

ガロアコホモロジー (改訂版)

佐藤 周友 (中央大学)

ガロアコホモロジーとは端的に述べると副有限群 G の位相を考慮した群コホモロジーである. よく知られているようにこれは整数論において基本的な道具である. 例えばガロア群の連続指標群や体のブラウアー群はガロアコホモロジーである. また代数体上のアーベル多様体 A に付随した Tate-Shafarevich 群や Selmer 群などは, A を係数とするガロアコホモロジーからある種の局所条件をみたすような元たちを取り出すことによって定義される.

本文はガロアコホモロジーの概説である. Serre の著書 [S] では離散的 G 加群を係数とする場合と離散的 G 群を係数とする非アーベルな場合の 2 種類を扱っているが, ここでは前者に焦点を絞る. この離散的 G 加群のガロアコホモロジーは Tate の連続コチェインコホモロジー (論文 [T2] 参照) の特別な場合と見なすことができるため, 本文では Tate に倣い, 一般の位相的 G 加群のガロアコホモロジーを扱うことにする.

目次

1 準備: G 加群の圏	2
2 ガロアコホモロジー	5
3 ガロアコホモロジーの消滅と双対性	12
4 代数体のガロアコホモロジーと Selmer 群	17
A 有限巡回群の群コホモロジー	23
B いくつかの補足	25

記号と約束. 本文で用いる記号と約束をいくつか定めておく.

(1) 体 k に対して次のように記号を定める:

$\text{ch}(k) := k$ の標数, $\bar{k} := k$ の分離閉包, $G_k := k$ の絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$.

(2) 位相空間 X から Y への連続写像全体のなす集合を $\text{Map}_{\text{cont}}(X, Y)$ と表す.

(3) 群が集合に作用しているとき, その作用を主に「 \cdot 」と表す.

(4) 素数 l に対して, \mathbb{Z}_l と \mathbb{Q}_l には常に l 進位相を与える.

1 準備 : G 加群の圏

この節では G を一般の位相群とし, 定理 1.9 を目標とする. まず次の一般的な概念を思い出しておく.

定義 1.1 G が位相空間 M に左から作用しているとき, その作用が連続であるとは, 作用が与える写像

$$G \times M \longrightarrow M, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

が連続であることをいう. 位相環の作用についても連続性の概念を同様に定義する.

例 1.2 位相環 \mathbb{Z}_ℓ が連続に作用するような位相アーベル群の閉部分群は, 必ず \mathbb{Z}_ℓ の作用で閉じている, すなわち部分 \mathbb{Z}_ℓ 加群である.

上記の連続性の概念を用いて, いくつかの G 加群のクラスを定義する.

定義 1.3 G を位相群とする.

- (1) 連続な左 G 作用が与えられた位相アーベル群を**位相的 G 加群**とよぶ.
- (2) 位相が離散的であるような位相的 G 加群を**離散的 G 加群**とよぶ.
- (3) 位数有限な離散的 G 加群を**有限 G 加群**とよぶ.

次の命題は離散的 G 加群を扱う上で基本的であるが, 実質的な内容は M の算法と無関係である.

命題 1.4 左 G 作用を持つアーベル群 M に離散位相を与える. このとき次の 3 つの条件は互いに同値である:

- (1) M は離散的 G 加群である.
- (2) 各 $x \in M$ の固定化群 $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ は G の開部分群である.
- (3) 次の等号が成り立つ:

$$M = \bigcup_{H \subset G: \text{開部分群}} M^H.$$

ただし M^H は H による M の不変部分 $\{x \in M \mid \forall h \in H, h \cdot x = x\}$ を表す.

証明. (2) \Leftrightarrow (3) は自明である. (1) \Rightarrow (2) は各 $x \in M$ について合成写像

$$G \xrightarrow{g \mapsto (g, x)} G \times M \xrightarrow{(g, y) \mapsto g \cdot y} M$$

の連続性をみればよい. (2) \Rightarrow (1) は各 $x \in M$ について $G \times M$ の部分集合の等号

$$\{(g, y) \in G \times M \mid g \cdot y = x\} = \coprod_{y \in M_x} G_x h_y \times \{y\}$$

が成り立つことから従う. ただし M_x は $\{y \in M \mid \exists g \in G, g \cdot y = x\}$ を表し, 各 $y \in M_x$ に対して h_y は $h_y \cdot y = x$ となるような G の元を表す. \square

例 1.5 k を体とし, G として k の絶対ガロア群 $G_k = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ を考える. G の位相はクルル位相 (副有限群としての標準的位相) である. n を自然数とし, l を素数とする.

- (0) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ には常に離散位相を与え, G が自明に作用するものと約束する. これらは離散的 G 加群である.
- (1) \bar{k} とその乗法群 \bar{k}^\times には離散位相と G の自然な作用を与える. これらもまた離散的 G 加群である.
- (2) n は $\text{ch}(k)$ と素であるとする. \bar{k} に含まれる 1 の n 乗根全体のなす群

$$\mu_n := \{x \in \bar{k} \mid x^n = 1\}$$

は離散位相と G の自然な作用によって離散的 G 加群である. アーベル群としては μ_n と $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は同型であるが, G の作用が一般に異なる.

- (3) **記号と約束** で \mathbb{Z}_l と \mathbb{Q}_l には l 進位相を与えたが, さらに G の作用は自明であると約束する. これらは離散的ではない位相的 G 加群である.
- (4) l を $\text{ch}(k)$ と素な素数とするとき

$$\mathbb{Z}_l(1) := \varprojlim_{\nu \geq 1} \mu_{l^\nu}, \quad \mathbb{Q}_l(1) := \mathbb{Z}_l(1) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

は l 進位相と G の自然な作用を与えることによって位相的 G 加群になる. これらも離散的ではない位相的 G 加群である. k が 1 の l 冪乗根を高々有限個しか含まない場合, これらの加群は離散位相では位相的 G 加群にならない.

定義 1.6 $f: M \rightarrow M'$ を位相群の連続準同型写像とする. 群準同型 f の核に M の制限位相を与えたものを (連続準同型) f の**核**とよび, $\text{Ker}(f)$ と表す. 群準同型 f の余像 $M/\text{Ker}(f)$ に M の商位相を与えたものを f の**余像**とよび, $\text{Coim}(f)$ と表す. 群準同型 f の像に M' の制限位相を与えたものを f の**像**とよび, $\text{Im}(f)$ と表す. 群準同型 f の余核に M' の商位相を与えたものを f の**余核**とよび, $\text{Coker}(f)$ と表す.

位相を考えない状況での群準同型とは異なり, 位相群の連続準同型に対しては準同型定理 ' $\text{Coim}(f) \cong \text{Im}(f)$ (双連続同型)' が必ずしも成り立たない. 例えば自明でない群 M に離散位相と密着位相を与えてみれば, 準同型定理が成り立たないことは明白である. 次の事実も自明であるが, 確認のため補題として述べておく.

補題 1.7 M, M' を離散位相が与えられた位相群とする. このとき任意の群準同型 $f: M \rightarrow M'$ は連続であり, f に対して位相群の意味での準同型定理が成り立つ.

定義 1.8 位相群 G に対して次のような圏たちを定義する.

$\mathcal{M}_G^{\text{top}}$: 位相的 G 加群全体と連続 G 準同型写像のなす圏

$\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$: 離散的 G 加群全体と G 準同型写像のなす圏

$\mathcal{M}_G^{\text{fin}}$: 有限 G 加群全体と G 準同型写像のなす圏

定義から $\mathcal{M}_G^{\text{fin}} \subset \mathcal{M}_G^{\text{disc}} \subset \mathcal{M}_G^{\text{top}}$ であり, 次のような相違点がある:

- (1) $\mathcal{M}_G^{\text{top}}$ は射影的極限をもつが, 帰納的極限の存在について著者は真偽を知らない ([辰] 参照). $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ は帰納的極限をもつが, $\mathcal{M}_G^{\text{top}}$ の射影的極限では閉じていない. $\mathcal{M}_G^{\text{fin}}$ はいずれについても閉じていない.
- (2) $\mathcal{M}_G^{\text{top}}$ では準同型定理が成り立たないのでアーベル圏にならない. $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ と $\mathcal{M}_G^{\text{fin}}$ は補題 1.7 によりアーベル圏である.

	帰納的極限	射影的極限	アーベル圏
$\mathcal{M}_G^{\text{top}}$?	○	×
$\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$	○	×	○
$\mathcal{M}_G^{\text{fin}}$	×	×	○

定理 1.9 G がコンパクトならば, アーベル圏 $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ は十分多くの入射的对象をもつ.

定理の証明の準備としてアーベル群の圏 $\mathcal{A}b$ から $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ への加法的関手

$$\text{Ind}_G : \mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$$

を $\text{Ind}_G(A) := \text{Map}_{\text{cont}}(G, A)$ と定義する (A の算法でアーベル群とみなす). ただし $f \in \text{Ind}_G(A)$ への $g \in G$ の左作用を $(g \cdot f)(x) := f(xg)$ と定めた. この作用によって $\text{Ind}_G(A)$ が離散的 G 加群であることは以下の補題 1.11 (2) による. 対応 $A \mapsto \text{Ind}_G(A)$ が関手的かつ加法的であることは容易に確かめられる.

定理 1.9 の証明. 離散的 G 加群 M を任意に与える. アーベル群として, M を入射的なアーベル群 I に埋め込む. これを $i : M \hookrightarrow I$ と表す. 次の 2 点を示せばよい:

- (1) M は G 加群として $\text{Ind}_G(I)$ に埋め込まれる.
- (2) $\text{Ind}_G(I)$ は $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ において入射的である.

(1) は単射 G 準同型 $M \hookrightarrow \text{Ind}_G(I)$ を $m \mapsto (\tau_m : x \mapsto i(x \cdot m))$ と定めればよい. (2) は次の補題 1.10 を $\mathcal{C} = \mathcal{A}b$, $\mathcal{C}' = \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$, $F = \text{Ind}_G$, $F' =$ 忘却関手の場合に適用することにより得られる. (忘却関手が Ind_G の左随伴であることは定理 B.1 (1) を参照)

補題 1.10 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ をアーベル圏とし, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ を加法的関手とする. F は左随伴関手 F' をもつと仮定し, さらに F' は完全関手であると仮定する. このとき F は \mathcal{C} の入射的对象を \mathcal{C}' の入射的对象にうつす.

補題 1.10 の証明. 仮定から $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(F'(Y), X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, F(X))$ ($X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{C}'$) かつ F' が完全なので, X が入射的ならば $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(-, F(X))$ は反変的な完全関手である, すなわち $F(X) \in \mathcal{C}'$ は入射的である. □

以上で定理 1.9 の証明を完了する. □

次の補題の (2) は定理 1.9 の証明で既に使われた. 補題 1.11 の証明は §B.1 で与える.

補題 1.11 X, Y, Z を位相空間とし, X はコンパクト, Y は離散的であると仮定する. 集合 $\text{Map}_{\text{cont}}(X, Y)$ に離散位相 (= 開コンパクト位相) を与える. このとき,

- (1) 自然な双射 $\text{Map}_{\text{cont}}(Z, \text{Map}_{\text{cont}}(X, Y)) \cong \text{Map}_{\text{cont}}(Z \times X, Y)$ が成り立つ.
- (2) コンパクト群 G が Y に左から連続に作用し, $X = G$ であると仮定する. このとき

$$(g \cdot f)(x) := g \cdot f(xg) \quad (x, g \in G, f \in \text{Map}_{\text{cont}}(G, Y))$$

という規則によって, G は $\text{Map}_{\text{cont}}(G, Y)$ に左から連続に作用する.

補足 1.12 G が体 k の絶対ガロア群ならば, $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ は $\text{Spec}(k)$ 上のエタール層 (エタール位相でのアーベル群の層) の圏と同値である. 実際, 離散的 G 加群 M には ' L/k (有限次分離拡大) $\mapsto M^{G_L}$ ' というエタール層を対応させ, 逆に $\text{Spec}(k)$ 上のエタール層 \mathcal{F} にはその茎を対応させればよい (命題 1.4 から茎は離散的 G 加群である). この圏同値のもとで, 上記の関手 Ind_G はアフィンスキームの自然な射 $\text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow \text{Spec}(k)$ によるエタール層の順像に対応する.

