4, 3^{1/2})$, とおく, このとき $[L : \mathbb{Q}(\zeta_\ell)]$ が ℓ 巾であることを示す.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mu_\ell, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_\ell}(\mu_\ell, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$ であるから, Mayer-Vietoris により,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[1/p]}(\mu_\ell, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[1/p\ell]}(\mu_\ell, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_\ell}(\mu_\ell, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})\right)$$

が成り立つ. 右辺では底スキーム上 ℓ が可逆なので, fppf 層の圏ではなく étale 層の圏で考えても同じになり, それは Kummer 理論を用いて計算できる. 結局

$$\cong \mathrm{Ker}\left((\mathbb{Z}[1/p\ell, \zeta_\ell]^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})_{\omega^2} \to (\mathbb{Q}_\ell(\zeta_\ell)^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})_{\omega^2}\right)$$

となる. □

12. レベル 1 のとき.

この節では $N(\overline{\rho}) = 1$ のときの定理 3.8 の証明を紹介する. ここで紹介する証明は Khare [Kh2] によるものである. 定理 3.8 には Dieulefait [Die3] による別証明もあり, [萩, 11] に Dieulefait [Die3] の証明についての概説がある.

定理 12.1. *$N(\overline{\rho}) = 1$ をみたす S 型の表現 $\overline{\rho}$ に対し, 予想 3.5 は正しい.*

$S(k, \ell)$ を次の主張とする.

$S(k,\ell)$: $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 上の S 型の表現 $\overline{\rho}$ であって, $k(\overline{\rho}) = k$, $N(\overline{\rho}) = 1$ をみたすものはすべて保型的である.

§11 で述べた定理 11.1 から, 任意の $k \geq 2$ に対し $S(k, 2)$, $S(k, 3)$ が従う. また定理 11.1 を用いて次が示される.

命題 12.2. *S 型の表現 $\overline{\rho}$ であって, $N(\overline{\rho}) = 1$, $k(\overline{\rho}) = 6$ をみたすものは存在しない. とくに主張 $S(6, 5)$ は正しい.*

(証明). $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_5)$ を S 型の表現であって, $N(\overline{\rho}) = 1$, $k(\overline{\rho}) = 6$ をみたすものとする. バージョン (2)" の整合系への持ち上げ定理を適用して $\overline{\rho}$ を狭義整合系 $(\rho_p)_p$ に持ち上げる. 整合系 $(\rho_p)_p$ の性質から, $\mathbb{Q}$ 上の自明でないアーベル多様体であって, 5 以外で良還元, 5 で高々半安定還元をもつものが存在する. これは定理 11.1 に矛盾する. □

k, ℓ が小さいときの $S(k, \ell)$ は以下の流れで導かれる.

$$\begin{tikzcd}
\text{定理 } 11.1 \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \begin{Bmatrix} S(2,2) \\ S(2,3) \end{Bmatrix} \arrow[r, "(*)"] & S(2,\ell) \arrow[dr] & \\
& \begin{Bmatrix} S(4,2) \\ S(4,3) \end{Bmatrix} \arrow[r, "(*)"] & S(4,\ell) \arrow[r] & S(k,5) \\
& S(6,5) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

ここで上の図式中の (*) は以下の命題から従う.

命題 12.3. $k \leq \ell + 1$ を満たす整数 k と奇素数 ℓ に対し, $S(k, \ell)$ が成立すれば, $k \leq \ell' + 1$ をみたす任意の奇素数 ℓ' に対し $S(k, \ell')$ が成り立つ.

(証明). k, ℓ, ℓ' を命題の主張の通りとし, 主張 $S(k, \ell)$ を仮定する. $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_{\ell'})$ を S 型の表現であって $N(\overline{\rho}) = 1$, $k(\overline{\rho}) = k$ をみたすものとする. $\overline{\rho}$ の $G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}$ への制限が可約ならば, $\overline{\rho}$ の保型性が直接確かめられるので, $\overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\mu_\ell)}}$ が既約であると仮定する. $\overline{\rho}$ にバージョン (1) の整合系への持ち上げ定理を適用して, $\overline{\rho}$ を狭義整合系 $(\rho_p)_p$ に持ち上げ, その法 ℓ 還元 $\overline{\rho}_\ell$ を考える:

$$\begin{tikzcd}
& (\rho_p)_p \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ \ell'"', "(1)"] \arrow[dr, "\mathrm{mod}\ \ell"] & \\
\overline{\rho} & & \overline{\rho}_\ell
\end{tikzcd}$$

仮定により $\overline{\rho}_\ell$ は可約または保型的である. $\overline{\rho}_\ell$ の $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ への制限が可約のときは, [FL], [BLZ] の結果を用いると ρ_ℓ を適当な指標でひねったものが ℓ で通常となることがわかるため, 定理 8.6 より ρ_ℓ は保型的になり, したがって $\overline{\rho}$ は保型的である. $\overline{\rho}_\ell$ の $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ への制限が既約のときは, $k \leq \ell - 1$ となることがわかるので, [DFG] の結果から ρ_ℓ は保型的になり, したがって $\overline{\rho}$ は保型的である. □

*(*定理 *12.1* の証明*).* $\ell \geq 5$ とし, $S(k,\ell)$ が任意の k について成立すると仮定する. ℓ' を ℓ より大きい最小の非フェルマ型素数とする. 命題 12.3 より, 任意の k について $S(k,\ell')$ が成り立つことを示せば, ℓ に関する帰納法によって, 定理 12.1 の証明が完成する.

ℓ''^r を $\ell-1$ を割る奇素数巾のうち最大のものとする. $\overline{\rho}$ を $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数の S 型の表現とする. $\overline{\rho}$ が 2 面体的ならば $\overline{\rho}$ の保型性を示すのはやさしい. $k(\overline{\rho}) \leq \ell+1$ のときは命題 12.3 より $\overline{\rho}$ の保型性が示せる. $\overline{\rho}|_{D_{\ell'}}$ が既約のときは, 解析数論を少し用いると, 必要ならば $\overline{\rho}$ を円分指標の巾でひねったものに取り替えることによって $k(\overline{\rho}) \leq \ell+1$ にできる. $\overline{\rho}|_{D_{\ell'}}$ が可約のときは, 通常の場合に帰着できる. 通常の場合には整合系への持ち上げ定理を適用して, 重さ 2 の, ℓ' で分岐するかもしれないがレベルが高々 ℓ' の整合系への持ち上げが作れる. この整合系を法 ℓ'' で還元したものを $\overline{\rho}_{\ell''}$ とおく. ℓ'' の取り方より $k(\overline{\rho}_{\ell''}) = 2$ となる. $\overline{\rho}_{\ell''}$ が可約または 2 面体的, または ℓ' で不分岐ならば, $\overline{\rho}_{\ell''}$ が保型的であることがわかるので, 回りまわって $\overline{\rho}$ も保型的である. そこで $\rho_{\ell''}$ が可約でも 2 面体的でも ℓ' で不分岐でもないとする. バージョン (3) の整合系への持ち上げ定理を用いて $\overline{\rho}$ を重さ 2 の整合系への持ち上げる. この整合系を法 ℓ' で還元したものを $\overline{\rho}'_{\ell'}$ とおく. このとき $\overline{\rho}'_{\ell'}$ を適当に指標でひねったものに取り替えると, $k(\overline{\rho}_{\ell'}) \leq \ell+1$ となることがわかる. □

13. レベルが素数, 重さ 2 のとき

定理 13.1 ([KW1, Theorem 5.2], [Kh2, Corollary 1.2], [KW2, Corollary 8.2]). ℓ を奇素数, $\overline{\rho}$ を $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数の S 型の表現とする. $k(\overline{\rho}) = 2$ であり, かつ $N(\overline{\rho}) = \ell'$ が素数であると仮定する. このとき $\overline{\rho}$ は保型的である.

*(*証明*).* まず $\ell' = 2$ の場合を考える. バージョン (2)" の整合系への持ち上げ定理を用いて $\overline{\rho}$ を整合系 (ρ_p) に持ち上げる. 整合系 (ρ_p) の性質より, $\mathbb{Q}$ 上の自明でないアーベル多様体 A が存在して, 2 以外の素数で良還元をもち, 2 で高々半安定還元を持つ. これは Brumer-Kramer [BrK] が証明した定理 11.1 (2) の $\ell = 2$ の場合に矛盾する.

次に $\ell' \geq 3$ とする. $G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\overline{\rho}} \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell) \to \mathrm{PGL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ の像が 2 面体群となる場合は直接保型性を証明できるので, そうでないと仮定する. バージョン (1) の整合系への持ち上げ定理を用いて $\overline{\rho}$ を整合系に持ち上げ, その法 ℓ' 還元を考

える.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ \ell"', "(1)"] \arrow[dr, "\mathrm{mod}\ \ell'"] & \\
\overline{\rho} & & \overline{\rho}_{\ell'}
\end{tikzcd}
$$

仮定より $N(\overline{\rho}_{\ell'}) = 1$ である. $\overline{\rho}_{\ell'}$ が可約の場合は, $\ell' \geq 3$ かつ $N(\overline{\rho}_{\ell'}) = 1$ であることを用いると Skinner-Wiles の保型性持ち上げ定理 8.6 が適用可能であることがわかる. これより $\rho_{\ell'}$ は保型的であり, したがって $\overline{\rho}$ も保型的である. □

注 13.2. 上の定理の証明中で行ったように, バージョン (1) の整合系への持ち上げ定理を使って $\overline{\rho}$ を整合系 $(\rho_\ell)_\ell$ に持ち上げると, 整合系は ℓ で不分岐となる. そのため整合系が分岐する素点 ℓ' を選び, 整合系の法 ℓ' 還元を取ると, もとの $\overline{\rho}$ よりも分岐する素点の個数の少ない表現が得られる. このようにして分岐する素点の個数を減らす技法は, レベルが一般の場合の Serre 予想の証明でも用いられる.

14. レベル一般のとき

証明の方針は以下の通りである:

- 局所良 2 面体的という概念の導入.
- $\overline{\rho}$ が局所良 2 面体の場合への帰着.
- 悪い素点の個数に関する帰納法および, 係数体の標数 ℓ に関する帰納法.

定義 14.1. $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ が局所 2 面体的であるとは, 素数 $q \neq \ell$, 素数 $t \neq q$, および惰性群 $I_q \subset G_{\mathbb{Q}}$ の法 ℓ 指標 $\psi : I_q \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ が存在して, 次をみたすことをいう:

- ψ は自明でなく, 位数は t の巾である.
- $\overline{\rho}$ の I_q への制限 $\overline{\rho}|_{I_q}$ は $\begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi^q \end{pmatrix}$ と同値. (このことより特に t は q^2-1 の約数であり, また $N(\overline{\rho})$ は q でちょうど 2 回割り切れることになる.
- t は $q+1$ の約数かつ $t > \max(Q(N(\overline{\rho})/q^2), 5, \ell)$ である. ここで整数 $n > 1$ に対し, $Q(n)$ で n を割る最大の素数を表わす.

分岐する素点に関する帰納法についてであるが, 整数 $r \geq 1$ について, 次の 2 種類の主張を考える:

(L_r) 局所 2 面体的な任意の S 型の表現 $\overline{\rho}$ であって, $N(\overline{\rho})$ が奇数, または $\ell = 2$ かつ $k(\overline{\rho}) = 2$ の場合 $\sharp\{\ell \mid N(\overline{\rho})\} \leq r$ ならば $\overline{\rho}$ は保型的である.

(W_r) 局所良 2 面体的な任意の S 型の表現 $\overline{\rho}$ について, $N(\overline{\rho})$ が奇数かつ $k(\overline{\rho}) = 2$ であれば, $\sharp\{\ell \mid N(\overline{\rho})\} \leq r$ ならば $\overline{\rho}$ は保型的である.

Khare-Wintenberger [KW2] は次を証明した.

定理 14.2. (1) 主張 (W_1) が成り立つ.
(2) 主張 (L_r) が成り立てば, 主張 (W_{r+1}) が成り立つ.
(3) 主張 (W_r) が成り立てば, 主張 (L_r) が成り立つ.

系 14.3. 任意の $r \geq 1$ に対し主張 (W_r) および主張 (L_r) が成り立つ. つまり, $\overline{\rho}$ が局所良 2 面体的な S 型の表現であり, $N(\overline{\rho})$ が奇数であり, かつ $\ell = 2$ ならば $k(\overline{\rho}) = 2$ であれば $\overline{\rho}$ は保型的である.

(証明). 定理 14.2 (1) より (W_1) が成り立つ. 定理 14.2 の (3) と (2) とを交互に用いて,

$$(W_1) \Rightarrow (L_1) \Rightarrow (W_2) \Rightarrow (L_2) \Rightarrow \cdots$$

の順に示してゆくことにより, 任意の $r \geq 1$ に対し主張 (W_r), (L_r) が成り立つことがわかる. $\square$

定理 14.2 の証明について説明する. 局所 2 面体的という条件は, 証明の途中に現れる各 $\overline{\rho}_i$ の既約性がくずれないようにするために用いられる.

(証明). (1) の証明.

$\overline{\rho}$ を, q で局所良 2 面体的な表現とする. $\mathrm{Ram}\,\overline{\rho}$ を $\overline{\rho}$ が分岐する ℓ 以外の素数の集合, すなわち $\mathrm{Ram}\,\overline{\rho} = \{\ell \mid \ell | N(\overline{\rho})\}$ とする. $\sharp\mathrm{Ram}\overline{\rho} = 1$ と仮定する. 局所良 2 面体的の定義から, このとき $\mathrm{Ram}\,\rho = \{q\}$, $q^2 | N(\rho)$ となる. 次の図式を用いる

$$\begin{tikzcd}
 & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\bmod \ell"', "(1)"] \arrow[dr, "\bmod t"] & \\
\overline{\rho} & & \overline{\rho}_t
\end{tikzcd}$$

ここで t は局所良 2 面体的の定義に現れる t である. $\overline{\rho}|_{I_q}$ は $\begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi^q \end{pmatrix}$ の形の表現と同値であり, ψ の位数は t のべきであったから, $\overline{\rho}_t|_{I_q}$ は $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形の表現と同値で, したがって $\mathrm{Ram}(\overline{\rho}_t) \subset \{q\}$ となる.

整合系への持ち上げ定理 (2) を使うメリットは整合系 (ρ_ℓ) の重さが 2 であるという点にある. そのため整合系の法 ℓ' 還元の保型性から, 保型性の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系の保型性を示すことが可能となりやすい.

$\mathrm{Ram}(\overline{\rho}_t) = \emptyset$ とすると, 定理 12.1 より $\overline{\rho}$ は保型的になり, したがって $\overline{\rho}$ も保型的である. $\mathrm{Ram}(\overline{\rho}_t) = \{q\}$ のときは, さらにバージョン (3) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 q 還元を考える.

$$\begin{tikzcd} & (\rho'_p)_p \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ t"', "(3)"] \arrow[dr, "\mathrm{mod}\ q"] & \\ \overline{\rho}_t & & \overline{\rho}'_q \end{tikzcd}$$

すると ρ'_t は重さ 2, t, q の外で不分岐, かつ t で Barsotti-Tate となる. したがって ρ'_q は重さ 2, かつ q 以外で不分岐となる. したがって $\mathrm{Ram}\,\overline{\rho}'_q = \emptyset$ であり, (L_0) により, $\overline{\rho}_q$ は保型的である. これより $\overline{\rho}$ も保型的になる.

(2) の証明. 局所良 2 面体的な S 型の表現 $\overline{\rho}$ が (W_{r+1}) の仮定をみたす, すなわち $k(\overline{\rho}) = 2$, かつ $\sharp\mathrm{Ram}\,\overline{\rho} \leq r+1$ と仮定する. $q \in \mathrm{Ram}\,\overline{\rho}$ をひとつとる. バージョン (1) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 q 還元を考える.

$$\begin{tikzcd} & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ \ell"', "(1)"] \arrow[dr, "\mathrm{mod}\ q"] & \\ \overline{\rho} & & \overline{\rho}_q \end{tikzcd}$$

すると ρ_ℓ は重さ 2 であり, $\{\ell\} \cup \mathrm{Ram}\,\overline{\rho}$ の外で不分岐である. したがって ρ_q も重さ 2 であり, $\mathrm{Ram}\,\overline{\rho}$ の外で不分岐である. したがって $\mathrm{Ram}\overline{\rho}_q \subset \mathrm{Ram}\overline{\rho} \setminus \{q\}$ となり, $\mathrm{Ram}\overline{\rho}_q \leq r$ であるから仮定により $\overline{\rho}_q$ は保型的である. したがって $\overline{\rho}$ も保型的になる.

(3) の証明. 局所良 2 面体的な S 型の表現 $\overline{\rho}$ が主張 (L_r) の仮定をみたす, すなわち $2 \leq k(\overline{\rho}) \leq \ell + 1$, $\ell = 2$ ならばさらに $k(\overline{\rho}) = 2$, $\sharp\mathrm{Ram}\,\overline{\rho} \leq r$, かつ $N(\overline{\rho})$ が奇数とする.

- $\ell = 2$ のとき
- $\ell = 3$ のとき
- $\ell = 5$ のとき
- $\ell \geq 7$ のとき

の 4 通りに場合分けする.

$\ell = 2$ であれば $k(\overline{\rho}) = 2$ であり, (W_r) を仮定しているから $\overline{\rho}$ は保型的である.

$\ell = 3$ のときは, バージョン (1) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 2 還元を考える.

$$\begin{tikzcd} & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } 3"', "(1)"] \arrow[dr, "\text{mod } 2"] & \\ \overline{\rho} & & \overline{\rho}_2 \end{tikzcd}$$

もし $\overline{\rho}_2$ が 3 で不分岐ならば, 仮定 (W_r) によって $\overline{\rho}_2$ は保型的である. したがって $\overline{\rho}$ も保型的になる. $\overline{\rho}_2$ が 3 で分岐するときは, さらにバージョン (4) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 3 還元を考える.

$$\begin{tikzcd} & (\rho'_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } 2"', "(4)"] \arrow[dr, "\text{mod } 3"] & \\ \overline{\rho}_2 & & \overline{\rho}'_3 \end{tikzcd}$$

ただし (4) における q として $q = 3$ をとっている. すると $\mathrm{Ram}(\overline{\rho}'_3) \subset \mathrm{Ram}(\overline{\rho})$ かつ $k(\overline{\rho}'_3) = 2$ となる. したがって (W_r) より $\overline{\rho}'_3$ は保型的となり, そこから $\overline{\rho}$ も保型的となることがわかる.