2 ガロアコホモロジー

G を副有限群とし, M を位相的 G 加群とする. 整数 $i \geq 0$ に対し

$$C^i(G, M) := \begin{cases} M & (i = 0) \\ \text{Map}_{\text{cont}}(G^i, M) & (i > 0) \end{cases}$$

とおく. ただし $i > 0$ のとき G^i は i 個の G の直積に積位相を与えた副有限群を表す. $C^i(G, M)$ の元を **i コチェイン (i 双対鎖)** とよぶ. $C^i(G, M)$ には M の算法によって自然にアーベル群の構造が定まるが, G の作用や位相は考えない. 微分作用素

$$d : C^i(G, M) \longrightarrow C^{i+1}(G, M)$$

を $i = 0$ では $(dx)(g) := g \cdot x - x$ ($x \in M, g \in G$) と定め, $i > 0$ では

$$\begin{aligned} (df)(g_1, \dots, g_{i+1}) &:= g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{i+1}) + \sum_{j=1}^i (-1)^j f(g_1, \dots, \overbrace{g_j g_{j+1}}^{\text{第 } j \text{ 成分}}, \dots, g_{i+1}) \\ &\quad + (-1)^{i+1} f(g_1, \dots, g_i) \quad (f \in C^i(G, M), g_1, \dots, g_{i+1} \in G) \end{aligned}$$

と定める. ただし M への G 作用と M の算法を区別するために後者を加法的に表した. さて d を 2 回繰り返すと零写像になるので $(C^*(G, M), d)$ は複体である. この複体のコホモロジーを副有限群 G の M 係数ガロアコホモロジーとよぶ:

$$H^i(G, M) := \frac{\text{Ker}(d : C^i(G, M) \rightarrow C^{i+1}(G, M))}{\text{Im}(d : C^{i-1}(G, M) \rightarrow C^i(G, M))}.$$

定義から直ちに

$$H^0(G, M) = M^G = \{x \in M \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}$$

$$H^1(G, M) = \frac{\{f : G \rightarrow M \text{ 連続写像} \mid \forall g, \forall g' \in G, f(gg') = f(g) + g \cdot f(g')\}}{\{f : G \rightarrow M \text{ 連続写像} \mid \exists x_0 \in M, \forall g \in G, f(g) = g \cdot x_0 - x_0\}}$$

である. 条件式 $f(gg') = f(g) + g \cdot f(g')$ を **1 コサイクル条件** とよぶ.

例 2.1 G が有限群の場合, ガロアコホモロジーは群コホモロジー ([河] §3.6, [斎] §5.1) に他ならない. 実際 G が有限ならば, G 加群 M はどのような位相によっても位相的 G 加群であり, ガロアコホモロジーは M の位相によらない.

例 2.2 G が M に自明に作用するならば, 標準同型

$$H^1(G, M) \cong \text{Hom}_{\text{cont}}(G, M)$$

が成り立つ. ただし右辺は G から M への連続準同型写像全体のなす群を表す.

2.a ガロアコホモロジーの基本性質

ガロアコホモロジーの係数を変数と見なすことによって位相的 G 加群の圏 $\mathcal{M}_G^{\text{top}}$ から次数付きアーベル群の圏 $\mathcal{G}\text{-Ab}$ への加法的共変関手

$$H^*(G, -) : \mathcal{M}_G^{\text{top}} \longrightarrow \mathcal{G}\text{-Ab}, \quad M \mapsto \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(G, M)$$

が得られる. この関手の基本的な性質をいくつか述べる.

- (1) 位相的 G 加群の短完全系列¹ $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ が連続な分裂射² $M'' \rightarrow M$ をもつならば, ガロアコホモロジーの長完全系列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(G, M') \longrightarrow H^0(G, M) \longrightarrow H^0(G, M'') \\ \xrightarrow{\delta} H^1(G, M') \longrightarrow H^1(G, M) \longrightarrow H^1(G, M'') \xrightarrow{\delta} \dots \end{aligned}$$

が存在する. 特に, $H^*(G, -)$ は $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に制限すると **δ 関手** である.

(\cdot) 短完全系列 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ からアーベル群の複体の完全系列

$$0 \rightarrow C^*(G, M') \rightarrow C^*(G, M) \xrightarrow{(\star)} C^*(G, M'')$$

が得られる. 連続写像による分裂射 $M'' \rightarrow M$ の存在から, 複体の射 (\star) は各次数において全射である. したがって蛇の補題からコホモロジーの長完全系列が得られる. \square

¹位相群の系列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ が**完全である**とは, 双連続同型 $\text{Im}(f) \cong \text{Ker}(g)$ が成り立つときをいう. 像と核の位相については定義 1.6 を参照.

²合成 $M'' \rightarrow M \rightarrow M''$ が恒等写像であるような連続写像 $M'' \rightarrow M$ を意味する. 分裂射は G 同変でなくてもよいし, 準同型でなくてもよい. このような分裂射は離散的 G 加群の短完全系列に対して常に存在する.

(2) M が離散的 G 加群ならば, 次の標準同型が成り立つ:

$$H^i(G, M) \cong \varinjlim_{N \triangleleft G: \text{開正規部分群}} H^i(G/N, M^N)$$

ただし右辺は全ての開正規部分群 $N \triangleleft G$ にわたる有限群 G/N のコホモロジーの帰納的極限³ である. 特に $i > 0$ ならば $H^i(G, M)$ はねじれ群である.

(\therefore) G の副有限性と M の離散性によって次のアーベル群の同型が成り立つ:

$$C^*(G, M) \cong \varinjlim_{N \triangleleft G: \text{開正規部分群}} C^*(G/N, M^N).$$

アーベル群の帰納的極限は完全性を保つので第 1 の主張が従う. 第 2 の主張は, 有限群 G' の群コホモロジー $H^i(G', -)$ が $i > 0$ では G' の位数で零化されるという事実から従う. \square

(2') $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を有向集合 Λ で添え字付けられた離散的 G 加群の帰納系とし, その帰納的極限を M と表す. このとき次の標準同型が成り立つ:

$$H^i(G, M) \cong \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} H^i(G, M_\lambda).$$

(\therefore) (2) の事実と帰納的極限の交換によって主張は G が有限群の場合に帰着される. この場合にコチェインの比較をすればよい. 詳細は練習問題とする. \square

(3) ガロアコホモロジー $H^*(G, -)$ を $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に制限すれば, 左完全関手

$$H^0(G, -) : \mathcal{M}_G^{\text{disc}} \longrightarrow \mathcal{A}b, \quad M \longmapsto M^G$$

の右導来関手に等しい (右導来関手の存在は定理 1.9 によって保証される). 特に $\mathcal{M}_G^{\text{disc}} =: \mathcal{C}$ 上では $H^*(G, -) = \text{Ext}_{\mathcal{C}}^*(\mathbb{Z}, -)$ である.

(\therefore) 右導来関手の一意性 ([NSW] p. 129 参照) から, $H^*(G, -)$ が $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ において普遍的 δ 関手であることを示せばよい. δ 関手であることは (1) で示した. 任意の $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ は $\text{Ind}_G(M)$ に埋め込まれ (定理 1.9 の証明を参照), Shapiro の補題 (以下の命題 2.3) の $H = \{e\}$ の場合から $H^i(G, -)$ ($i > 0$) は切除可能⁴ である. 切除可能な δ 関手は普遍的である ([斎佐] 命題 11.1.8). \square

(4) 位相的 G 加群の連続かつ G 同変な双加法的写像

$$M \times M' \longrightarrow M'', \quad (x, x') \mapsto \langle x, x' \rangle$$

があるとき, 双加法的写像 (コチェインの**カップ積**)

$$\begin{aligned} C^i(G, M) \times C^j(G, M') &\longrightarrow C^{i+j}(G, M''), \quad (f, f') \mapsto f \cup f' \\ (f \cup f')(g_1, \dots, g_i, g'_1, \dots, g'_j) &:= \langle f(g_1, \dots, g_i), g_1 \cdots g_i \cdot f'(g'_1, \dots, g'_j) \rangle \end{aligned}$$

³ $N \subset N'$ であるような 2 つの開 (開でなくてもよい) 正規部分群 $N, N' \triangleleft G$ に対して, 自然な全射 $G/N \twoheadrightarrow G/N'$ でコチェインを引き戻すことによって準同型写像 $H^i(G/N', M^{N'}) \rightarrow H^i(G/N, M^N)$ が得られる. これを**膨張写像**という. (2) の帰納的極限の推移写像はこの膨張写像である.

⁴ 加法圏の間の加法的関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ が**切除可能**であるとは, 任意の $M \in \mathcal{C}$ に対して $F(u) = 0$ (零写像) となるような単射 $u : M \hookrightarrow I$ が存在することをいう.

はコホモロジーの双加法的写像

$$H^i(G, M) \times H^j(G, M') \longrightarrow H^{i+j}(G, M''), \quad (x, y) \mapsto x \cup y$$

をひき起こす. これをガロアコホモロジーのカップ積とよぶ.

(\cdot) コチェインのカップ積は $d(f \cup f') = (df) \cup f' + (-1)^i f \cup df'$ という関係をみたすので, コホモロジーのカップ積を誘導する. \square

(5) 閉部分群 $H \subset G$ に対して, コチェインの制限による自然な準同型写像

$$\text{Res} : H^i(G, M) \longrightarrow H^i(H, M)$$

がある. これを制限写像とよぶ.

(6) 開部分群 $H \subset G$ に対して, 余制限写像とよばれる標準的な準同型写像

$$\text{Cor} : H^i(H, M) \longrightarrow H^i(G, M)$$

$$(\text{Cor } f)(g_1, \dots, g_i) := \sum_{r \in R} r^{-1} \cdot f(rg_1[r_1g_1]^{-1}, \dots, [rg_1 \dots g_{i-1}]g_i[r_1g_1 \dots g_i]^{-1})$$

がある. ここで $R \subset G$ は右剰余集合 $H \backslash G$ の完全代表系を表し, 右剰余類 Ha ($a \in G$) を代表する R の元を $[a]$ と表した (よって $[a]b[ab]^{-1}$ は H の元である). 上記の定義はコチェインの対応を表しているが, コチェインの微分と可換であることが容易に確かめられる. よってコホモロジー類の対応を定めている. (得られた写像が R の取り方によらないことは練習問題とする. §B.3 も見よ)

(7) (4) かつ (6) の状況で, $H^{i+j}(G, M'')$ において射影公式

$$\text{Cor}(x \cup \text{Res}(y)) = \text{Cor}(x) \cup y \quad (x \in H^i(H, M), y \in H^j(G, M'))$$

が成立する. (証明は練習問題とする. §B.3 も見よ.)

2.b 群の取りかえ

$H \subset G$ を閉部分群とする. $M \in \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ に対し, 誘導加群 $\text{Ind}_G^H(M)$ を次で定義する:

$$\text{Ind}_G^H(M) := \{f \in \text{Map}_{\text{cont}}(G, M) \mid \forall h \in H, \forall x \in G, f(hx) = h \cdot f(x)\}.$$

M への G 作用を自明なものとした上で, 補題 1.11 (2) の規則により $\text{Ind}_G^H(M)$ を離散的 G 加群とみなす ($\text{Ind}_G^H(M)$ は $\text{Map}_{\text{cont}}(G, M)$ の部分 G 加群である). $H = \{e\}$ の場合, $\text{Ind}_G^H(M)$ は定理 1.9 の証明で用いた $\text{Ind}_G(M)$ に他ならない. 次の Shapiro の補題は, $H = \{e\}$ の場合が §2.a (3) の証明で既に使われていることに注意しよう.

命題 2.3 (Shapiro の補題) 任意の $M \in \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ に対して $H^i(G, \text{Ind}_G^H(M)) \cong H^i(H, M)$ である. 特に ($H = \{e\}$ の場合) $i > 0$ ならば $H^i(G, \text{Ind}_G(M)) = 0$ である.

証明. まず $H = \{e\}$ の場合を示す. $H^0(G, \text{Ind}_G(M)) \cong M$ は易しいので省略する. $i > 0$ と仮定し, $H^i(G, \text{Ind}_G(M)) = 0$ を示そう. 補題 1.11 (1) により

(*) 写像 $f : G^i \rightarrow \text{Ind}_G(M)$ が連続 $\iff f$ を写像 $G^i \times G \rightarrow M$ とみなして連続であることに注意する. コチェイン $f \in C^i(G, \text{Ind}_G(M))$ ($i > 0$) を連続写像

$$f : G^i \times G \longrightarrow M, \quad (g_1, \dots, g_i; x) \mapsto f(g_1, \dots, g_i; x)$$

とみなし, 一方, $C^{i+1}(G, \text{Ind}_G(M))$ において $df = 0$ であると仮定する. 定義により

$$\begin{aligned} (df)(g_1, \dots, g_{i+1}; x) &= f(g_2, \dots, g_{i+1}; xg_1) + (-1)^{i+1} f(g_1, \dots, g_i; x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^i (-1)^j f(g_1, \dots, \underbrace{g_j g_{j+1}, \dots, g_{i+1}}_{\text{第 } j \text{ 成分}}; x) \end{aligned}$$

なので, $(g_1, \dots, g_{i+1}; x)$ に $(x, g_1, \dots, g_i; e)$ を代入して条件式 $df = 0$ を整理すると

$$\begin{aligned} f(g_1, \dots, g_i; x) &= (-1)^i f(x, g_1, \dots, g_{i-1}; e) \\ &\quad + \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} f(x, g_1, \dots, \underbrace{g_{j-1} g_j, \dots, g_i}_{\text{第 } j \text{ 成分}}; e) \end{aligned}$$

である (最後の和の $j = 1$ の項は $f(xg_1, g_2, \dots, g_i; e)$ を意味する). そこで

$$F(g_1, \dots, g_{i-1}; x) := f(x, g_1, \dots, g_{i-1}; e)$$

とおくと, (*) により F は $C^{i-1}(G, \text{Ind}_G(M))$ に属し, しかも $f = dF$ である. したがって $H^i(G, \text{Ind}_G(M))$ の任意のコホモロジー類は自明となり, $H = \{e\}$ の場合が証明された. (特に §2.a (3) も証明されたことに注意しておく.)

次に H が一般の場合を示す. $\mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ 上の 2 つの関手 $H^*(H, -)$ と $H^*(G, \text{Ind}_G^H(-))$ を比較する. 両者は δ 関手であり (定理 B.1 (3) 参照), 次数 0 で一致する. さらに $H^*(H, -)$ は §2.a (3) により普遍的 δ 関手である. したがって $H^i(G, \text{Ind}_G^H(-))$ ($i > 0$) が切除可能であることを示せば十分である (§2.a (3) の証明を参照). 任意の $M \in \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ は $\text{Ind}_H(M)$ に埋め込まれ, 離散的 G 加群の同型 $\text{Ind}_G^H(\text{Ind}_H(M)) \cong \text{Ind}_G(M)$ (補足 B.2 参照) が成り立つので, 上の場合から $H^i(G, \text{Ind}_G^H(-))$ ($i > 0$) は切除可能である. 以上で命題 2.3 がすべて証明された. \square

次の事実は G のガロアコホモロジーの計算をより小さい副有限群のガロアコホモロジーの計算に帰着させる際に有用である.

定理 2.4 (Hochschild-Serre スペクトル系列) $N \triangleleft G$ を閉正規部分群とし, $\Gamma := G/N$ とおく. このとき $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に対してスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, H^q(N, M)) \implies H^{p+q}(G, M)$$

が存在する. 特に次の完全系列が得られる:

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma, M^N) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, M) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(N, M)^\Gamma \longrightarrow H^2(\Gamma, M^N).$$

ただし Inf は全射 $G \rightarrow \Gamma$ がひき起こす膨張写像 (脚注 3) を表す.

証明. [NSW](2.4.1) を参照せよ. □

2.c 係数が整 ℓ 進表現の場合

有限 G 加群の射影系 $(M_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} = (M_n, t_n : M_{n+1} \rightarrow M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の射影的極限

$$T := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M_n \quad (\text{副有限群としての位相を与える})$$

を係数とするガロアコホモロジーと M_n 係数ガロアコホモロジーとの関係を述べる. T の代表的な例は, 例 1.5 で挙げた \mathbb{Z}_ℓ と $\mathbb{Z}_\ell(1)$, および体 k 上の多様体 X を係数拡大した $X \otimes_k \bar{k}$ の \mathbb{Z}_ℓ 係数エタールコホモロジー (G_k の整 ℓ 進表現) などである.

定理 2.5 (Tate [T2] Proposition 2.2) 次の短完全系列が存在する:

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}}^1 H^{i-1}(G, M_n) \longrightarrow H^i(G, T) \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^i(G, M_n) \longrightarrow 0.$$

ここでアーベル群の射影系 $(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}}^1 A_n$ は準同型写像

$$\text{id} - \prod_{n \in \mathbb{N}} t_n : \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

の余核を表す. (核はもちろん射影的極限 $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n$ である.)

定理 2.5 の証明. 次のようなアーベル群の複体の短完全系列がある:

$$0 \longrightarrow C^*(G, T) \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} C^*(G, M_n) \xrightarrow{\text{id} - \prod t_n} \prod_{n \in \mathbb{N}} C^*(G, M_n) \longrightarrow 0.$$

ここで $\text{id} - \prod t_n$ の全射性は, 各 i で射影系 $\{C^i(G, M_n), t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が (M_n たちの有限性により) Mittag-Leffler 条件⁵ をみたすという事実による (定理 B.8 (2) 参照). 一方, アーベル群の直積は完全性を保つので中央と右側の複体のコホモロジーは M_n 係数ガロアコホモロジーの直積に等しい. したがって上記の複体の短完全系列に付随したコホモロジーの長完全系列を考えることにより定理の短完全系列が得られる. □

⁵集合の射影系 $(X_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件をみたすとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n' \geq n$ を適当に取れば, 任意の $\nu \geq n'$ について $\text{Im}(X_\nu \rightarrow X_n)$ が一定であることをいう. 有限集合からなる射影系や, 全射からなる射影系は必ず Mittag-Leffler 条件をみたす. またアーベル群の射影系 $(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件をみたせば $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}}^1 A_n = 0$ である (定理 B.8 (1) 参照).

系 2.6 射影系 $(H^{i-1}(G, M_n), t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件をみたす (例えば, 有限個を除く全ての n について $H^{i-1}(G, M_n)$ が有限) ならば

$$H^i(G, T) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^i(G, M_n).$$

次に整 ℓ 進表現の拡大とその特性類について説明する. $\mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ (ℓ は素数) を G と \mathbb{Z}_ℓ が左から連続かつ可換に作用する位相的 \mathbb{Z}_ℓ 加群と連続 $\mathbb{Z}_\ell[G]$ 準同型写像のなす圏とする. $T, T' \in \mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ に対して, $\mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ における T' の T による拡大

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow E \longrightarrow T' \longrightarrow 0 \quad (\text{完全})$$

の同型類群を $\text{Ext}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^1(T', T)$ と表す (群構造の定め方は [河] p. 123 例 3.5 を見よ). 特に $T' = \mathbb{Z}_\ell$ の場合, 短完全系列 $0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0$ に付随したコホモロジー長完全系列⁶ の境界写像 $\delta_E : \mathbb{Z}_\ell \rightarrow H^1(G, T)$ の $1 \in \mathbb{Z}_\ell$ での値を $\{E\}$ と表すと

$$\alpha_T : \text{Ext}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^1(\mathbb{Z}_\ell, T) \longrightarrow H^1(G, T), \quad E \mapsto \{E\}$$

という準同型写像 (特性類写像) が得られる.

定理 2.7 (§2.a (3) の類似) 任意の $T \in \mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ に対して α_T は単射である. さらに T が次の条件 (*) をみたすならば (例えば T がコンパクトならば), α_T は全射である:

(*) 任意の開部分群 $U \subset T$ に対して $\ell^n T \subset U$ となるような自然数 n が存在する.

証明. α_T の単射性は容易なので省略する. T が (*) をみたすと仮定し, α_T の全射性を示す. 群環 $\mathbb{Z}_\ell[G]$ に次の形の左イデアルたちを 0 の基本近傍系とする位相を与える:

$$\ell^n \mathbb{Z}_\ell[G] + \mathbb{Z}_\ell[G] \cdot \text{Ker}(\epsilon_N) \quad (n \geq 0, N \triangleleft G \text{ は開正規部分群}).$$

ただし $\epsilon_N : \mathbb{Z}_\ell[N] \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$ は N の元をすべて 1 にうつす写像 (augmentation) を表す. この位相によって $\mathbb{Z}_\ell[G]$ は $\mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ に属する. $B := \text{Ker}(\epsilon_G)$ に $\mathbb{Z}_\ell[G]$ の制限位相を与えると, $\mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ において次の短完全系列が得られる:

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}_\ell[G] \xrightarrow{\epsilon_G} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0.$$

さて $H^1(G, T)$ の元 x を任意に与え, x を代表する連続 1 コサイクル $f : G \rightarrow T$ を固定する. 例 1.2 の事実と T に関する仮定 (*) から, f を \mathbb{Z}_ℓ 線型に延長した \mathbb{Z}_ℓ 準同型写像 $f' : \mathbb{Z}_\ell[G] \rightarrow T$ も連続であり, その制限 $\varphi := f'|_B : B \rightarrow T$ は f の 1 コサイクル条件によって $\mathbb{Z}_\ell[G]$ 準同型写像である. そこで $E \in \mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ を

$$E := \text{Coker}((\iota, \varphi) : B \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell[G] \oplus T)$$

と定めると, $\mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ において $0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow \mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0$ という短完全系列が得られ, $\{E\} = x$ である. したがって α_T は全射である. \square

⁶ $\mathcal{M}_{G, \mathbb{Z}_\ell}^{\text{top}}$ における完全性 (脚注 1) から \mathbb{Z}_ℓ の ℓ 進位相は E の商位相と一致するので, $E \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$ には連続 \mathbb{Z}_ℓ 準同型による切断が存在する. よって §2.a (1) からガロアコホモロジーの長完全系列が得られる.

3 ガロアコホモロジーの消滅と双対性

前節では一般の副有限群 G に対してガロアコホモロジーを定義し, 基本性質を述べたが, ここでは G が体 k の絶対ガロア群 G_k である場合を主に扱う. 以下のように記号を定める.

記号 3.1 (1) 位相的 G_k 加群 M に対して $H^i(k, M) := H^i(G_k, M)$ とおく.

(2) G_k 加群の圏 $\mathcal{M}_{G_k}^{\text{top}}, \mathcal{M}_{G_k}^{\text{disc}}, \mathcal{M}_{G_k}^{\text{fin}}$ をそれぞれ $\mathcal{M}_k^{\text{top}}, \mathcal{M}_k^{\text{disc}}, \mathcal{M}_k^{\text{fin}}$ と表す. ねじれ群であるような離散的 G_k 加群全体からなる $\mathcal{M}_k^{\text{disc}}$ の充満部分圏を $\mathcal{M}_k^{\text{tors}}$ と表す.

(3) k のガロアコホモロジー次元 $\text{cd}(k)$ を

$$\text{cd}(k) := \sup_{M \in \mathcal{M}_k^{\text{tors}}} \{i \in \{0\} \cup \mathbb{N} \mid H^i(k, M) \neq 0\}$$

と定める. ただし右辺は $\mathcal{M}_k^{\text{tors}}$ に属するすべての G_k 加群 M にわたる和集合の上限を意味する. 例えば $\text{cd}(\mathbb{C}) = 0, \text{cd}(\mathbb{R}) = \infty$ (例 A.1 (3) 参照) である.

3.a ガロアコホモロジーの消滅

命題 3.2 k を任意の体とする.

- (1) $i > 0$ ならば $H^i(k, \bar{k}) = 0$ である.
- (2) $H^1(k, \bar{k}^\times) = 0$ である. (**Hilbert の定理 90**)

証明. §2.a(2) により, 任意の有限次ガロア拡大 L/k に対して

$$(i) H^i(\text{Gal}(L/k), L) = 0 \quad (i > 0), \quad (ii) H^1(\text{Gal}(L/k), L^\times) = 0$$

を示せばよい. (i) は $\text{Gal}(L/k)$ 加群の同型 $L \cong \text{Ind}_{\text{Gal}(L/k)}(k)$ ([藤] p. 203 定理 3.36 参照, 以下の系 B.4 も見よ) と Shapiro の補題 (命題 2.3) から従う. 次に (ii) を示す. $G := \text{Gal}(L/k)$ とおく. コチェイン $f \in C^1(G, L^\times)$ がコサイクル条件 $f(gg') = (g \cdot f(g')) f(g)$ をみたしているとせよ. $a \in L$ に対して $\xi = \xi(f, a) \in L$ を次のように定める:

$$\xi := \sum_{g' \in G} f(g') (g' \cdot a).$$

ガロア群 G の元たちは $\text{End}_k(L)$ の元として L 上線型独立 ([藤] p. 100 定理 2.39 の系) なので, a を適当に取れば $\xi \neq 0$ である. このときコサイクル条件から

$$g \cdot \xi = \sum_{g' \in G} (g \cdot f(g')) (gg' \cdot a) = \sum_{g' \in G} f(g)^{-1} f(gg') (gg' \cdot a) = f(g)^{-1} \xi.$$

よって $f = d(\xi^{-1})$ となり f が代表する $H^1(G, L^\times)$ のコホモロジー類は自明である. \square

例 3.3 k を一般の体とする.

(1) n を k の標数と素な自然数とするととき, $\mathcal{M}_k^{\text{disc}}$ において短完全系列

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \bar{k}^\times \xrightarrow{n\text{乗}} \bar{k}^\times \longrightarrow 1$$

がある. これを **Kummer 完全系列** とよぶ. ガロアコホモロジーの長完全系列を考えると, 命題 3.2 (2) から次の同型が得られる:

$$k^\times / (k^\times)^n \cong H^1(k, \mu_n) \quad (a \mapsto d\sqrt[n]{a}).$$

(2) k の標数 $\text{ch}(k)$ が $p > 0$ であるとき, $\mathcal{M}_k^{\text{disc}}$ において短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \bar{k} \xrightarrow{1-F} \bar{k} \longrightarrow 0$$

がある. ここで F は \bar{k} の元を p 乗する自己準同型写像 (**Frobenius 作用素**) を表す. 上記の完全系列を **Artin-Schreier 完全系列** とよぶ. 命題 3.2 (1) から $H^1(k, \bar{k}) = 0$ なので, ガロアコホモロジーの長完全系列によって次の同型が得られる:

$$k/(1-F)k \cong H^1(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

これら 2 つの同型は k の巡回拡大を調べる上で基本的である.

3.b 有限体のガロアコホモロジーの双対性

有限体 \mathbb{F} の有限次代数拡大 \mathbb{F}'/\mathbb{F} はガロアかつ巡回的であり, ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F})$ は \mathbb{F} 上の Frobenius 置換

$$\varphi_{\mathbb{F}'/\mathbb{F}} : \mathbb{F}' \longrightarrow \mathbb{F}', \quad a \mapsto a^q \quad (q := \#(\mathbb{F}'))$$

で生成される. したがって有限体 \mathbb{F} の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{F}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ は \mathbb{Z} の副有限完備化 $\widehat{\mathbb{Z}}$ と同型であり, Frobenius 置換

$$\varphi_{\mathbb{F}} := \varphi_{\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}} : \bar{\mathbb{F}} \longrightarrow \bar{\mathbb{F}}, \quad a \mapsto a^q$$

によって位相的に生成される. この $\varphi_{\mathbb{F}} \in G_{\mathbb{F}}$ を **算術的 Frobenius 元** とよぶ. これらの事実の帰結として次の定理が成り立つ.