$\ell = 5$ のとき. まずバージョン (2) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 2 還元を考える.

$$\begin{tikzcd} & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } 5"', "(2)"] \arrow[dr, "\text{mod } 2"] & \\ \overline{\rho} & & \overline{\rho}_2 \end{tikzcd}$$

もし $\overline{\rho}_2$ が 5 で不分岐ならば, 仮定 (W_r) によって $\overline{\rho}_2$ は保型的である. したがって $\overline{\rho}$ も保型的になる. $\overline{\rho}_2$ が 5 で分岐するときは, さらにバージョン (3) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 5 還元を考える.

$$\begin{tikzcd} & (\rho'_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } 2"', "(3)"] \arrow[dr, "\text{mod } 5"] & \\ \overline{\rho}_2 & & \overline{\rho}'_5 \end{tikzcd}$$

ただし (3) における q として $q = 5$ をとっている. すると $k(\overline{\rho}'_5) = 4$ となる. ここで $\overline{\rho}'_5$ が 3 で不分岐か分岐するかで場合分けをする.

$\overline{\rho}'_5$ が 3 で不分岐ならば, バージョン (1) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 3 還元を考える.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\rho''_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } 5"', "(1)"] \arrow[dr, "\text{mod } 3"] & \\ \overline{\rho}'_5 & & \overline{\rho}''_3 \end{tikzcd}$$

このとき $\mathrm{Ram}(\overline{\rho}''_3) \subset \mathrm{Ram}(\overline{\rho})$ であるから, $\ell = 3$ に対する (L_r) を用いて $\overline{\rho}''_3$ は保型的であることがわかる. そこから $\overline{\rho}$ も保型的となることがわかる.

$\overline{\rho}'_5$ が 3 で分岐するときは, バージョン (2) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 3 還元を考える.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\rho''_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } 5"', "(2)"] \arrow[dr, "\text{mod } 3"] & \\ \overline{\rho}'_5 & & \overline{\rho}''_3 \end{tikzcd}$$

このとき $\sharp\mathrm{Ram}(\overline{\rho}''_3) \leq \sharp\mathrm{Ram}(\overline{\rho})$ であるから, $\ell = 3$ に対する (L_r) を用いて $\overline{\rho}''_3$ は保型的であることがわかる. そこから $\overline{\rho}$ も保型的となることがわかる.

$\ell \geq 7$ のとき, ℓ より小さい素数を法とする表現については (L_r) が成立すると仮定する. ℓ を法とする表現 $\overline{\rho}$ について (L_r) が成立することを示す.

ℓ より小さい素数のうち最大のものを P とおく. $\ell - 1$ を割る素数 ℓ' であって, 次の 2 条件のうちいずれかをみたすものが存在する:

(1) $\ell' \neq 2$ であり, ℓ' が $\ell - 1$ をちょうど r 回割り切るとし, $\ell'^r = 2m + 1$ とおくと, 不等式 $\ell/P \leq \frac{2m+1}{m+1} - \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{P}$ が成り立つ.

(2) $\ell' = 2$ であり, ℓ' が $P - 1$ をちょうど r 回割り切るとすると, $r \geq 4$ であり, 不等式 $\ell/P \leq \frac{2^r}{2^{r-1}+2} - \frac{2^{r-1}-2}{2^{r-1}+2} \cdot \frac{1}{P}$ が成り立つ.

このことは解析数論を用いて証明がなされる.

以上の準備のもと $\overline{\rho}$ を局所良 2 面体的な法 ℓ 係数の S 型の表現であると仮定する.

まずバージョン (2) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 ℓ' 還元を考える.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } \ell"', "(2)"] \arrow[dr, "\text{mod } \ell'"] & \\ \overline{\rho} & & \overline{\rho}_{\ell'} \end{tikzcd}$$

$\ell' \le \frac{\ell-1}{2} \le P$ であることに注意しておく．もし $\overline{\rho}_{\ell'}$ が ℓ で不分岐ならば, 仮定 (W_r) によって $\overline{\rho}_{\ell'}$ は保型的である．したがって $\overline{\rho}$ も保型的になる．$\overline{\rho}_{\ell'}$ が 5 で分岐するときは, さらにバージョン (3) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 ℓ 還元を考える．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\rho'_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } \ell'"', "(3)"] \arrow[dr, "\text{mod } \ell"] & \\ \overline{\rho}_{\ell'} & & \overline{\rho}'_{\ell} \end{tikzcd}$$

ただし (3) における q として $q=\ell$ をとっている．ここでポイントは, ℓ/P に関する上の不等式を用いると, $\overline{\rho}'_{\ell}$ を適当に円分指標の巾でひねったものを $\overline{\rho}''_{\ell}$ とおくと, $k(\overline{\rho}''_{\ell}) \le P+1$ が成立することである．ここで $\overline{\rho}''_{\ell}$ が P で不分岐か分岐するかで場合分けをする．

$\overline{\rho}''_{\ell}$ が P で不分岐ならば, さらにバージョン (1) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 P 還元を考える．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\rho''_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } \ell"', "(1)"] \arrow[dr, "\text{mod } P"] & \\ \overline{\rho}''_{\ell} & & \overline{\rho}''_{P} \end{tikzcd}$$

このとき $\mathrm{Ram}(\overline{\rho}''_P) \subset \mathrm{Ram}(\overline{\rho})$ であるから, 法 P 表現に対する (L_r) を用いて $\overline{\rho}''_P$ は保型的であることがわかる．そこから $\overline{\rho}$ も保型的となることがわかる．

$\overline{\rho}''_{\ell}$ が P で分岐するときは, さらにバージョン (2) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 P 還元を考える．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\rho''_p)_p \arrow[dl, "\text{mod } \ell"', "(2)"] \arrow[dr, "\text{mod } P"] & \\ \overline{\rho}''_{\ell} & & \overline{\rho}''_{P} \end{tikzcd}$$

このとき $\sharp\mathrm{Ram}(\overline{\rho}''_P) \le \sharp\mathrm{Ram}(\overline{\rho})$ であるから, 法 P 表現に対する (L_r) を用いて $\overline{\rho}''_P$ は保型的であることがわかる．そこから $\overline{\rho}$ も保型的となることがわかる．

今までの議論により, $\overline{\rho}$ が局所良 2 面体的な S 型の表現であり, 条件 $\ell=2$ ならば $k(\overline{\rho})=2$, $N(\overline{\rho})$ は奇数をみたすとすると, $\overline{\rho}$ が保型的であることがわかった． □

次に定理 14.2 から, 局所良 2 面体的とは限らない $\overline{\rho}$ に対する Serre 予想をどのように導くのかについて説明する．

定理 14.4. $r \geq 0$ とする．次の (D_r) を仮定する．

> **(D_r):** 局所良 2 面体的な任意の S 型の表現 $\overline{\rho}$ について, $\overline{\rho}$ の係数体の標数が 2 でなく, かつ $N(\overline{\rho})$ が 2^{r+1} で割り切れなければ, $\overline{\rho}$ は保型的である．

$\overline{\rho}$ を (局所良 2 面体的とは限らない) S 型の表現であって, $N(\overline{\rho})$ が 2^{r+1} で割り切れないものとする．$r = 0$ かつ $\ell = 2$ のときにはさらに $k(\overline{\rho}) = 2$ であると仮定する．このとき $\overline{\rho}$ は保型的である．

(証明). (D_r) を仮定する．$\overline{\rho}$ を S 型の表現であって $N(\overline{\rho})$ が 2^{r+1} で割り切れないものとする．$r = 0$ かつ $\ell = 2$ のときにはさらに $k(\overline{\rho}) = 2$ であると仮定する．

まずバージョン (2) の整合系への持ち上げ定理を用いて $\overline{\rho}$ を整合系に持ち上げる．

$$\begin{tikzcd}
 & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ \ell"', "(2)"] \\
\overline{\rho} &
\end{tikzcd}$$

ρ_ℓ は重さ 2 で, $\mathrm{Ram}\,\overline{\rho} \cup \{\ell\}$ の外不分岐である．もし, 素数 $\ell' \notin \mathrm{Ram}\,\overline{\rho} \cup \{\ell\}$ であって, $\ell' > 5$ かつ $\overline{\rho}_{\ell'}$ が可解像を持つものが存在すれば, $\overline{\rho}_{\ell'}$ が保型的であることを見るのはやさしい．そこで, このような素数 ℓ' が存在しないと仮定する．十分大きい素数 $\ell' \in \mathrm{Ram}\,\overline{\rho} \cup \{\ell\}$ であって $\ell' \equiv 1 \mod 4$ をみたすものをとり, 整合系 $(\rho_p)_p$ の法 ℓ' 還元を考察する．

$$\begin{tikzcd}
 & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ \ell"', "(2)"] \arrow[dr, "\mathrm{mod}\ \ell'"] & \\
\overline{\rho} & & \overline{\rho}_{\ell'}
\end{tikzcd}$$