定理 3.4 (1) $\text{cd}(\mathbb{F}) = 1$ である.

(2) 自然な写像

$$H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(G_{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad \chi \mapsto \chi(\varphi_{\mathbb{F}})$$

は全単射である. これを **有限体 \mathbb{F} のトレース同型** とよぶ.

- (3) $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}^{\text{fin}}$ とする. このとき $H^i(\mathbb{F}, M)$ ($i = 0, 1$) は有限アーベル群である. さらに $M^{\vee} := \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ とおき, 補題 1.11 (2) と同じ規則によって M^{\vee} を有限 $G_{\mathbb{F}}$ 加群とみなすと, カップ積とトレース同型による双加法的写像

$$H^i(\mathbb{F}, M) \times H^{1-i}(\mathbb{F}, M^{\vee}) \xrightarrow{\cup} H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (i = 0, 1)$$

は有限アーベル群の非退化対である.

証明. 定理 3.4 (2) は同型 $G_{\mathbb{F}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ ($\varphi_{\mathbb{F}} \mapsto 1$) の帰結である. 定理 3.4 (1) と (3) は以下の手順で証明できる. 有限巡回群のコホモロジーの計算 (補遺 A 参照) と §2.a (2) から, 任意の $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}^{\text{tors}}$ に対して

$$H^1(\mathbb{F}, M) \cong M/\text{Im}(1 - \varphi_{\mathbb{F}} : M \rightarrow M) \quad (f \in C^1(G_{\mathbb{F}}, M) \mapsto f(\varphi_{\mathbb{F}}) \in M)$$

であることがわかる. この同型から定理 3.4 (3) がただちに従う. さらにこの同型によって $H^1(\mathbb{F}, -)$ は $\mathcal{M}_{\mathbb{F}}^{\text{tors}}$ において右完全である. よって §2.a (3) と次の補題 3.5 から定理 3.4 (1) が従う. 補題 3.5 の証明は練習問題とする. \square

補題 3.5 $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ をアーベル圏とする. $R^*F = (R^iF)_{i \geq 0}$ を左完全関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ の右導来関手とし, R^nF が右完全であると仮定する. このとき任意の $i > n$ に対して $R^iF = 0$ (零関手) である.

練習問題 3.6 ℓ を任意の素数とし, $T \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}}^{\text{top}}$ は有限生成 \mathbb{Z}_{ℓ} 加群 (位相は ℓ 進位相) であるとする. このとき

- (1) $H^i(\mathbb{F}, T)$ ($i \geq 0$) は有限生成 \mathbb{Z}_{ℓ} 加群であり, $i \geq 2$ ならば自明である.
- (2) 次の自然な写像は全単射である (ℓ 進的なトレース同型):

$$H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(G_{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}, \quad \chi \mapsto \chi(\varphi_{\mathbb{F}}).$$

- (3) $T^{\vee} := \text{Hom}_{\text{cont}}(T, \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell})$ とおくと, カップ積とトレース同型による \mathbb{Z}_{ℓ} 双線形写像

$$H^i(\mathbb{F}, T) \times H^{1-i}(\mathbb{F}, T^{\vee}) \xrightarrow{\cup} H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell}) \cong \mathbb{Q}_{\ell}/\mathbb{Z}_{\ell} \quad (i = 0, 1)$$

はコンパクト群と離散群の Pontryagin 双対である.

- (4) $r > 0$ かつ $\ell \neq \text{ch}(p)$ のとき, $H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}_{\ell}(r))$ の位数を求めよ. ただし $\mathbb{Z}_{\ell}(r) := \mathbb{Z}_{\ell}(1)^{\otimes r}$.

3.c p 進体のガロアコホモロジーの双対性

k を p 進体 ($= \mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体) とする. 次の定理において (2) は p 進体の Brauer 群論の主定理 ([斎] 定理 9.7) と同値であり, (3) の双対性は局所類体論 ([斎] 第 10 章) の相互法則 $k^{\times}/(k^{\times})^n \cong G_k^{\text{ab}}/n$ (n は自然数) を含んでいる.

定理 3.7 (Tate) (1) $\text{cd}(k) = 2$ である.

(2) 次の標準同型 (p 進体 k のトレース同型) が存在する:

$$H^2(k, \bar{k}^\times) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(3) $M \in \mathcal{M}_k^{\text{fin}}$ に対して $H^i(k, M)$ ($i = 0, 1, 2$) は位数有限である. さらに $M^* := \text{Hom}(M, \bar{k}^\times)$ とおくと, カップ積とトレース同型による双加法的写像

$$H^i(k, M) \times H^{2-i}(k, M^*) \xrightarrow{\cup} H^2(k, \bar{k}^\times) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (i = 0, 1, 2)$$

は有限アーベル群の非退化対である.

(4) $M \in \mathcal{M}_k^{\text{fin}}$ に対して次の等号が成立する:

$$\frac{\#(H^0(k, M)) \cdot \#(H^2(k, M))}{\#(H^1(k, M))} = \frac{1}{(\mathfrak{o}_k : m\mathfrak{o}_k)}.$$

ただし \mathfrak{o}_k は k の整数環を表し, $m := \#(M)$ とおいた.

証明の概略. \bar{k}^\times に含まれる 1 の冪根たちのなす離散的 G_k 加群を $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ と表すと, \bar{k}^\times のねじれ部分がちょうど $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ であり, \bar{k}^\times を $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ で割った商は一意的に可除 (uniquely divisible) である. よって §2.a (1), (2) から $H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong H^2(k, \bar{k}^\times)$ であり, 定理中の \bar{k}^\times を $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ で置き換えることができる.

k の剰余体を \mathbb{F} とし, 最大不分岐拡大体を k_{ur} とする. よく知られているように $\text{Gal}(k_{\text{ur}}/k) \cong G_{\mathbb{F}}$ であり,

$$\text{cd}(\mathbb{F}) = 1 \quad (\text{定理 3.7 (1)}), \quad \text{cd}(k_{\text{ur}}) = 1 \quad (\text{Lang の定理, [S] II §3.3.c})$$

である. (1) はこれらの事実と定理 2.4 のスペクトル系列から従う. (1) と同様に, 定理 2.4 のスペクトル系列を $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)$ に適用すると

$$H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong H^1(\mathbb{F}, H^1(k_{\text{ur}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))) \cong H^1(\mathbb{F}, k_{\text{ur}}^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad (\text{例 3.3 (1) 参照})$$

であり, 正規化された離散付値 $k_{\text{ur}}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ と有限体 \mathbb{F} のトレース同型は

$$\text{tr}_k : H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \cong H^1(\mathbb{F}, k_{\text{ur}}^\times \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

という標準的な全射準同型写像を引き起こす. これが (2) のトレース写像である. 写像 tr_k の単射性は次のように確かめられる. 離散的 G_k 加群の短完全系列 $0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1) \xrightarrow{\times n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1) \rightarrow 0$ からガロアコホモロジーの完全系列

$$H^2(k, \mu_n) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\times n} H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) (\longrightarrow 0)$$

が得られるので, 写像 tr_k の単射性を示すには各素数 ℓ について合成写像

$$H^1(\mathbb{F}, k_{\text{ur}}^\times / (k_{\text{ur}}^\times)^\ell) \cong H^2(k, \mu_\ell) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \xrightarrow{\text{tr}_k} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が単射であることを示せば十分である. tr_k の構成からこの合成写像の像はちょうど $\ell^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ である. この事実から問題の単射性は等号

$$\#(H^1(\mathbb{F}, k_{\mathrm{ur}}^\times / (k_{\mathrm{ur}}^\times)^\ell)) = \ell$$

を示すことに帰着される. $\ell \neq p$ の場合, Hensel の補題によって離散付値は同型 $k_{\mathrm{ur}}^\times \otimes \mathbb{Z}/\ell \cong \mathbb{Z}/\ell$ をひき起こすので定理 3.4 (3) から上記の等号が従う. $\ell = p$ の場合, k_{ur} の整数環を $\mathfrak{o}_{\mathrm{ur}}$ と表すと, 離散的 G_k 加群 $\mathfrak{o}_{\mathrm{ur}}^\times / (\mathfrak{o}_{\mathrm{ur}}^\times)^p =: A^0$ には $A^j / A^{j+1} \cong \overline{\mathbb{F}}$, $A^r = 0$ ($r \gg 0$) となるような長さ有限の減少フィルター $\{A^j\}_{0 \leq j \leq r}$ が入るので, 命題 3.2 (1) と定理 3.4 (3) から上記の等号が得られる. 以上で (2) が証明された.

(3) と (4) はいずれも $p \nmid \#(M)$ の場合は容易であり, 本質的なのは M が p 群の場合である. (4) については [NSW] 第 7 章 §3 を見よ. 以下では (3) の証明の概略をのべる. §2.a (1) を用いた簡単な議論によって, 主張 (3) は M が 1 つの素数 ℓ によって消される ($\ell M = 0$ となる) ような場合に帰着される. さらに次の議論によって問題を $M = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ の場合に帰着させよう. M への作用が自明であるような G_k の開正規部分群 N を一つ固定し, $G := G_k/N$ とおく. G の ℓ -Sylow 部分群 G' をとり, $L := ((\overline{k})^N)^{G'}$ とおく. $[L:k]$ は ℓ と素なので, M と M^* はそれぞれ誘導加群 $\mathrm{Ind}_k^L(M) := \mathrm{Ind}_{G_k}^{G'L}(M)$ と $\mathrm{Ind}_k^L(M)^*$ の直和因子である (誘導加群の定義は §2.b を参照). よって M を $\mathrm{Ind}_k^L(M)$ で置き換えてよい. さらに Shapiro の補題 (命題 2.3) によって

$$H^i(k, \mathrm{Ind}_k^L(M)) \cong H^i(L, M), \quad H^i(k, \mathrm{Ind}_k^L(M)^*) \cong H^i(k, \mathrm{Ind}_k^L(M^*)) \cong H^i(L, M^*)$$

なので, 問題は G が ℓ 群の場合に帰着される. このとき単純 $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}[G]$ 加群は $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ のみなので, $M =: M^0$ には $M^j / M^{j+1} \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, $M^r = 0$ ($r \gg 0$) となるような長さ有限の減少フィルター $\{M^j\}_{0 \leq j \leq r}$ が入る. かくして問題の双対性は $M = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ の場合に帰着された.

以下では $M = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ の場合に双対性の証明を述べる. $i = 0, 2$ での双対性は (2) の帰結である. $i = 1$ の場合 (局所類体論と同値な命題) は以下のようにして確かめられる. 1 の原始 ℓ 乗根を添加する拡大の次数は ℓ と素なので, 制限写像と余制限写像を使った簡単な議論によって k は 1 の原始 ℓ 乗根 ζ_ℓ を含むと仮定してよい. \mathfrak{o}_k の素元 π を一つ固定する. 仮定 $\zeta_\ell \in k^\times$ と例 3.3 (1) の同型から, 問題は

$$k^\times / (k^\times)^\ell \times k^\times / (k^\times)^\ell \longrightarrow H^2(k, \mu_\ell^{\otimes 2}) \cong \mu_\ell \quad (\mathbf{H})$$

という双加法的写像 (カップ積の反可換性から実は歪対称形式) の非退化性と同値である. $\ell \neq p$ の場合, Hensel の補題 ($\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^\ell \cong \mathfrak{o}_k^\times / (\mathfrak{o}_k^\times)^\ell$) による同型

$$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^\ell \cong k^\times / (k^\times)^\ell, \quad (a, b) \mapsto \pi^a b \quad (a \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, b \in \mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^\ell)$$

とトレース同型 $\sigma : \mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^\ell \cong H^1(\mathbb{F}, \mu_\ell) \cong \mu_\ell \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ (最後は $\zeta_\ell \mapsto 1$) がある. これらを用いて, 歪対称形式 (H) を表示すると, $a, c \in \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ と $b, d \in \mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^\ell$ に対して

$$((a, b), (c, d)) \mapsto \zeta_\ell^{a \cdot \sigma(d) - c \cdot \sigma(b)}$$

となり, したがって非退化である. $\ell = p$ の場合はやや複雑である. $B := k^\times / (k^\times)^p$ とおき, 減少フィルター $\{B^j\}_{j \geq 0}$ を

$$B^0 := B, \quad B^j := \text{Im}(\{1 + \pi^j x \mid x \in \mathfrak{o}_k\} \rightarrow B) \quad (j \geq 1)$$

と定める. $e' := pe/(p-1)$ (e は k の絶対分岐指数) とおくと, 仮定 $\zeta_p \in k^\times$ から e' は整数であり, 簡単な計算から $B^{e'+1} = 0$ かつ

$$B^j/B^{j+1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, & y \mapsto \text{ord}_k(y) & (j = 0) \\ \mathbb{F}, & 1 + \pi^j x \mapsto \bar{x} & (0 < j < e', p \nmid j) \\ 0 & & (0 < j < e', p \mid j) \\ \mathbb{F}/(1 + c\varphi)\mathbb{F}, & 1 + \pi^{e'} x \mapsto \bar{x} & (j = e') \end{cases} \quad (\text{I})$$

であることがわかる. ただし $x \in \mathfrak{o}_k$ に対して \bar{x} は \mathbb{F} での剰余類を表す. $c \in \mathbb{F}^\times$ は $p^{-1}\pi^e$ の剰余類を表し, φ は \mathbb{F} の元を p 乗する Frobenius 写像を表す. この減少フィルターを使って歪対称形式 (H) を計算すると以下ようになる. 各 $0 \leq j \leq e'$ について (H) は $B^j \times B^{e'-j+1}$ を消す. したがって (H) は

$$B^j/B^{j+1} \times B^{e'-j}/B^{e'-j+1} \longrightarrow \mu_p \quad (\text{H}_j)$$

という双加法的写像をひき起こす. さて有限体の拡大 \mathbb{F}/\mathbb{F}_p のトレース写像 $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_p$ を τ と表し, 単数 $(1 - \zeta_p)^{-p}\pi^{e'} \in \mathfrak{o}_k^\times$ の \mathbb{F}^\times での剰余類を u と表す. (H_j) を上記の同型 (I) を通して表示すると, $a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と $\xi, \eta \in \mathbb{F}$ に対して

$$\begin{cases} (a, \eta) \mapsto \zeta_p^{a \cdot \tau(u\eta)} & (j = 0) \\ (\xi, \eta) \mapsto \zeta_p^{-j \cdot \tau(u\xi\eta)} & (0 < j < e', p \nmid j) \\ (\xi, b) \mapsto \zeta_p^{-b \cdot \tau(u\xi)} & (j = e') \end{cases}$$

となる. この表示から各 j で双加法的写像 (H_j) は非退化なので, 歪対称形式 (H) も非退化である. \square

練習問題 3.8 練習問題 3.6 と同様に, 有限生成 \mathbb{Z}_ℓ 加群 (ℓ は任意の素数) であるような $T \in \mathcal{M}_k^{\text{top}}$ に対してガロアコホモロジーの双対性を定式化し, 証明せよ.