補題 14.5. 次の 3 条件をみたす素数 q が無限個存在する:

(1) $\overline{\rho}_{\ell'}(\mathrm{Frob}_q)$ は $\overline{\rho}_{\ell'}(c)$ と共役である．ここで c は複素共役を表わす．
(2) $p \equiv 1 \mod 8$ をみたす任意の素数 $p < \ell'$ に対し, $q \equiv 1 \mod p$ が成り立つ．
(3) $q \equiv -1 \mod \ell'$ である．

(補題の証明). Dickson の分類と Chebotarev の密度定理より従う． □

上の補題のような素数 q をひとつ固定する．さらにバージョン (4) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 s 還元を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & (\rho'_p)_p \arrow[dl, "\bmod \ell'"', "(4)"] \arrow[dr, "\bmod s"] & \\
\overline{\rho}_{\ell'} & & \overline{\rho}''_s
\end{tikzcd}
$$

ただし (4) における q としていま固定した q をとり, χ' を位数が ℓ' の巾になるようにとっている．また s は ℓ' の次に小さい素数である．

バージョン (4) の整合系への持ち上げ定理の主張により, $\overline{\rho}''_s$ は q で局所良 2 面体的となる．したがって $\overline{\rho}''_s$ は保型的となり, このことから $\overline{\rho}$ が保型的となる． □

最後に, Kisin [Ki5] の証明したバージョン (H) の保型性持ち上げ定理を用いて, Serre 予想 3.5 の証明が完成する．

定理 14.6. Serre 予想 3.5 は正しい．

*(*証明*)*. 最初に (D_1) が成り立つことを示す．そうすると先ほどの定理により, 例えば $\ell = 2$ のときに Serre 予想が成り立つ．

$\overline{\rho}$ を ℓ を法とする S 型の表現とし, $\ell \neq 2$ かつ $\overline{\rho}$ が局所良 2 面体的とする．さらに $4 \nmid N(\overline{\rho})$ と仮定する．

まずバージョン (2) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 3 還元を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\bmod \ell"', "(2)"] \arrow[dr, "\bmod 3"] & \\
\overline{\rho} & & \overline{\rho}_3
\end{tikzcd}
$$

このとき $\overline{\rho}_3$ は非可解な像をもつことがわかる．もし $\overline{\rho}_3$ が 2 で不分岐ならば, $\overline{\rho}_2$ が保型的であることをいうのはやさしい．したがって $\overline{\rho}$ も保型的になる．$\overline{\rho}_3$ が 2 で分岐するときは, さらにバージョン (4) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 2 還元を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & (\rho'_p)_p \arrow[dl, "\bmod 3"', "(4)"] \arrow[dr, "\bmod 2"] & \\
\overline{\rho}_3 & & \overline{\rho}'_2
\end{tikzcd}
$$

すると $k(\overline{\rho}'_2) = 2$ のため, バージョン (H) の保型性持ち上げ定理より $\overline{\rho}'_2$ は保型的となり, そこから $\overline{\rho}$ も保型的となることがわかる.

次に $r > 1$ として主張 (D_r) を証明する. $\overline{\rho}$ を ℓ を法とする S 型の表現とし, $\ell \neq 2$ かつ $\overline{\rho}$ が局所良 2 面体的とする. さらに $2^{r+1} \nmid N(\overline{\rho})$ と仮定する.

まずバージョン (2) の整合系への持ち上げ定理を用いて整合系に持ち上げ, その法 2 還元を考える.

$$\begin{tikzcd} & (\rho_p)_p \arrow[dl, "\mathrm{mod}\ \ell"', "(2)"] \arrow[dr, "\mathrm{mod}\ 2"] & \\ \overline{\rho} & & \overline{\rho}_2 \end{tikzcd}$$

このとき ρ_2 は潜在的にクリスタリンであり, $\overline{\rho}_2$ は非可解な像をもつことがわかる. 既に (D_1) を示しておいたからさきほどの定理によって $\overline{\rho}_2$ は保型的である. したがってバージョン (H) の保型性持ち上げ定理により ρ_2 も保型的であり, それを用いると $\overline{\rho}$ も保型的であることがわかる. □

15. Fermat の最終定理の証明

Serre 予想を発表した論文で, Serre が述べている ([Ser4, 4.2, THÉORÈME 1]) ように, 特別な場合の Serre 予想 3.5 から Fermat の最終定理が導かれる. この特別な場合の Serre 予想は, 本稿の定理 13.1 の $\ell' = 2$ の場合に相当し, これは [KW2], [KW3] よりも前の Khare-Wintenberger の論文 [KW1, Theorem 5.2] で証明されている. 定理 13.1 の証明を辿ることによって, Fermat の最終定理の, Wiles [Wil] のものとは異なる証明が得られる. この別証明は, Wiles の証明とは違い, Langlands-Tunnell の定理およびレベルの最適化に関する Ribet [R1] の定理を用いない点が利点である. 本節ではこの別証明について説明する. 証明の概略は [Kh3, 5], [Kh5, 9.3], [萩, 10] でも紹介されている.

(証明). ℓ を奇素数とする. 0 でない整数 $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $abc \neq 0$ が存在して, 等式 $a^\ell + b^\ell = c^\ell$ をみたすと仮定して矛盾を導く.

$\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E : y^2 = x(x - a^\ell)(x + b^\ell)$ を考える. この楕円曲線は, すべての悪い素点で半安定であり, しかも 2 以外の悪い素点では, Tate 周期の付値が ℓ の倍数となる.

$\overline{\rho} = E[\ell] \otimes_{\mathbb{F}_\ell} \overline{\mathbb{F}}_\ell$ とおく. Mazur の定理により $\overline{\rho}$ は S 型である. 上で注意したことより, $N(\overline{\rho})$ は高々 2 である. 実は $N(\overline{\rho})$ は 2 であることがわかる. また $k(\overline{\rho}) = 2$ となる.

バージョン (2)” の整合系への持ち上げ定理を適用し, $\overline{\rho}$ を整合系 $(\rho_p)_p$ に持ち上げる.

整合系 (ρ_p) の性質より, $\mathbb{Q}$ 上の自明でないアーベル多様体 A が存在して, 2 以外の素数で良還元をもち, 2 で高々半安定還元を持つ. これは Brumer-Kramer [BrK] が証明した定理 11.1 (2) の $\ell = 2$ の場合に矛盾する. □

16. Artin 予想への応用

Khare-Wintenberger [KW2], [KW3] によって証明された Serre 予想 3.5 はいくつかの応用をもつ. この節ではそのような応用のひとつである, Artin 予想への応用について述べる.

注 16.1. 本稿では解説しないが, Serre 予想の応用は, ここで述べる Artin 予想への応用の他にもいろいろあり, 文献 [Ser4, §4], [Kh4, §6], [Kh5, §6, §7, §8], [Ki2, §1], [田 1, §2.4], [山内 1, §12] などで紹介されている. Serre 予想の主な応用を以下にリストアップする.

- Artin 予想への応用 ([Kh1], [Ki2, (1.3)], [田 1, 2.4], [山内 1, 12]). 本節で解説する.
- Fermat 予想 ([Ser4, 4.2], [Kh3, 5], [萩, 10], [田 1, 2.4], [山内 1, 12]) Serre 予想の帰結として, あるいは Serre 予想の証明中の議論を使うことによって, Fermat 予想の証明が得られる. これについては本稿 §15 でも説明した.
- $\mathbb{Q}$ 上の半安定楕円曲線への応用 ([Ser4, 4.4] [田 1]). ℓ を素数, E を $\mathbb{Q}$ 上の半安定楕円曲線であって, E の極小モデルの判別式の絶対値が ℓ 乗数であるものとする. Serre 予想と Mazur [Ma1] の結果とを用いると, $G_{\mathbb{Q}}$ の表現 $E[\ell]$ は可約, かつ $\ell \leq 7$ であることがわかる.
- $\mathbb{Z}$ 上の (ℓ, ℓ) 型有限平坦群スキームの分類への応用 ([Ser4, 4.5], [Kh3, 11], [田 1, 2.4]). $\ell \geq 3$ とすると, Serre 予想の帰結として, $\mathbb{Z}$ 上の (ℓ, ℓ) 型有限平坦群スキームは $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \oplus \mu_\ell$, または $\mu_\ell \oplus \mu_\ell$ のいずれかに同型であることがわかる.
- 谷山・志村予想や GL_2 型のアーベル多様体の保型性への応用 ([Ser4, 4.6, 4.7], [R2, (4.4) Theorem], [?], [Ki2, (1.2)], [田 1, 2.4], [山内 1, 12]). $\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線があるモジュラ曲線 $X_0(N)$ の Jacobi 多様体の因子と同種である, という谷山・志村予想が Serre 予想から導かれることは Serre の原論文 [Ser4, 4.6] にすでに書かれている. $\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体 A が GL_2 型であるとは, $[E : \mathbb{Q}] = \dim A$ をみたす代数体

E と $\mathbb{Q}$ 代数の埋め込み $E \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が存在することをいう. Ribet [R2, (4.4) Theorem] は, $\mathbb{Q}$ 上の GL_2 型の任意の単純アーベル多様体は, あるモジュラ曲線 $X_0(N)$ の Jacobi 多様体の因子と同種であることが, Serre 予想を帰結として導けることを示した.