4 代数体のガロアコホモロジーと Selmer 群

§4 では k を代数体 (= \mathbb{Q} の有限次拡大体) とする. k のすべての素点の集合を P とし, 素点 $v \in P$ における k の完備化を k_v と表す. k のすべての無限素点の集合を P_∞ と表す. また, 実素点の集合を $P_\mathbb{R}$ と表し, 複素素点の集合を $P_\mathbb{C}$ と表す ($P_\infty = P_\mathbb{R} \amalg P_\mathbb{C}$ である). さて S を P_∞ を含むような P の部分集合とする. S の有限性は仮定しない. k_S を S の外不分岐な (S に含まれる素点でのみ分岐を許すような) k の最大ガロア拡大とし, $G_S := \text{Gal}(k_S/k)$ とおく. 各 $v \in S$ に対して体の埋め込み $k_S \hookrightarrow \overline{k}_v$ を固定し, これによって k_v の絶対ガロア群 $G_v = G_{k_v}$ から G_S への準同型写像 $G_v \rightarrow G_S$ を決めておく. 像は素点 v の分解群である.

4.a 代数体のガロアコホモロジーの双対性

代数体のガロアコホモロジーの双対性は p 進体の場合と比べてかなり複雑である. 定式化には大きく分けて, イデール類係数のガロアコホモロジーを使う **Poitou-Tate** の方法とエタールコホモロジーを使う **Artin-Verdier** の方法の2通りがある. これら2通りの双対性の主張は互いに同値であり, 大域類体論の諸定理と深く関わっている. ここでは前者の定式化を用いる (大域類体論の内容については省略する).

k の有限次ガロア拡大 K に対して

$$O_{K,S}^\times := \{a \in K^\times \mid \forall v \in P_K \setminus S_K, \text{ord}_v(a) = 0\} \quad (S \text{ 単数群})$$

$$U_{K,S} := \prod_{v \in S_K} \{1\} \times \prod_{v \in P_K \setminus S_K} O_v^\times \quad (\subset I_K)$$

$$C_S(K) := K^\times \backslash I_K / U_{K,S} = C_K / U_{K,S} \quad (S \text{ イデール類群})$$

と定める. ただし P_K は K のすべての素点の集合, S_K は S 上にある K の素点の集合を表す. I_K と C_K はそれぞれ K のイデール群とイデール類群を表し, K の有限素点 v に対して O_v は K_v (v による K の完備化) の整数環を表す. $O_{K,S}^\times$ と $C_{K,S}$ にはガロア群 $\text{Gal}(K/k)$ が自然に作用するので, G_S 加群 \mathcal{O}_S^\times と \mathcal{C}_S をそれぞれ次のように定める:

$$\mathcal{O}_S^\times := \varinjlim_{k \subset K \subset k_S} O_{K,S}^\times, \quad \mathcal{C}_S := \varinjlim_{k \subset K \subset k_S} C_S(K).$$

ただし帰納的極限は k_S に含まれる k のすべての有限次ガロア拡大 K をわたる. \mathcal{O}_S^\times と \mathcal{C}_S には**離散位相**を与える. 命題 1.4 からこれらは離散的 G_S 加群になる. また位相的 G_S 加群 M に対して, $\mathbf{III}^i(G_S, M)$ ($i \geq 0$) を制限写像

$$\text{Res}^i : H^i(G_S, M) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^i(k_v, M)$$

の核として定義する. ただし §4 の冒頭で固定した群準同型 $G_v \rightarrow G_S$ をここで用いた. 定義からただちに $\mathbf{III}^0(G_S, M) = 0$ である.

定理 4.1 (Poitou-Tate) 以下の (2)~(5) においては M を有限 G_S 加群とし, M の位数を割るような素点 $v \in P$ はすべて S に属するものと仮定する.

(1) 次の標準的なトレース同型が存在する:

$$H^2(G_S, \mathcal{C}_S) \cong \frac{1}{\#(G_S)} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} := \bigcup_{k \subset K \subset k_S} \frac{1}{[K:k]} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \quad (\subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

ただし右辺の合併は k_S に含まれる k のすべての有限次ガロア拡大 K をわたる.

(2) 以下 M は定理の冒頭の通りとする. $i \geq 3$ ならば Res^i は同型である:

$$H^i(G_S, M) \cong \bigoplus_{v \in P_{\mathbb{R}}} H^i(k_v, M)$$

(定理 3.7 (1) から, $i \geq 3$ ならば有限素点 v に対しては $H^i(k_v, M) = 0$ であることに注意). 特に $i \neq 1, 2$ ならば $\mathbf{III}^i(G_S, M) = 0$ である.

- (3) $\mathbb{H}^i(G_S, M)$ ($i = 1, 2$) は位数有限である. さらに $M^* := \mathbf{Hom}(M, \mathcal{O}_S^\times)$ とおくと, 次の有限アーベル群の非退化対が存在する⁷:

$$\mathbb{H}^i(G_S, M) \times \mathbb{H}^{3-i}(G_S, M^*) \longrightarrow \frac{1}{\#(G_S)} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \quad (i = 1, 2).$$

- (4) 制限直積 $\prod_{v \in S} H^1(k_v, M)$ を次で定義する:

$$\left\{ (x_v)_v \in \prod_{v \in S} H^1(k_v, M) \mid \text{有限個を除く } \forall v \in S \setminus P_\infty \text{ で } x_v \in H_{\text{ur}}^1(k_v, M) \right\}.$$

ここで有限素点 v に対して $H_{\text{ur}}^1(k_v, M)$ は膨張写像 $H^1(\mathbb{F}_v, M^{I_v}) \rightarrow H^1(k_v, M)$ の像を表す (\mathbb{F}_v は v の剰余体, I_v は G_v の惰性部分群を表す). また, 位相アーベル群 A の Pontryagin 双対を A^\vee と表す. これらの記号のもとで, 次の位相アーベル群の長完全系列が存在する (res^i は Res^i が誘導する写像を意味する):

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(G_S, M) \xrightarrow{\text{res}^0} \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)' \longrightarrow H^2(G_S, M^*)^\vee \\ &\quad \text{(finite)} \qquad \qquad \text{(compact)} \qquad \qquad \text{(compact)} \\ &\longrightarrow H^1(G_S, M) \xrightarrow{\text{res}^1} \prod_{v \in S} H^1(k_v, M) \longrightarrow H^1(G_S, M^*)^\vee \\ &\quad \text{(discrete)} \qquad \qquad \text{(locally compact)} \qquad \qquad \text{(compact)} \\ &\longrightarrow H^2(G_S, M) \xrightarrow{\text{res}^2} \bigoplus_{v \in S} H^2(k_v, M) \longrightarrow H^0(G_S, M^*)^\vee \longrightarrow 0. \\ &\quad \text{(discrete)} \qquad \qquad \text{(discrete)} \qquad \qquad \text{(finite)} \end{aligned}$$

ただし $H^0(k_v, M)'$ は v が無限素点なら修正コホモロジー $\widehat{H}^0(k_v, M)$ (例 A.1 (5)) を表し, v が有限素点なら通常のコホモロジー $H^0(k_v, M)$ を表す.

- (5) S が有限集合ならば $H^i(G_S, M)$ ($i = 0, 1, 2$) も有限であり, 次の等号が成立する:

$$\frac{\#(H^0(G_S, M)) \cdot \#(H^2(G_S, M))}{\#(H^1(G_S, M))} = \prod_{v \in P_\infty} \frac{\#(H^0(k_v, M))}{\#(M)} \times \prod_{v \in P_C} \frac{1}{\#(M)}.$$

証明. [NSW] (8.4.4), (8.6.7), (8.6.10), (8.7.4) を見よ. □

例 4.2 (1) S が有限集合ならば定理 4.1 (5) から $H^1(G_S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は有限である. このことは S の外不分岐な k の n 次巡回拡大が高々有限個であることを意味する.

- (2) p を素数とし, S を p 上の全素点と P_∞ を含む有限集合とする. $p \geq 3$ ならば

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(G_S, \mu_p^{\otimes j}) = \begin{cases} -\#(P_\infty) & (j \text{ が奇数}) \\ -\#(P_C) & (j \text{ が偶数}). \end{cases}$$

$p = 2$ ならば, 任意の j に対して $\mu_2^{\otimes j} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり,

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_2} H^i(G_S, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = -\#(P_C).$$

⁷ S が素数 p 上の全素点を含むならば, k_S は円分 \mathbb{Z}_p 拡大を含み, $\#(G_S)^{-1} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ を含む.

4.b Selmer 群

古典的な Selmer 群は代数体 k 上のアーベル多様体 A に対して定義される:

$$\text{Sel}(A/k) := \text{III}^1(k, A_{\text{tors}}).$$

ただし $\text{III}^1(k, -)$ は §4.a で定義した $\text{III}^1(G_S, -)$ の $S = P$ の場合 (つまり $G_S = G_k$ の場合) を意味する. Selmer 群に近い不変量として Tate-Shafarevich 群 $\text{III}(A/k)$ がある:

$$\text{III}(A/k) := \text{III}^1(k, A).$$

これらの群の関係は次のような短完全系列で表すことができる:

$$0 \longrightarrow A(k) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Sel}(A/k) \longrightarrow \text{III}(A/k) \longrightarrow 0.$$

[T1] Conjecture 4.1 において $\text{III}(A/k)$ は一般に有限であろうと予想されているが, 非常に難しい問題である (この問題に関する文献として Rubin の論文 [R] を挙げておく). これから定義する Selmer 群は大雑把に言えばこれらの群の一般化であるが, 局所条件系を 1 つの変数と見なすことで非常に使いやすい道具になっている.

定義 4.3 $M \in \mathcal{M}_k^{\text{fin}}$ とする.

- (1) 各素点 $v \in P$ について部分群 $L_v \subset H^1(k_v, M)$ を集めた族 $\mathcal{L} = \{L_v\}_{v \in P}$ が M の局所条件系であるとは, 有限個を除くすべての有限素点 v について

$$L_v = H_{\text{ur}}^1(k_v, M) := \text{Im}(\text{Inf} : H^1(\mathbb{F}_v, M^{I_v}) \hookrightarrow H^1(k_v, M))$$

(\mathbb{F}_v は v の剰余体, I_v は G_v の惰性部分群) であることをいう.

- (2) M の局所条件系 $\mathcal{L} = \{L_v\}_{v \in P}$ に対して **Selmer 群** $H_{\mathcal{L}}^1(k, M)$ を

$$H_{\mathcal{L}}^1(k, M) := \text{Ker} \left(\text{res}^1 : H^1(k, M) \longrightarrow \prod_{v \in P} \frac{H^1(k_v, M)}{L_v} \right)$$

と定義する. ただし res^1 は制限写像がひき起こす写像を意味する. §2.a(2) の性質と \mathcal{L} の定義によって $\text{Im}(\text{res}^1)$ は直和に含まれることに注意しておく.

- (3) $\mathcal{L} = \{L_v\}_{v \in P}$ を M の局所条件系とする. $M^* = \text{Hom}(M, \bar{k}^\times)$ とおくと, 定理 3.7(3) と例 A.1(4) によって各素点 $v \in P$ に対して有限アーベル群の非退化対

$$H^1(k_v, M) \times H^1(k_v, M^*) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

がある. そこで $H^1(k_v, M^*)$ ($v \in P$) の部分群の族 $\mathcal{L}^* = \{L_v^*\}_{v \in P}$ を

$$L_v^* := \text{上記の非退化対での } L_v \text{ の完全零化域 (直交補空間)}$$

と定義すると, \mathcal{L}^* は M^* の局所条件系になっている (確かめてみよ). これを \mathcal{L} の双対局所条件系とよぶ.