- Fontaine-Mazur 予想への応用 ([Ki6, Introduction], [山内 1, 12]). $\ell = p \geq 3$ とする. 論文 [Ki6] で Kisin は, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ について p 進局所 Langlands 対応 [Co2] を用いて, $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元 p 進表現について, かなり強い保型性持ち上げ定理を示した. Serre 予想とこの保型性持ち上げ定理とを組み合わせれば, 多くの $G_{\mathbb{Q}}$ の奇かつ幾何的な 2 次元既約 ℓ 進表現 ρ に対し, ρ が保型的であることが示せる.
- GL_2 型のモチーフの保型性 ([Ser4, 4.8], [Ki2, (1.4)], [Ki5, Corollary 0.5], [Kh4, 6.1.1], [田 1], [Y]). E を代数体, M を $\mathbb{Q}$ 上の E 係数 Grothendieck モチーフであって, M の Betti 実現が 2 次元のものとする. M の Hodge 重さを r, s $(r \leq s)$ とする. λ を E の有限素点とする. M の λ 進エタール実現 $r_\lambda(M)$ が絶対既約と仮定し, $r = s$ のときはさらに $r_\lambda(M)$ が奇であると仮定する. このとき $r_\lambda(M)$ はある重さ $s - r + 1$ の同時 Hecke 固有楕円尖点形式に伴う Galois 表現に s 回 Tate ひねりを加えたものと同値であることが, Serre 予想の帰結としてわかる ([Ki2, (1.4)]).
- $\mathbb{Q}$ 曲線への応用 ([R2, (6.2) Corollary], [Kh5, 7.3]). $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E であって, 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ に対し E と E^σ が同種であるようなものを $\mathbb{Q}$ 曲線とよぶ. $\mathbb{Q}$ 曲線と GL_2 型のアーベル多様体との関係に関する Ribet [R2, (6.1) Theorem] の結果と Faltings [Fa] によるアーベル多様体に関する Tate 予想 [Tat1] と合わせると, Serre 予想の帰結として, 虚数乗法を持たない任意の $\mathbb{Q}$ 曲線 E に対し, ある整数 $N \geq 1$ および定数でない射 $X_1(N) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{C} \to E$ が存在することが示せる. また山内 [Y] は, 絶対 Hodge サイクルに関する $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のモチーフの圏において $\mathbb{Q}$ モチーフの概念を導入して, 代数サイクルに関する Tate 予想を仮定した下で, 虚数乗法を持たない $\mathbb{Q}$ モチーフが, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上のモチーフとして楕円保型形式に伴うモチーフと同種である事を示した.
- $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ 型の Galois 表現の個数の有限性への応用 ([Kh5, 6]). $\mathbb{F}$ を標数 ℓ の有限体, X を正の実数とするとき, $\mathbb{Q}$ の Galois 拡大 $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ であって, 条件
  - $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$ と同型.
  - $\ell \geq 3$ ならば K は総実でない.
  - $K/\mathbb{Q}$ の判別式の ℓ と素な部分は X 以下

をみたすものは有限個しかないことが Serre 予想の帰結としてわかる.

- 整合系の保型性への応用 ([Kh4, 6.1] [Kh5, 7.1]). 平行な Hodge-Tate 重さ (a, b) をもつ $G_{\mathbb{Q}}$ の表現の 2 次元半単純整合系 (§ で定義した狭義整合系よりも弱い条件しか仮定しなくてよい) が奇かつ $a \neq b$ (resp. 奇かつ $a = b$) であれば, 重さ 2 以上 (resp. 重さ ≥ 1) の同時 Hecke 固有形式に付随する整合系と同値であることが Serre 予想の帰結としてわかる.
- 可解とは限らない総実 Galois 拡大 $F/\mathbb{Q}$ に関する GL_2 の保型表現の降下への応用 ([Kh4, 6.2], [Kh5, 8]). $F/\mathbb{Q}$ を総実な Galois 拡大, π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の平行な重さ $k \geq 1$ をもつ尖点的保型表現とする. 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ に対し, π^{σ} が π と同値であると仮定する. このとき位数有限の指標 $\psi : G_F \to \mathbb{C}^{\times}$ および, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の重さ $k \geq 1$ をもつ尖点的保型表現 Π が存在して, Π の F への基底変換が $\pi \otimes \psi$ と同値になることが Serre 予想の帰結としてわかる.

Artin 予想への応用に話を戻す.

定理 16.2.

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

を既約, かつ奇なアルチン表現とする. このとき Artin の L 関数 $L(\rho, s)$ は全平面に正則に解析接続される.

注 16.3. Brauer の誘導定理により $L(\rho, s)$ が全平面に有理型に解析接続され, 適切な関数等式を満たすことが以前より知られていた. また ρ が可約な場合は $L(\rho, s)$ は Dirichlet の L 級数の積の形に表わせるため, $L(\rho, s)$ は全平面に有理型に解析接続され $s = 1$ 以外に極を持たないことがわかる.

(証明). ρ は代数体上定義されているので, ρ に付随する整合系 ρ_λ を作ることができる. 有限個の p を除き, 任意の λ に対し, (たとえ $\lambda | p$ であっても) ρ_λ は p で不分岐である. 有限個の ℓ を除き, 任意の $\lambda | \ell$ に対し, $k(\overline{\rho}_\lambda) = \ell$, $N(\overline{\rho}_\lambda) = N := \mathrm{art}(\rho)$ が成り立つ. 強い Serre 予想を適用することにより, $\overline{\rho}_\lambda$ はタイプ $(N(\overline{\rho}_\lambda), \ell)$ の尖点形式から来る. 同伴形式に関する Coleman-Voloch の結果 [CV] より, ρ_λ はタイプ $(N, 1)$ の尖点形式 g_λ から来る. [1]

[1] [CV] では Katz の意味での尖点形式を用いて結果が述べられているが, 有限個の素数 ℓ を除き, タイプ $(N, 1)$ の $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 係数 Katz 尖点形式とタイプ $(N, 1)$ の尖点形式の法 ℓ 還元とは同値である.

重さ 1, レベル N の尖点形式は有限個だから, 無限個の (ℓ, λ) が同じ g_λ を与えることになる. それを g とおくと, ρ は g に付随する Galois 表現と同値になる. □

17. 一般化

[KW1], [Kh2], [KW2], [KW3], [Ki5] によって Serre 予想 3.5 は完全に証明された.

Serre 予想は $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元法 ℓ 表現に関する保型性の予想であった. 法 ℓ 表現ではなく ℓ 進表現に関しては, より一般の大域体の, より一般の Galois 表現に対して保型表現との対応が予想されている. これは Langlands 予想のひとつの定式化であり, [Tay2], [BG2] に詳しい定式化が書かれている. Serre 予想は, $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ に対する Langlands 予想の法 ℓ 版とでもいうべきものである. したがって Serre 予想の将来の発展の方向として, 一般の大域体の, より一般の法 ℓ Galois 表現に対して, Serre 予想の主張を一般化して証明するという問題は, 取り組むべき重要な問題である.

この方向への Serre 予想の一般化については, 大まかに分類すると, 今までに

(1) 予想の定式化 ([Ti, §9], [Fi], [ASi], [ADP], [Do], [BDJ], [He], [HT], [Gr3], [Ge2]).
(2) 証明の第 1 段階の, ガロア表現の非存在に関する結果 (定理 11.1 (1)) の一般化 ([MT1], [Mo1], [Mo2], [MT2], [Sen]).
(3) 実例の計算 ([ADP], [A2]).
(4) 予想の (部分的) 解決 ([Sche], [Ge1], [Ge3], [Ge2], [GS1], [GS2]).

といった結果が知られている. また, この方向へでない Serre 予想の一般化として, 体でない係数へと Serre 予想を一般化する試みもある ([St], [KK]).

(1) の予想の定式化については, $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ 以外の $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G 上の保型表現 (あるいは G の数論的部分群のコホモロジー) と関係する場合に, 特に総実代数体上 F に対する $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_{2,F}$ の場合 ([BDJ]) や, $n \geq 3$ に対する $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$ の場合 ([ADP], [He], [Ge2]) に精密な Serre 予想 3.5 の主張に現れる $k(\overline{\rho})$ をどのように定義すればよいかについての考察が, 最近の研究の主流となっている. Serre 予想 3.5 に現れる重さ $k(\overline{\rho})$ は整数であったが, より一般の G に対する予想の定式化では, 重さは整数ではなく, $\mathbb{F}_\ell$ 上の代数群の $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 上の既約表現 (の同型類) の有限集合となる. 重さを定義する問題は, 法 ℓ 係数 Langlands 対応の ℓ 進局所・大域整合性という視点からも捉えられる ([BDJ, 4], [Em], [Dia4] を参照).

以下では, $G_{\mathbb{Q}}$ の n 次元法 ℓ 表現に対して, 精密な Serre 予想の一般化の, 重さに関する部分を定式化した Gee [Ge2] の予想について述べる. Gee による予想の定式化は, 同じ問題に対する [ADP], [He] による別の定式化と比べて具体的でないが, すべての $\overline{\rho}$ をカバーするという意味でもっとも完全な予想であり, また, 予想の主張が簡潔で分かり易く, より一般の G に対する主張へと拡張することが可能であるという利点も持つ.

$n \geq 1$ を整数, ℓ を素数とする. $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を連続かつ既約な表現とする. 次の 2 条件のうちいずれかがなりたつとき $\overline{\rho}$ を奇とよぶ.

- $\ell = 2$,
- $\overline{\rho}(c)$ の固有値 1 の固有空間の次元と, 固有値 -1 の固有空間の次元との差が 1 以下.

ℓ と素な整数 $N \geq 1$ に対し, 群 $S_1(N)$ およびその部分群 $\Gamma_1(N)$ を以下で定義する.

$$S_1(N) = \{X \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{Z}_{(N)}) \mid X \text{ の 1 行目} \mod N \cong (1, 0, \ldots, 0)\}$$

$$\Gamma_1(N) = \{X \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \mid X \text{ の 1 行目} \mod N \cong (1, 0, \ldots, 0)\}$$

この 2 つの群から通常の方法で Hecke 環 $\mathcal{H}_1(N)$ を作ることができる. 両側剰余類 $\Gamma_1(N)\backslash S_1(N)/\Gamma_1(N)$ の各元 $\Gamma_1(N)s\Gamma_1(N)$ は $\mathcal{H}_1(N)$ の元を定める. この元を $[\Gamma_1(N)s\Gamma_1(N)]$ で表わす. M を右 $S_1(N)$ 加群とすると, 群コホモロジー $H^\bullet(\Gamma_1(N), M)$ に Hecke 環 $\mathcal{H}_1(N)$ が標準的な方法で作用する.

N を割らない素数 p, および整数 $0 \leq k \leq n$ に対し, Hecke 環 $\mathcal{H}_1(N)$ の元

$$T_{p,k} = [\Gamma_1(N)\mathrm{diag}(p, \ldots, p, 1, \ldots, 1)\Gamma_1(N)]$$

を考える. ここで $\mathrm{diag}(p, \ldots, p, 1, \ldots, 1)$ は対角成分に p が k 個並んだ後 1 が $n-k$ 個並ぶ対角行列である. M を右 $\overline{\mathbb{F}}_p[S_1(N)]$ 加群, $\alpha \in H^\bullet(\Gamma_1(N), M)$ を $p \nmid N\ell$ に対するすべての $T_{p,k}$ に関する同時固有ベクトルとする. $T_{p,k}$ の固有値を $a(p,k)$ で表わす.

定義 17.1. $\overline{\rho}$ が α に付随するとは, 任意の素数 $p \nmid N\ell$ に対し, $\overline{\rho}$ が p で不分岐であり, かつ等式

$$\det(1 - \overline{\rho}(\mathrm{Frob}_p)X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i p^{i(i-1)/2} a(p,i) X^i$$

が成り立つことをいう.

F を単純 $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ 加群とする. F を $S_1(N)$ 加群とみなす.

定義 17.2. $\overline{\rho}$ が F を重さにもつとは, ℓ を割らないある整数 $N \geq 1$, ある整数 $e \geq 0$, およびある同時 Hecke 固有ベクトル $\alpha \in H^e(\Gamma_1(N), F)$ が存在して $\overline{\rho}$ が α に付随することをいう.

ところで単純 $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ 加群は以下のように分類される. 不等式

$$0 \leq a_1 - a_2, a_2 - a_3, \ldots, a_{n-1} - a_n \leq p - 1 \tag{17.1}$$

をみたす整数の組 $\lambda = (a_1, \ldots, a_n)$ に対し, $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ 加群 $F(\lambda) = F(a_1, \ldots, a_n)$ を以下のように定める. $G = \mathrm{GL}_{n,\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ とおく. $B^- \subset G$ を下三角可逆行列のなす閉部分群スキームとする. $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ 上のスキームの射 $f : G \to \mathbb{G}_{a,\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ であって, 任意の $\overline{\mathbb{F}}$ 代数 A, 任意の元

$$b = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & t_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & t_n \end{pmatrix} \in B^-(A)$$

および任意の $g \in G(A)$ に対し, f が誘導する写像 $f(A) : G(A) \to A$ が, 等式

$$f(A)(bg) = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i^{a_i} \right) \cdot f(g)$$

をみたすようなものの全体を $W(\lambda)$ とおく. $W(\lambda)$ は有限次元 $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ ベクトル空間であり, 右移動により群 $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}})$ が $F(\lambda)$ に左から作用する. $W(\lambda)$ の単純部分 $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)]$ 加群すべての和を $F(\lambda) = F(a_1, \ldots, a_n)$ で表わす. $F(\lambda)$ への $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ の作用を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell) \subset \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ に制限して $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ 加群とみなしたもののことも, 記号の濫用により同じ記号 $F(\lambda) = F(a_1, \ldots, a_n)$ で表わす. この $F(a_1, \ldots, a_n)$ を用いて, 既約 $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ の分類が以下のようになされる.

命題 17.3 ([He, Corollary 3.17]). $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ 加群 $F(a_1, \ldots, a_n)$ について次が成立する.

(1) $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ が不等式 (17.1) をみたすとする. このとき $F(a_1, \ldots, a_n)$ は単純 $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ 加群である.
(2) 任意の単純 $\overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_\ell)]$ 加群は, ある (17.1) をみたす $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ に対する $F(a_1, \ldots, a_n)$ と同型である.

(3) $F(a_1, \ldots, a_r)$ と $F(a'_1, \ldots, a'_r)$ とが同型であるための必要十分条件は $(a_1 - a'_1, \ldots, a_n - a'_n)$ が $(p-1, \ldots, p-1)$ の整数倍となることである.

予想 17.4 ([Ge2, Conjecture 4.3.2]). 連続, 既約, かつ奇な表現 $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ が $F(a_1, \ldots, a_n)$ を重さに持つための必要十分条件は, $\overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}}$ のクリスタリン持ち上げで Hodge-Tate 重さが $a_1 + (n-1)$, $a_2 + (n-2)$, …, a_n のものが存在することである.

References

[AAC] Allison, G., Ash, A., Conrad, E.: *Galois representations, Hecke operators, and the mod-p cohomology of* $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ *with twisted coefficients.* Experiment. Math. **7**, no. 4, 361–390 (1998)

[AC] Arthur, J., Clozel, L.: *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula.* Ann. of Math. Stud. **120**. Princeton University Press, Princeton, NJ (1989)

[A1] Ash, A.: *Galois representations attached to mod p cohomology of* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Duke Math. J. **65**, no. 2, 235–255 (1992)

[A2] Ash, A.: *Smith theory and Hecke operators.* J. Algebra **259**, no. 1, 43–58 (2003).

[ADP] Ash, A., Doud, D., Pollack, D.: *Galois representations with conjectured connections to arithmetic geometry.* Duke Math. J. **112**, no. 3, 521–579 (2002).

[ASi] Ash, A., Sinnott, W.: *An analogue of Serre's conjecture for Galois representations and Hecke eigenclasses in the mod p cohomology of* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Duke Math. J. **105**, no. 1, 1–24 (2000)

[ASt] Ash, A., Stevens, G.: *Modular forms in characteristic l and special values of their L-functions.* Duke Math. J. **53**, no. 3, 849–868 (1986)

[BLGHT] Barnet-Lamb, T., Geraghty, D., Harris, M., Taylor, R.: *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II.* Preprint (2009)

[Be] Berger, L.: *Representations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. **148**, 219–284 (2002)

[BB] Berger, L., Breuil, C.: *Représentations modulaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et représentations galoisiennes de dimension* 2. Astérisque **330**, 155–211. Soc. Math. France, Paris (2010)

[BLZ] Berger, L., Li, H., Zhu, H. J.: *Construction of some families of* 2*-dimensional crystalline representations.* Math. Ann. **329** (2), 365–377 (2004)

[BR] Blasius, D., Rogawski, J.: *Motives for Hilbert modular forms.* Invent. Math. **114**, 55–87 (1993)

[Bö] Böckle, G.: *Presentations of Universal Deformation Rings.* L-Functions and Galois Representations. London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. **320**, 24–58. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007)

[BöK] Böckle, G., Khare, C.: *Mod ℓ representations of arithmetic fundamental groups II.* Compos. Math. 142, 271–294 (2006)

[BCDT] Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F., Taylor, R.: *On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises.* J. Amer. Math. Soc. **14**, 843–939 (2001)

[Br] Brueggeman, S.: *The nonexistence of certain Galois extension unramified outside* 5. J. Number Theory **75**, no, 1, 47–52 (1999)

[BrK] Brumer, A., Kramer, K.: *Non-existence of certain semistable abelian varieties.* Manuscr. Math. **106** (3), 291–304 (2001)

[Bu] Buzzard, K.: *On level-lowering for mod* 2 *representations.* Math. Res. Lett. 7(1), 95–110 (2000)

[BDJ] Buzzard, K. Diamond, F. Jarvis, F.: *On Serre's conjecture for mod l Galois representations over totally real fields.* Preprint (2008)

[BG1] Buzzard, K., Gee, T.: *Explicit reduction modulo p of certain two-dimensional crystalline representations.* Int. Math. Res. Not. **2009**, no. 12, 2303–2317 (2009)

[BG2] Buzzard, K., Gee, T.: *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations— preliminary version.* Preprint.