Selmer 群 $H_{\mathcal{L}}^1(k, M)$ の位数が有限であることを確認しよう。

命題 4.4 $\mathcal{L} = \{L_v\}_{v \in P}$ を $M \in \mathcal{M}_k^{\text{fin}}$ の局所条件系とする. k の素点の有限集合 S が

- (i) $L_v \neq H_{\text{ur}}^1(k_v, M)$ であるような有限素点 v ,
- (ii) 惰性部分群 $I_v \triangleleft G_v$ が M に非自明に作用するような有限素点 v ,
- (iii) 無限素点

をすべて含むならば, M は G_S 加群であり, $H^1(k, M)$ の部分群として

$$H_{\mathcal{L}}^1(k, M) = \text{Ker} \left(\text{res}_S^1 : H^1(G_S, M) \longrightarrow \prod_{v \in S} \frac{H^1(k_v, M)}{L_v} \right)$$

である. ただし res_S^1 は制限写像がひき起こす写像を意味する. 特に定理 4.1 (5) の前半の主張から $H_{\mathcal{L}}^1(k, M)$ は位数有限である.

証明. $N_S := \text{Gal}(\bar{k}/k_S)$ とおく. S が (ii), (iii) を含むことから N_S は M に自明に作用するので M は G_S 加群である. まず次の等号を示そう:

$$H^1(G_S, M) = \text{Ker} \left(\text{res}^1 : H^1(G_k, M) \longrightarrow \prod_{v \in P \setminus S} \frac{H^1(k_v, M)}{H_{\text{ur}}^1(k_v, M)} \right). \quad (\text{U})$$

(\because) 定理 2.4 により次の完全系列がある:

$$0 \longrightarrow H^1(G_S, M) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G_k, M) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(N_S, M)^{G_S}.$$

N_S は M に自明に作用するので, 制限写像

$$H^1(N_S, M)^{G_S} \longrightarrow \prod_{v \in P \setminus S} H^1(I_v, M)^{G_{\mathbb{F}_v}} = \prod_{v \in P \setminus S} \frac{H^1(k_v, M)}{H_{\text{ur}}^1(k_v, M)}$$

は制限写像

$$\text{Hom}_{\text{cont}, G_S}(N_S, M) \longrightarrow \prod_{v \in P \setminus S} \text{Hom}_{\text{cont}, G_{\mathbb{F}_v}}(I_v, M)$$

と同一視される (例 2.2). N_S は各 $v \in P \setminus S$ の惰性部分群をすべて含む G_k の最小の閉正規部分群なので, この写像は単射である. したがって等号 (U) が成り立つ. \square

命題の証明に戻る. S が (i) を含むことから任意の $v \in P \setminus S$ に対して $H_{\text{ur}}^1(k_v, M) = L_v$ である. 命題の等号はこの事実と等号 (U) から従う. \square

次の定理は Poitou-Tate の定理 (定理 4.1) の応用であるが, $H_{\mathcal{L}}^1(k, M)$ の位数を計算する際に有効な公式である.

定理 4.5 (Wiles [W] Proposition 1.6) $M \in \mathcal{M}_k^{\text{fin}}$ とその局所条件系 $\mathcal{L} = \{L_v\}_{v \in P}$ に対して, 次の等号が成立する (次の補足も見よ):

$$\frac{\#(H_{\mathcal{L}}^1(k, M))}{\#(H_{\mathcal{L}^*}^1(k, M^*))} = \frac{\#(H^0(k, M))}{\#(H^0(k, M^*))} \cdot \prod_{v \in P} \frac{\#(L_v)}{\#(H^0(k_v, M))}.$$

補足 4.6 有限素点 v に対しては, 有限アーベル群の完全系列

$$0 \longrightarrow H^0(k_v, M) \longrightarrow M^{I_v} \xrightarrow{1-\varphi_v} M^{I_v} \longrightarrow H^1(\mathbb{F}_v, M^{I_v}) \longrightarrow 0$$

(φ_v は $G_{\mathbb{F}_v}$ の算術的 Frobenius 元) によって $\#(H^0(k_v, M)) = \#(H_{\text{ur}}^1(k_v, M))$ である. したがって定理の右辺の積は実質有限積である.

定理の証明. 命題 4.4 のような有限集合 $S \subset P$ を固定する. 必要ならば S を大きくして, $\#(M)$ を割るような素点はすべて S に含まれると仮定する. 完全系列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_{\mathcal{L}}^1(k, M) & & \prod_{v \in S} L_v & \xrightarrow{\sim} & \prod_{v \in S} \left(\frac{H^1(k_v, M^*)}{L_v^*} \right)^\vee \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{III}^1(G_S, M) & \longrightarrow & H^1(G_S, M) & \longrightarrow & \prod_{v \in S} H^1(k_v, M) & \longrightarrow & H^1(G_S, M^*)^\vee \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \prod_{v \in S} \frac{H^1(k_v, M)}{L_v} & = & \prod_{v \in S} \frac{H^1(k_v, M)}{L_v} & & H_{\mathcal{L}^*}^1(k, M^*)^\vee & & \end{array}$$

を考えよう. ただし中央の水平な系列の完全性は定理 4.1 (4) の長完全系列の中央での完全性による. この図式と定理 4.1 (3), (4) から次の有限アーベル群の完全系列が得られる:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(G_S, M) \longrightarrow \prod_{v \in S} H^0(k_v, M)' \longrightarrow H^2(G_S, M^*)^\vee \\ &\longrightarrow H_{\mathcal{L}}^1(k, M) \longrightarrow \prod_{v \in S} L_v \longrightarrow H^1(G_S, M^*)^\vee \longrightarrow H_{\mathcal{L}^*}^1(k, M^*)^\vee \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

定理の等号は, 位数の商 $\#(H_{\mathcal{L}}^1(k, M)) / \#(H_{\mathcal{L}^*}^1(k, M^*))$ をこの完全系列と M^* に対する定理 4.1 (5), および例 A.1 (5) の等号を用いて計算することにより得られる. \square

例 4.7 p を素数とし, $M := \mu_p$ とする. $S := \{v \in P \mid v|p \text{ または } v|\infty\}$ とおき, M の局所条件系 $\mathcal{L} = \{L_v\}_{v \in P}$ を

$$L_v := \begin{cases} H_{\text{ur}}^1(k_v, \mu_p) & (v \in P \setminus S) \\ \mathfrak{o}_v^\times / (\mathfrak{o}_v^\times)^p & (v \in S \setminus P_\infty) \\ H^1(k_v, \mu_p) & (v \in P_\infty) \end{cases}$$

と定める. ただし有限素点 v に対して \mathfrak{o}_v は k_v の整数環を表す. このとき $M^* = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$$L_v^* = \begin{cases} H_{\text{ur}}^1(k_v, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) & (v \in P \setminus P_\infty) \\ 0 & (v \in P_\infty) \end{cases}$$

なので, 命題 4.4 の証明の等号 (U) を用いると

$$H_{\mathcal{L}^*}^1(k, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{\chi \in \text{Hom}_{\text{cont}}(G_{P_\infty}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \mid \forall v \in P_{\mathbb{R}}, \chi|_{G_v} = 0\}$$

である. 不分岐類体論から, この群の位数は k のイデアル類群 $\mathcal{C}\ell$ を用いて $\#(\mathcal{C}\ell/p)$ と表される. 一方, k の整数環を \mathfrak{o}_k と表すと, 完全系列

$$1 \longrightarrow \mathfrak{o}_k^\times \longrightarrow k^\times \xrightarrow{\text{ord}} \bigoplus_{v \in P \setminus P_\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}\ell \longrightarrow 0$$

と同型 $H^1(k, \mu_p) \cong k^\times / (k^\times)^p$, $H^1(k_v, \mu_p) / L_v \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($v \in P \setminus P_\infty$) から

$$\#(H_{\mathcal{L}^*}^1(k, \mu_p)) = \#(\mathfrak{o}_k^\times / (\mathfrak{o}_k^\times)^p) \cdot \#(\mathcal{C}\ell[p])$$

である ($\mathcal{C}\ell[p]$ は $\mathcal{C}\ell$ の位数 p の元のなす部分群). $\mathcal{C}\ell$ の有限性から $\#(\mathcal{C}\ell/p) = \#(\mathcal{C}\ell[p])$ なので, 以上の事実と定理 4.5 は

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{o}_k^\times / (\mathfrak{o}_k^\times)^p) = \dim_{\mathbb{F}_p}(H^0(k, \mu_p)) - 1 + [k : \mathbb{Q}] - \#(P_{\mathbb{C}})$$

を導く (拡大次数 $[k : \mathbb{Q}]$ は素点 $v|p$ の局所項の寄与). 最後の $[k : \mathbb{Q}] - \#(P_{\mathbb{C}})$ は $\#(P_\infty)$ に等しいので, この等号は $\text{rank}(\mathfrak{o}_k^\times) = \#(P_\infty) - 1$ (Dirichlet の単数定理の階数の表示の部分) を示唆していることがわかる.

補足 4.8 G_k の p 進表現 V に対して, Bloch と Kato は ‘finite part’ という $H^1(k, V)$ の部分空間を定義した. これは上述の Selmer 群の係数を p 進表現の場合に拡張したものであり, p 進 Hodge 理論を用いた重要な不変量である. 興味のある読者は [BK] §5 を参照して頂きたい. また多様体のエタールコホモロジーを係数としたガロアコホモロジーの扱いに関する基本的な文献として Jannsen の論文 [J] を挙げておく.

A 有限巡回群の群コホモロジー

有限体や実数体のガロアコホモロジーの計算は, 実質的には有限巡回群の群コホモロジーの計算である. ここでは本文の補足として有限巡回群の群コホモロジーの基本的な計算方法を記しておく.

G を有限巡回群とし, M を G 加群とする. M の算法を便宜上加法で表す. M の自己準同型写像 ν を

$$\nu : M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto \sum_{g \in G} g \cdot x$$

と定義する. $\mathbb{Z}[G]$ を G 上の整群環とし, 準同型写像 (augmentation)

$$\epsilon : \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を $[g] \mapsto 1 (g \in G)$ と定める. G の生成元 γ を 1 つ固定すると, $\mathbb{Z}[G]$ 加群の完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-\gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-\gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

が得られる. ただし ν は上記の $\nu: M \rightarrow M$ の定義を $M = \mathbb{Z}[G]$ の場合に適用したものである. この事実と群コホモロジーの一般的な事実 ($H^i(G, M) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$) から, 任意の G 加群 M に対して次の同型が成り立つ:

$$H^i(G, M) \cong \begin{cases} M^G = \text{Ker}(1 - \gamma : M \rightarrow M) & (i = 0) \\ \text{Ker}(\nu : M \rightarrow M) / \text{Im}(1 - \gamma : M \rightarrow M) & (i \text{ が奇数}) \\ \text{Ker}(1 - \gamma : M \rightarrow M) / \text{Im}(\nu : M \rightarrow M) & (i \text{ が正の偶数}). \end{cases}$$

ただし $i > 0$ での同型は G の生成元 γ に依存している (すなわち $\#(G) \geq 3$ ならば標準的ではない) ことに注意しよう.

例 A.1 (1) G の生成元 γ を固定するとき準同型写像 $C^1(G, M) \rightarrow M, f \mapsto f(\gamma)$ は次の同型をひき起こす:

$$H^1(G, M) \cong \text{Ker}(\nu : M \rightarrow M) / \text{Im}(1 - \gamma : M \rightarrow M).$$

(2) $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のとき

$$H^i(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & (i = 0) \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & (i \text{ が奇数}) \\ 0 & (i \text{ が正の偶数}). \end{cases}$$

(3) $G = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ のとき

$$H^i(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times) = H^i(G, \mathbb{C}^\times) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^\times & (i = 0) \\ \{1\} & (i \text{ が奇数}) \\ \{\pm 1\} & (i \text{ が正の偶数}). \end{cases}$$

(4) $G = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ のとき, 有限 G 加群 M に対して $M^* := \text{Hom}(M, \mathbb{C}^\times)$ とおくと, コホモロジーのカップ積と (3) の同型による標準的な双加法的写像

$$H^1(\mathbb{R}, M) \times H^1(\mathbb{R}, M^*) \xrightarrow{\cup} H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times) \cong \{\pm 1\}$$

は有限アーベル 2 群の非退化対である.