[Cai] Cais, B.: *Compatibilities, correspondences, and integral structures in p-adic cohomology.* Ph. D. thesis, the University of Michigan (2007)

[Car1] Carayol, H.: *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19**, no. 3, 409–468 (1986)

[Car2] Carayol, H.: *Sur les representations galoisiennes modulo ℓ attaches aux formes modulaires.* Duke Math. J. **59**, 785–801 (1989)

[CHT] Clozel, L., Harris, M., Taylor, R.: *Automorphy of some ℓ-adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations.* Publ. Math. Inst. Hautes. Études Sci. **108**, 1–181 (2008)

[CV] Coleman, R., Voloch, J. F.: *Companion forms and Kodaira-Spencer theory.* Invent. Math. **110** (2), 263–281 (1992)

[Co1] Colmez, P.: *Espace vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham.* In: Berger, L., Breuil, C., Colmez C.(eds.) Représentations p-adiques de groupes p-adiques I: representations galoisiennes et (φ, Γ)-modules. Astérisque **319**, 117–186. Soc. Math. France, Paris (2008)

[Co2] Colmez, P.: *Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules.* Preprint. To appear in Astérisque **330**.

[DDT] Darmon, H., Diamond, F., Taylor, R.: *Fermat's last theorem.* In: Current developements in Mathematics, 1–154. International press, Cambridge (1994)

[De] Deligne, P.: *Formes modulaires et representations l-adiques.* Sem. Bourbaki, exp. 355. Lect. Notes Math. **179**, 136–172. Springer, Berlin-Heildelberg-New York, (1971)

[DS] Deligne, P., Serre, J.-P.: *Formes modulaires de poids* 1. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. IV. sér. **7**, 507–530 (1974)

[Dia1] Diamond, F.: *The refined conjecture of Serre*. In Elliptic curves modular forms and Fermat's last theorem.

[Dia2] Diamond, F.: *On deformation rings and Hecke rings*. Ann. Math. **144**, 137–166 (1996)

[Dia3] Diamond, F.: *An Extension of Wiles' results*. In: Modular forms and Fermat's last theorem, Boston, MA, 1995, 463–489. Springer-Verlag, New York (1997)

[Dia4] Diamond, F.: *A correspondence between representaions of local Galois groups and Lie type groups*. In: Burns, D., Buzzard, K., Nekovář, J.(eds.) L-functions and Galois representations London Math. Soc. Lect. Note Ser. **320**, 187–206. Cambridge university press, Cambridge, UK (2007)

[DFG] Diamond, F., Flach, M., Guo, L.: *The Tamagawa number conjecture of adjoint motives of modular forms*. Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4) **37** (5), 663–727 (2004)

[Die1] Dieulefait, L.: *Uniform behavior of families of Galois representations on Siegel modular forms*. Preprint (2002).

[Die2] Dieulefait, L.: *The level* 1 *weight* 2 *Serre conjecture*. Rev. Mat. Iberoamericana **23**, no. 3, 1115–1124 (2007)

[Die3] Dieulefait, L.: *The level* 1 *Serre's conjecture revisited*. Preprint (2008)

[Die4] Dieulefait, L.: *Remarks on Serre's modularity conjecture*. Preprint (2007)

[Do] Doud, D.: *Wildly ramified Galois representations and a generalization of a conjecture of Serre*. Experiment. Math. **14**, no. 1, 119–127 (2005)

[Ed] Edixhoven, B.: *the weight in Serre's conjectures on modular forms*. Invent. Math. **109**, 563–594 (1992)

[Em] Emerton, M.: *A report on the aim working group on mod p local Langlands*. Document available at http://www.math.northwestern.edu/˜emerton/preprints.html

[Fa] Faltings, G.: *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*. Invent. Math. **73**, no. 3, 349–366 (1983)

[Fi] Figueiredo, L. M.: *Serre's conjecture for imaginary quadratic fields*. Compositio Math. **118**, 103–122 (1999)

[Fo] Fontaine, J.-M.: *Représentations p-adiques semi-stables*. In: Périodes p-adiques. Asterisque **223**, 113–184. Soc. Math. France, Paris (1994)

[FL] Fontaine, J.-M., Laffaille, G.: *Construction de représentations p-adiques*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15**, no. 4, 547–608 (1982)

[Ge1] Gee, T.: *Companion forms over totally real fields*. Manuscripta Math. **125** (2008), 1–41.

[Ge2] Gee, T.: *Automorphic lifts of prescribed type*. Preprint (2006)

[Ge3] Gee, T.: *On the weight of mod p Hilbert modular forms*. Preprint (2006)

[GS1] Gee, T., Savitt, D.: *Serre weights for mod p Hilbert modular forms: the totally real case*. Preprint.

[GS2] Gee, T., Savitt, D.: *Serre weights for quaternion algebras*. Preprint.

[Gr1] Gross, B. H.: *Algebraic modular forms*. Israel J. of Math. **113**, 61–93 (1999)

[Gr2] Gross, B. H.: *A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod p)*. Duke Math. J. **61**, 445–517 (1990)

[Gr3] Gross, B. H.: *Odd Galois representations*. Preprint.

[HW] Haesemeyer, C., Weibel, C. A.: *Norm varieties and the Chain lemma*. Preprint (2008)

[HSBT] Harris, M., Shepherd-Barron, N., Taylor, R.; *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy*. Preprint, to appear in Ann. of Math.

[He] Herzig, F.: *The weight in a Serre-type conjecture for tame n-dimensional Galois representations*. Preprint.

[HT] Herzing, F., Tilouine, J.: *Conjecture de type de Serre et formes compagnons pour GSp_4*. Preprint

[J] Jochnowitz, N.: *The local components of the Hecke algebra mod ℓ*. Trans. Am. Math. Soc. **270**, 253–267 (1982)

[dJ] de Jong, A. J.: *Conjecture on arithmetic fundamental groups*. Israel J. Math. **121**, 61–84 (2001)

[JL] Jordan, B. Livné, R.: *On the Néron model of Jacobians of Shimura curves*. Compositio Math. **60**, 227–236 (1986)

[Ka1] Katz, N. M.: *p-adic properties of modular schemes and modular forms*. In: Serre, J.-P., Zagier, D. B. (eds.) Modular forms in one variables III, Lect. Notes Math **350**, 69–190. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1973)

[Ka2] Katz, N. M.: *A result on modular forms in characteristic p*. In: Serre, J.-P., Zagier, D. B. (eds.) Modular forms in one variables V, Lect. Notes Math **601**, 53–61. Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1976)

[Kh1] Khare, C.: *Remarks on mod p forms of weight one*. Internat. Math. Res. Notices, 127–133 (1997)

[Kh2] Khare, C.: *Serre's modularity conjecture: the level one case*. Duke Math. J. **134** (3), 534–567 (2006)

[Kh3] Khare, C.: *Serre's modularity conjecture: a survey of the level one case*. In: Burns, D., Buzzard, K., Nekovář, J.(eds.) L-functions and Galois representations London Math. Soc. Lect. Note Ser. **320**, 270–299. Cambridge university press, Cambridge, UK (2007)

[Kh4] Khare, C.: *Modularity of Galois representations and motives with good reduction properties*. J. Ramanujan Math. Soc. **22**, no. 1, 1–26 (2007)

[Kh5] Khare, C.: *Serre's conjecture and its consequences*. Manuscript for the talk of the seventh Takagi lecture, Tokyo, 2009. To appear in Japan. J. Math.

[KK] Khare, C., Kiming, I.: *Mod pq Galois representations and Serre's conjecture*. J. Number Theory **98**, no. 2, 329–347 (2003)

[KW1] Khare, C., Wintenberger, J.-P.: *On Serre's conjecture for 2-dimensional mod p representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ann. of Math. (2) **169**, no. 1, 229–253 (2009)

[KW2] Khare, C., Wintenberger, J.-P.: *Serre's modularity conjecture (I)*. Invent. Math. **178**, no. 3, 485–504 (2009)

[KW3] Khare, C., Wintenberger, J.-P.: *Serre's modularity conjecture (II)*. Invent. Math. **178**, no. 3, 505–586 (2009)

[Ki1] Kisin, M.: *Crystalline representations and F-crystals*. In: Algebraic geometry and number theory, in honor of Vladimir Drinfeld's 50th birthday. Prog. Math. **253**, 459–496. Birkhäuser, Basel (2006)

[Ki2] Kisin, M.: *Modularity of 2-dimensional Galois representations*. Curr. Dev. Math. **2005**, 191–230 (2007)

[Ki3] Kisin, M.: *Potentially semi-stable deformation rings*. J. Amer. Math. Soc. **21**, no. 2, 513–546 (2008)

[Ki4] Kisin, M.: *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*. Ann. Math. **170**, no. 3, 1085–1180 (2009)

[Ki5] Kisin, M.: *Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations*. Invent. Math. **178**, 587–634 (2009)

[Ki6] Kisin, M.: *The Fontaine-Mazur conjecture for* GL_2. J. Amer. Math Soc. **22**, no. 3, 641–690 (2009)

[Laf] Lafforgue, L.: *Chtoucas de Drinfeld et correspondence de Langlands*. Invent. Math. **147** (2002), 1–241.

[Lan] Langlands, R. P.: *Base change for* $GL(2)$. Ann. of Math. Stud. **96**. Princeton University Press, Princeton, NJ (1980)

[LN] Laumon, G., Ngo, B C.: *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*. Ann. of Math. **168**, no. 2, 477–573 (2008)

[Li] Livné, R.: *On the conductors of mod* ℓ *Galois representations coming from modular forms*. J. Number Theory **31**, 133–141 (1989)

[Ma1] Mazur, B.: *Rational isogenies of prime degree*. Invent. Math. **44**, 129–162 (1978)

[Ma2] Mazur, B.: *An Introduction to the deformation theory of Galois representations*. In: Modular forms and Fermat's last theorem, Boston, MA, 1995, 243–311. Springer-Verlag, New York (1997)

[Mo1] Moon, H.: *The non-existence of certain mod* p *Galois representations*. Bull. Korean Math. Soc. **40**, no. 3, 537–544 (2003)

[Mo2] Moon, H.: *On mod* 3 *Galois representations with conductor* 4. Proc. Amer. Math. Soc. **135**, no. 10, 3109–3113 (2007)

[MT1] Moon, H., Taguchi, Y.: *Refinement of Tate's discriminant bound and non-existence theorems for mod* p *Galois representations*. Doc. Math. **2003**, Extra Vol., 641–654 (2003)

[MT2] Moon, H., Taguchi, Y.: *The non-existence of certain mod* 2 *Galois representations of some small quadratic fields*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **84**, no. 5, 63–67 (2008)

[Ng] Ngo, B. C.: *Le lemme fondamental pour les algebres de Lie*. Preprint (2008)

[R1] Ribet, K.: *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *arising from modular forms.* Invent. Math. **100**, 431–476 (1990)

[R2] Ribet, K.: *Abelian varieties over* $\mathbb{Q}$ *and modular forms.* In: Algebra and topology 1992 (Taejŏn), 53–79. Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Taejŏn (1992)

[R3] Ribet, K.: *Report on* $\bmod l$ *representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. In Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 2, 639–676. Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994)

[RS] Ribet, K., Stein, W.: *Lectures on Serre's conjecture, with appendixes by Conrad, B. and Buzzard, K.* In: Conrad, B., Rubin, K.(eds.), Arithmetic algebraic geometry, 143–232. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001)

[Sai] Saito, T.: *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory.* Compositio Math. **145**, 1081–1113 (2009)

[Sav] Savitt, D.: *On a conjecture of Conrad, Diamond, and Taylor.* Duke Math. J. **128**, no. 1, 141–197 (2005)

[Sche] Schein, M. M.: *Weights in Serre's conjecture for* GL_n *via the Bernstein-Gelfand-Gelfand complex.* J. Number Theory **128** (2008), no. 10, 2808–2822.

[Scho] Schoof, R.: *Abelian varieties over* $\mathbb{Q}$ *with bad reduction in one prime only.* Compos. Math. **141**, no.4, 847–868 (2005)

[Ser1] Serre, J.-P.: *Corps locaux.* Hermann, Paris (1968)

[Ser2] Serre, J.-P.: *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques.* Lecture Notes in Mathematics Volume **350**, Springer, Berlin, 191–268 (1973)

[Ser3] Serre, J.-P.: *Valeurs propres de opérateurs de Hecke modulo* ℓ. Journées arith., Bordeaux, 1974. Astérisque **24**–**25**, 109–117. Soc. Math. France, Paris (1975)

[Ser4] Serre, J.-P.: *Sur les represéntations de degré* 2 *de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Duke Math. **54**, no. 1, 199–230 (1987)

[Sen] Şengün, M. H.: *The non-existence of certain representations of the absolute Galois group of quadratic fields.* Proc. Amer. Math. Soc. **137**, 27–35 (2009)

[Sk] Skinner, C.: *A note on the p-adic Galois representations attached to Hilbert modular forms.* Doc. Math. **14**, 241–258 (2009)

[SW1] Skinner, C., Wiles, A.: *Residually reducible representations and modular forms.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **89**, 5–126 (1999)

[SW2] Skinner, C., Wiles, A.: *Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations.* Ann. Sci. Toulouse Math, (6) **10**, 185–215 (2001)

[SW3] Skinner, C., Wiles, A.: *Base change and a problem of Serre.* Duke Math. **107** (1), 15–25 (2001)

[St] Stein, W.: *Exploration of a mod pq variant of Serre's conjecture.* Document available at http://modular.fas.harvard.edu/Tables/serremodpq2/

[Tat1] Tate, J.: *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields.* Invent. Math. **2**, 134–144 (1966)

[Tat2] Tate, J.: *The non-existence of certain Galois extensions of $\mathbb{Q}$ unramified outside* 2. In: Arithmetic Geometry, Contemp. Math. **174**, 153–156. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001)

[Tay1] Taylor, R.: *Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur.* Inst. Math. Jussieu *1* (1), 125–143 (2002)

[Tay2] Taylor, R.: *Galois representations.* Ann. Fac. Sci. Toulouse **13**, 73–119 (2004)

[Tay3] Taylor, R.: *On the meromorphic continuation of degree two L-functions.* Doc. Math. Extra Volume: John H. Coates' Sixtieth Birthday, 729–779 (2006)

[Tay4] Taylor, R.; *Automorphy of some ℓ-adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations II.* Publ. Math. Inst. Hautes. Études Sci. **108**, 183–239 (2008)

[TW] Taylor, R., Wiles, A.: *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras.* Ann. Math. (2) **141** (3), 553–572 (1995)

[Ti] Tilouine, J.: *Deformations of Galois representations and Hecke algebras.* Narosa Publishing House, New Delhi, India (1996)

[V1] Voevodsky, V.: *On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$-coefficients.* Preprint (2003)

[V2] Voevodsky, V.: *Motivic Eilenberg-MacLane spaces.* Preprint (2007)

[Wa] Waldspurger, J.-L.: *Endoscopie et changement de caracteristique.* J. Inst. Math. Jussieu **5**, no. 3, 423–525 (2006)

[Wie] Wiese, G.: *Dihedral Galois representations and Katz modular forms.* Doc. Math. **9**, 123–133 (2004)

[Wil] Wiles, A.: *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem.* Ann. Math. (2) **141** (3), 443–551 (1995)

[Win] Wintenberger, J.-P.: *On p-adic geometric representations of $G_{\mathbb{Q}}$.* Doc. Math., Extra Volume: John Coates' Sixtieth Birthday, 819–827 (2006)

[Y] Yamauchi, T.: *$\mathbb{Q}$-motives and modular forms.* J. Number Theory **128**, no. 6, 1485–1505 (2008)

[Z1] Zink, T.: *Windows for displays of p-divisible groups.* In: Moduli of abelian varieties. Progr. Math. **195**, 491–518. Birkhäuser, Basel (2001)

[Z2] Zink, T.: *The display of a formal p-divisible group.* In: Cohomologies p-adiques et application arithmétiques I. Astérisque **278**, 127–248. Soc. Math. France, Paris (2002)

[今] 今井 直毅: **ガロア表現の変形理論入門**. 本報告集 (2010)

[田 1] 田口 雄一郎: *Serre* **の保型性予想の紹介**. 数理解析研究所考究録「代数的整数論とその周辺」に掲載予定

[田 2] 田口 雄一郎: *Serre* **予想の証明: 帰納法の第一段階**. $R = T$ の最近の発展, 報告集第 2 巻, 222–265 (2009). http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/R=T.html#Proceeding で入手可能

[中] 中村 健太郎: p **進表現入門**. 本報告集 (2010)

[萩] 萩原 啓: **レベル** 1 **の** *Serre* **予想**. $R=T$ の最近の発展, 報告集第 2 巻, 222–265 (2009). http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/R=T.html#Proceeding で入手可能

[山内 1] 山内 卓也: *Serre* **予想の証明***:* **一般の場合**. $R=T$ の最近の発展, 報告集第 2 巻, 266–310 (2009). http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/R=T.html#Proceeding で入手可能

[山内 2] 山内 卓也: *Galois* **表現の基礎** *I.* 本報告集 (2010)

[山下 1] 山下 剛: *Taylor-Wiles* **系の復習**. $R=T$ の最近の発展, 報告集第 1 巻, 33–90 (2009). http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/R=T.html#Proceeding で入手可能

[山下 2] 山下 剛: *Kisin* **による修正** *Taylor-Wiles* **系**. $R=T$ の最近の発展, 報告集第 1 巻, 91–123 (2009). http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~gokun/R=T.html#Proceeding で入手可能

京都大学数理解析研究所
E-mail address: yasuda@kurims.kyoto-u.ac.jp