(5) 一般の有限群 G に対して修正コホモロジー $\widehat{H}^0(G, M)$ を

$$\widehat{H}^0(G, M) := H^0(G, M) / \text{Im}(\nu : M \rightarrow M)$$

と定義する. (4) の状況では次の有限アーベル 2 群の非退化対が得られる:

$$\widehat{H}^0(\mathbb{R}, M) \times H^2(\mathbb{R}, M^*) \xrightarrow{\cup} H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times) \cong \{\pm 1\}.$$

この双対性から次の等号が成立する:

$$\#(\widehat{H}^0(\mathbb{R}, M)) = \#(H^2(\mathbb{R}, M^*)) = \#(\widehat{H}^0(\mathbb{R}, M^*)).$$

また次のような等号も成立する ([NSW] (7.3.5) の証明を参照):

$$\#(H^0(\mathbb{R}, M)) \cdot \#(H^0(\mathbb{R}, M^*)) = \#(M) \cdot \#(\widehat{H}^0(\mathbb{R}, M)).$$

B いくつかの補足

B.1 補題 1.11 の証明

(1) の証明. 集合 A, B に対し, A から B への写像全体の集合を $\text{Map}(A, B)$ と表す. 写像 $(f : z \mapsto f_z) \in \text{Map}(Z, \text{Map}(X, Y))$ を写像

$$\varphi_f : Z \times X \longrightarrow Y, \quad (z, x) \mapsto f_z(x)$$

にうつす双射

$$\text{Map}(Z, \text{Map}(X, Y)) \cong \text{Map}(Z \times X, Y)$$

を考える. 対応 $f \mapsto \varphi_f$ の逆対応は写像 $\varphi : Z \times X \rightarrow Y$ を次の写像にうつす:

$$f_\varphi : Z \longrightarrow \text{Map}(X, Y), \quad z \mapsto (f_{\varphi, z} : x \mapsto \varphi(z, x)).$$

さて, 上記の双射において左辺の部分集合 $\text{Map}_{\text{cont}}(Z, \text{Map}_{\text{cont}}(X, Y))$ が右辺の部分集合 $\text{Map}_{\text{cont}}(Z \times X, Y)$ に対応することを示す. 写像 $f \in \text{Map}_{\text{cont}}(Z, \text{Map}_{\text{cont}}(X, Y))$ に対して φ_f が連続写像であることは容易である (ここでは X のコンパクト性を必要としない). 逆に $\varphi : Z \times X \rightarrow Y$ を連続写像とし, 写像 $f_\varphi : Z \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ を考える. φ の連続性により, 各 $z \in Z$ に対して $f_{\varphi, z} : X \rightarrow Y$ は連続である. すなわち写像 f_φ は $\text{Map}_{\text{cont}}(X, Y)$ に値をもつ. 次に f_φ の連続性を証明する. 連続写像 $\gamma : X \rightarrow Y$ に対し,

$$f_\varphi^{-1}(\gamma) = \{z \in Z \mid f_{\varphi, z} = \gamma\}$$

が Z の開集合であることを示そう. 任意の点 $z_0 \in f_\varphi^{-1}(\gamma)$ に対し, z_0 の開近傍 V で,

$$z \in V \implies \varphi(z, x) = \gamma(x) \quad (\forall x \in X) \tag{B.1}$$

となるものを見つければよい. 仮定から X はコンパクト, かつ Y は離散的だから γ は局所定値写像である. すなわち X の有限個の開集合 U_1, U_2, \dots, U_r を適当に選べば,

$$X = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \dots \sqcup U_r \quad (\text{集合の直和}), \quad \gamma(U_i) = \{y_i\} \quad (\text{定値})$$

となる. そこで, 各 $i = 1, 2, \dots, r$ に対して, z_0 の開近傍 $V_i \subset Z$ で,

$$\varphi(V_i \times U_i) = \{y_i\} \quad (\text{B.2})$$

となるもの構成しよう (このような V_i が得られれば, $V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_r$ は上記の性質 (B.1) をみたす z_0 の開近傍である). まず, $\varphi^{-1}(y_i)$ は $Z \times X$ の開集合であり, $\{z_0\} \times U_i$ を含むことに注意しておく. 各点 $x \in U_i$ に対し, z_0 の開近傍 $I_x \subset Z$ と x の開近傍 $J_x \subset U_i$ で, $I_x \times J_x \subset \varphi^{-1}(y_i)$ なるものをとる. $\{J_x\}_{x \in U_i}$ はコンパクト集合 U_i の開被覆だから, 有限個の点 $x_1, x_2, \dots, x_n \in U_i$ を適当に選ぶことで $\{J_{x_j}\}_{j=1}^n$ を U_i の開被覆とすることができる. よって

$$V_i = I_{x_1} \cap I_{x_2} \cap \dots \cap I_{x_n}$$

とおけば, V_i は上記の性質 (B.2) をみたす z_0 の開近傍である.

(2) の証明. $f \in \text{Map}_{\text{cont}}(G, Y)$ を任意の元とし, 固定化群 $G_f = \{g \in G \mid g \cdot f = f\}$ が G の開集合であることを示す (命題 1.4 参照). G はコンパクトであり, Y は離散的だから, 連続写像 $f : G \rightarrow Y$ は局所定値写像である. 特に G の開正規部分群 N を適当に選ぶことにより, f は自然な射影 $G \rightarrow G/N$ を経由する. G/N の完全代表系 $\{x_i\}_{i=1}^r \subset G$ を 1 つ固定し, 各 $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ に対して

$$\begin{aligned} y_i &:= f(x_i) \in Y, & U_i &:= x_i N, & V_i &:= \{g \in G \mid \forall x \in U_i, (g \cdot f)(x) = y_i\}, \\ A_{ij} &:= \{g \in G \mid \forall x \in U_i, xg \in U_j\} = \{g \in G \mid x_i g N = U_j\} = x_i^{-1} x_j N, \\ B_{ij} &:= \{g \in G \mid g \cdot y_j = y_i\} \end{aligned}$$

とおく. U_i, A_{ij}, B_{ij} はいずれも G の開集合である. 定義により

$$V_i = \bigcup_{j=1}^r (A_{ij} \cap B_{ij})$$

であるから, V_i も G の開集合である. さらに $G_f = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_r$ だから, G_f も G の開集合である.

B.2 誘導加群についての補足

G をコンパクト群とし, H をその閉部分群とする. 離散的 G 加群 M に対し, 誘導加群を次のように定義した (§2.b 参照):

$$\text{Ind}_G^H(M) = \{f \in \text{Map}_{\text{cont}}(G, M) \mid \forall h \in H, \forall x \in G, f(hx) = h \cdot f(x)\}.$$

G の左作用の定義は $(g \cdot f)(x) := f(xg)$ ($x, g \in G, f \in \text{Ind}_G^H(M)$) であった. Ind_G^H は圏 $\mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ から $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ への加法的共変関手である. 一方で, 圏 $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ から $\mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ への自然な関手として制限関手 (G の作用を H に制限する関手) がある. これを $\text{Res}_H^G : \mathcal{M}_G^{\text{disc}} \rightarrow \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ と表す. 関手 Res_H^G と Ind_G^H の関係は次の通りである.

定理 B.1 H を G の閉部分群とする. このとき

- (1) $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ と $M' \in \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ に対し, アーベル群の自然な同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}_H^{\text{disc}}}(\text{Res}_H^G(M), M') \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}_G^{\text{disc}}}(M, \text{Ind}_G^H(M'))$$

が成り立つ. 特に Res_H^G は Ind_G^H に左随伴である.

- (2) Ind_G^H は $\mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ の入射的对象を $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ の入射的对象にうつす.
(3) $\text{Ind}_G^H \circ \text{Res}_H^G : \mathcal{M}_G^{\text{disc}} \rightarrow \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ は完全関手である.

証明の概略. $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に対して自然な G 準同型

$$\iota : M \longrightarrow \text{Ind}_G^H(M), \quad m \mapsto (\iota_m : x \in G \mapsto x \cdot m \in M) \quad (\text{B.3})$$

がある. (1) の主張の同型は H 準同型 $\varphi : \text{Res}_H^G(M) \rightarrow M'$ を合成写像

$$M \xrightarrow{\iota} \text{Ind}_G^H(M) = \text{Ind}_G^H(\text{Res}_H^G(M)) \xrightarrow{\text{Ind}(\varphi)} \text{Ind}_G^H(M')$$

にうつすことで得られる. 逆写像は自然な H 準同型

$$\epsilon : \text{Ind}_G^H(M') \longrightarrow M', \quad f \mapsto f(e) \quad (e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

を用いて構成できる. (2) は (1) と補題 1.10, および Res_H^G の完全性から従う. (3) は, $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に対してアーベル群の自然な同型

$$\text{Ind}_G^H(M) \cong \text{Map}_{\text{cont}}(G/H, M), \quad f \mapsto (\lambda_f : xH \mapsto x \cdot f(x^{-1}))$$

が成り立つという事実から従う. □

補足 B.2 H' を H の閉部分群とする. 定理 B.1 (1) により, $\text{Ind}_G^{H'}$ と $\text{Ind}_G^H \circ \text{Ind}_H^{H'}$ はどちらも制限関手 $\mathcal{M}_G^{\text{disc}} \rightarrow \mathcal{M}_{H'}^{\text{disc}}$ の右随伴関手だから, 自然同値 $\text{Ind}_G^{H'} \cong \text{Ind}_G^H \circ \text{Ind}_H^{H'}$ が成り立つ. 特に任意の $M \in \mathcal{M}_{H'}^{\text{disc}}$ に対して離散的 G 加群の標準同型

$$\text{Ind}_G^{H'}(M) \cong \text{Ind}_G^H(\text{Ind}_H^{H'}(M))$$

が成り立つ. この同型は次のように表すことができる. $\varphi \in \text{Ind}_G^{H'}(M)$ に対して写像

$$f_\varphi : G \longrightarrow \text{Map}_{\text{cont}}(H, M), \quad x \mapsto (f_{\varphi, x} : h \mapsto \varphi(hx)) \quad (x \in G, h \in H)$$

を考える. 各 $x \in G$ に対し $f_{\varphi, x} : H \rightarrow M$ が連続であること, および f_φ が連続であることは補題 1.11 (1) と同様である. また各 $x \in G$ に対して $f_{\varphi, x} \in \text{Ind}_H^{H'}(M)$ であること, および $f_\varphi \in \text{Ind}_G^H(\text{Ind}_H^{H'}(M))$ あることも容易にわかる. 上記の同型は対応 $\varphi \mapsto f_\varphi$ である.

以下ではさらに, H は G の開部分群 (すなわち指数有限) であると仮定する. G を右 H 集合とみなすことにより, $\mathbb{Z}[G]$ を右 $\mathbb{Z}[H]$ 加群とみなす. 左 H 加群 M に対し, 左 G 加群 $\text{ind}_G^H(M)$ を

$$\text{ind}_G^H(M) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

と定める. ただし G の左作用は $\mathbb{Z}[G]$ への自然な左作用がひき起こすもの, すなわち $g \in G$ と $[x] \otimes m \in \text{ind}_G^H(M)$ ($x \in G, m \in M$) に対して

$$g \cdot ([x] \otimes m) := [gx] \otimes m$$

と定める. さて M が離散的 H 加群であるとき, $\text{ind}_G^H(M)$ に離散位相を与えると, H が G の開部分群という仮定から離散的 G 加群になる. 関手 $\text{ind}_G^H : \mathcal{M}_H^{\text{disc}} \rightarrow \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ の性質は次の通りである.

定理 B.3 H を G の開部分群とする. このとき

- (1) $\text{ind}_G^H : \mathcal{M}_H^{\text{disc}} \rightarrow \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ は完全関手である.
- (2) $M \in \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ と $M' \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に対し, アーベル群の自然な同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}_G^{\text{disc}}}(\text{ind}_G^H(M), M') \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}_H^{\text{disc}}}(M, \text{Res}_H^G(M'))$$

が成り立つ. 特に ind_G^H は Res_H^G に左随伴である.

- (3) Res_H^G は $\mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ の入射的对象を $\mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ の入射的对象にうつす.

証明の概略. (1) は $\mathbb{Z}[G]$ が自由 $\mathbb{Z}[H]$ 加群であることによる. 次に $M \in \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ に対し, 自然な H 準同型

$$\alpha : M \rightarrow \text{ind}_G^H(M), \quad m \mapsto [e] \otimes m \quad (e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

がある. (2) の主張の同型は G 準同型 $\varphi : \text{ind}_G^H(M) \rightarrow M'$ を合成写像

$$M \xrightarrow{\alpha} \text{ind}_G^H(M) = \text{Res}_H^G(\text{ind}_G^H(M)) \xrightarrow{\text{Res}_H^G(\varphi)} \text{Res}_H^G(M')$$

にうつす写像である. 逆写像は自然な G 準同型

$$\beta : \text{ind}_G^H(M') \rightarrow M', \quad [g] \otimes m \mapsto g \cdot m \quad (g \in G, m \in M')$$

を用いて構成できる. (3) は (1), (2) と補題 1.10 から従う. □

関手 $\text{ind}_G^H : \mathcal{M}_H^{\text{disc}} \rightarrow \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ と $\text{Ind}_G^H : \mathcal{M}_H^{\text{disc}} \rightarrow \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ の関係は次の通りである.

定理 B.4 H を G の開部分群とする. このとき自然同値 $\text{Ind}_G^H \cong \text{ind}_G^H$ が成り立つ. 特に任意の $M \in \mathcal{M}_H^{\text{disc}}$ に対して次の標準的 G 同型が成り立つ:

$$\text{Ind}_G^H(M) \cong \text{ind}_G^H(M).$$

証明の概略. $\Lambda \subset G$ を左剰余集合 G/H の完全代表系とし, $f \in \text{Ind}_G^H(M)$ に対して

$$\theta_M(f) := \sum_{x \in \Lambda} [x] \otimes f(x^{-1}) \in \text{ind}_G^H(M)$$

とおく. 完全代表系 Λ の有限性から $\theta_M(f)$ は有限和である. また $f(hx) = h \cdot f(x)$ ($x \in G, h \in H$) であるから, $\theta_M(f)$ は Λ のとり方によらない. こうして得られた写像

$$\theta_M : \text{Ind}_G^H(M) \rightarrow \text{ind}_G^H(M), \quad f \mapsto \theta_M(f)$$

が G 加群の準同型であること, および逆写像をもつことは, 直接計算で容易にわかる. また対応 $M \mapsto \theta_M$ が Ind_G^H から ind_G^H への自然同値を与えることも容易に確かめられる. □

定理 B.3 (2) と定理 B.4 から, Ind_G^H は Res_H^G に左随伴である. 特に $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に対し,

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}_G^{\text{disc}}}(\text{Ind}_G^H(\text{Res}_H^G(M)), M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}_H^{\text{disc}}}(\text{Res}_H^G(M), \text{Res}_H^G(M))$$

が成り立つ. 右辺の元 $\text{id} : \text{Res}_H^G(M) \rightarrow \text{Res}_H^G(M)$ に対応する左辺の元

$$\text{Tr} : \text{Ind}_G^H(M) = \text{Ind}_G^H(\text{Res}_H^G(M)) \longrightarrow M \quad (G \text{ 準同型}) \quad (\text{B.4})$$

をトレース写像とよぶ. 左剰余集合 G/H の完全代表系 $A \subset G$ を用いると

$$\text{Tr}(f) = \sum_{x \in A} x \cdot f(x^{-1}) \quad (f \in \text{Ind}_G^H(M))$$

であることが容易に確かめられる.

B.3 余制限写像についての補足

G を副有限群とし, $H \subset G$ を開部分群とする. $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ の場合に, §2.a(6) の余制限写像

$$\begin{aligned} \text{Cor} : H^i(H, M) &\longrightarrow H^i(G, M) \\ (\text{Cor } f)(g_1, \dots, g_i) &:= \sum_{r \in R} r^{-1} \cdot f(r g_1 [r g_1]^{-1}, \dots, [r g_1 \dots g_{i-1}] g_i [r g_1 \dots g_i]^{-1}) \end{aligned}$$

が右剰余集合 $H \backslash G$ の完全代表系 R によらないことを証明しよう. $H^i(H, M)$ は, §B.2 の制限関手 Res_H^G を用いると, 厳密には $H^i(H, \text{Res}_H^G(M))$ であることに注意しておく. §2.a(6) において述べたように, 上記のコチェインの対応はコチェイン複体の準同型射

$$\text{Cor} : C^*(H, \text{Res}_H^G(M)) \longrightarrow C^*(G, M)$$

をひき起こす. この準同型射は M について関手的である, すなわち δ 関手の自然変換

$$\text{Cor} : H^*(H, \text{Res}_H^G(-)) \longrightarrow H^*(G, -) \quad (\text{B.5})$$

を与える. 定理 B.3 (3) と命題 2.3 から $H^*(H, \text{Res}_H^G(-))$ は普遍的 δ 関手である (§2.a(3) の証明を参照). したがって (B.5) は 0 次の成分 $\text{Cor} : (-)^H \rightarrow (-)^G$ で決まるが, 明らかにこれは完全代表系 R によらない. ゆえに (B.5) も R によらない. \square

定理 B.5 $M \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ に対して次が成り立つ.

(1) 次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccccc} H^i(G, M) & \xrightarrow{\text{Res}} & H^i(H, M) & \xrightarrow{\text{Cor}} & H^i(G, M) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ H^i(G, M) & \xrightarrow{\iota} & H^i(G, \text{Ind}_G^H(M)) & \xrightarrow{\text{Tr}} & H^i(G, M) \end{array}$$

ただし中央の縦の同型は Shapiro の補題 (命題 2.3) による標準同型を表し, ι と Tr はそれぞれ G 準同型 (B.3) と (B.4) がひき起こす写像を表す.

(2) $\text{Cor} \circ \text{Res} : H^i(G, M) \rightarrow H^i(G, M)$ は $(G:H)$ 倍写像である.

証明の概略. (2) は (1) から従う. (1) は上で述べた「 Cor が R によらないことの証明」と同様の議論により $i = 0$ の場合に帰着される. $i = 0$ の場合は直接計算で容易にわかる. \square

離散的 G 加群の双加法的写像 $\mu : M \times M' \rightarrow M''$ に対し, 次の離散的 G 加群の図式が可換である:

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}_G^H(M) \times M' & \xrightarrow{\text{id} \times \iota} & \text{Ind}_G^H(M) \times \text{Ind}_G^H(M') \xrightarrow{\mu'} \text{Ind}_G^H(M'') \\ \text{Tr} \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{Tr} \\ M \times M' & \xrightarrow{\mu} & M'' \end{array}$$

ただし右上の μ' は $f \in \text{Ind}_G^H(M)$, $f' \in \text{Ind}_G^H(M')$ に対して連続写像

$$\mu'(f, f') : G \rightarrow M'', \quad x \mapsto \mu(f(x), f'(x))$$

を対応させる双加法的写像を表す. $M, M', M'' \in \mathcal{M}_G^{\text{disc}}$ の場合, §2.a(7) の射影公式はこの図式の可換性と定理 B.5(1) から従う.

補足 B.6 M などが一般の (離散的とは限らない) 位相的 G 加群の場合, §2.a(6) の余制限写像が R によらないこと, および §2.a(7) の射影公式を証明するには, 上で述べた議論とは全く種類の異なる議論が必要である. ここではヒントとして, $i = 0, 1$ の場合に余制限写像

$$\text{Cor} : H^i(H, M) \rightarrow H^i(G, M)$$

が R によらないことの証明を与える. 一般にアーベル群のコチェイン複体 (A^*, d_A) から (B^*, d_B) への 2 つの準同型射 $\xi^*, \eta^* : A^* \rightarrow B^*$ に対し,

$$\xi^j - \eta^j = k^j \circ d_A + d_B \circ k^{j-1} \quad (\forall j)$$

をみたす準同型 $k^j : A^{j+1} \rightarrow B^j$ の族 $(k^j)_j$ を ξ^* から η^* へのホモトピーとよぶ. このような k^j が $j = i-1, i$ で存在すれば, ξ^* と η^* がひき起こすコホモロジーの準同型 $H^i(A^*) \rightarrow H^i(B^*)$ は一致する. したがって, コホモロジーの余制限写像が R によらないことを示すには, $H \setminus G$ のもう一つの完全代表系 R' を考えて, 2 つの準同型射

$$\xi^* = R \text{ を用いて構成した準同型射 } \text{Cor} : C^*(H, M) \rightarrow C^*(G, M),$$

$$\eta^* = R' \text{ を用いて構成した準同型射 } \text{Cor} : C^*(H, M) \rightarrow C^*(G, M)$$

の間のホモトピー $(k^j)_j$ を構成すればよい. 以下では k^0 と k^1 の定義を述べておく. G の元 g に対し, R に属する Hg の代表元を $[g]$ と表し, R' に属する Hg の代表元を $\langle g \rangle$ と表す. このとき,

$$k^0 : C^1(H, M) \rightarrow C^0(G, M), \quad f \mapsto \sum_{r \in R'} r^{-1} \cdot f(r[r]^{-1})$$

$$k^1 : C^2(H, M) \rightarrow C^1(G, M),$$

$$(k_1(f))(g) := \sum_{r \in R'} r^{-1} \cdot \{f(r[r]^{-1}, [r]g[r]^{-1}) - f(rg\langle rg \rangle^{-1}, \langle rg \rangle[r]^{-1})\}$$

と定義すれば,

$$\xi^0 - \eta^0 = k^0 \circ d, \quad \xi^1 - \eta^1 = k^1 \circ d + d \circ k^0$$

であることがわかる. 特に次数 1 以下のコホモロジーの余制限写像は R によらない.

B.4 射影系についての補足

$(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をアーベル群の射影系とする. $(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ から $(B_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ への準同型とは, アーベル群の準同型 $\varphi_n : A_n \rightarrow B_n$ ($n \in \mathbb{N}$) の族 $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で, $t_n \circ \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ t_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) をみたすものをいう. アーベル群の射影系と準同型の系列

$$(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(\varphi_n)_n} (B_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(\psi_n)_n} (C_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

が完全であるとは, 各 $n \in \mathbb{N}$ について系列 $A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n$ が完全であることをいう. ここで次の基本的な事実を復習しておく.

定理 B.7 (1) Mittag-Leffler 条件をみたす集合の射影系 $(X_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ において, 各 X_n は空でないと仮定する. このとき射影的極限 $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ は空でない.

(2) $0 \rightarrow (A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(\varphi_n)_n} (B_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(\psi_n)_n} (C_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ をアーベル群の射影系の短完全系列とする. $(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件をみたすならば, 系列

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \xrightarrow{\varprojlim \varphi_n} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} B_n \xrightarrow{\varprojlim \psi_n} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_n \longrightarrow 0$$

は完全系列である.

証明の概略. $(X_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を集合 (あるいはアーベル群) の射影系とすると, 合成写像

$$X_i \xrightarrow{t_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{t_{i-2}} \cdots \xrightarrow{t_n} X_n$$

を $t_{i,n}$ と表す.

(1) $n \in \mathbb{N}$ とする. 仮定から, 十分大きな任意の ν に対し $\text{Im}(t_{\nu,n} : X_\nu \rightarrow X_n)$ は一定である. これを Y_n とおき, 射影系 $(Y_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える. ただし $\tau_n : Y_{n+1} \rightarrow Y_n$ は $t_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ がひき起こす写像を表す. 各 τ_n は全射だから, 選択公理により射影的極限 $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ は空でない. よって $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ も空でない.

(2) $\varprojlim \psi_n$ の全射性以外は容易なので省略する. $\varprojlim \psi_n$ の全射性を示す. $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_n$ の元 $c = (c_n)_n$ を任意に与え, $X_n := \psi_n^{-1}(c_n)$ とおく. 準同型 $t_n : B_{n+1} \rightarrow B_n$ は写像 $t_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ をひき起こすので, 集合の射影系 $(X_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が得られる. もし $(X_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件をみたすならば, (1) によって射影的極限 $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ は空でないから, その元 b をとれば $(\varprojlim \psi_n)(b) = c$ となり, $\varprojlim \psi_n$ は全射である.

以下では $(X_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が Mittag-Leffler 条件をみたすことを示す. 自然数 n を任意に固定し, $\nu \geq n'$ ならば $\text{Im}(t_{\nu,n} : A_\nu \rightarrow A_n) = \text{Im}(t_{n',n} : A_{n'} \rightarrow A_n)$ となるような $n' \geq n$ をとる. 任意の $\nu \geq n'$ に対し

$$\text{Im}(t_{\nu,n} : X_\nu \rightarrow X_n) = \text{Im}(t_{n',n} : X_{n'} \rightarrow X_n) \quad (\text{B.6})$$

であることを示せばよい. ‘ \subset ’ は自明なので ‘ \supset ’ を示す. (B.6) の右辺の元 x を任意に与え, $t_{n',n}(y) = x$ なる $y \in X_{n'}$ を 1 つ固定する. $z \in X_\nu$ を任意の元とし, $y' := t_{\nu,n'}(z)$ とおくと, $\psi_{n'}(y - y') = c_{n'} - c_{n'} = 0$ だから $\varphi_{n'}(a) = y - y'$ なる $a \in A_{n'}$ がある. n' のとり方から $t_{n',n}(a) = t_{\nu,n}(b)$ なる $b \in A_\nu$ が存在する. そこで $z' := z + \varphi_\nu(b) \in X_\nu$ とおけば,

$$t_{\nu,n}(z') = t_{\nu,n}(z) + t_{\nu,n}(\varphi_\nu(b)) = t_{n',n}(y') + t_{n',n}(\varphi_{n'}(a)) = t_{n',n}(y) = x$$

となる. ゆえに (B.6) の左辺は右辺を含む. \square

次の事実は本文で用いた.

定理 B.8 Mittag-Leffler 条件をみたす集合の射影系 $(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を考える.

(1) $(A_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がアーベル群の射影系ならば, 準同型写像

$$\text{id} - \prod_{n \in \mathbb{N}} t_n : \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

は全射である.

(2) 各 A_n に離散位相を与えて位相空間とみなす. このとき任意の位相空間 X に対し, 集合の射影系 $(\text{Map}_{\text{cont}}(X, A_n), \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は Mittag-Leffler 条件をみたす. ただし

$$\tau_n : \text{Map}_{\text{cont}}(X, A_{n+1}) \rightarrow \text{Map}_{\text{cont}}(X, A_n)$$

は $t_n : A_{n+1} \rightarrow A_n$ がひき起こす写像を表す.

証明. (1) 各 $n \geq 1$ に対し $P_n := \prod_{i=1}^n A_i$ とおき, 自然な射影 $\pi_n : P_{n+1} \rightarrow P_n$ によって射影系とみなす. このとき次の短完全系列がある:

$$0 \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{t_n} P_{n+1} \xrightarrow{\theta_n} P_n \longrightarrow 0$$

ただし θ_n は $(a_i)_{i=1}^{n+1} \in P_{n+1}$ を $(a_i - t_i(a_{i+1}))_{i=1}^n$ にうつす写像を表し, t_n は $a \in A_{n+1}$ を $(t_{n+1,i}(a))_{i=1}^{n+1}$ にうつす写像を表す. $t_{n+1,i} : A_{n+1} \rightarrow A_i$ は定理 B.7 の証明と同様に定めた. さて, t_n と θ_n は t_n, π_n などと可換だから, 上記の短完全系列は射影系の短完全系列とみなせる. よって (A_n, t_n) が Mittag-Leffler 条件をみたすという仮定により

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \theta_n : \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} P_n \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

は全射である (定理 B.7 (2)). 主張はこの全射性に他ならない.

(2) 簡単のため $Y_i := \text{Map}_{\text{cont}}(X, A_i)$ とおく. n を任意の自然数とし, $\nu \geq n'$ ならば $\text{Im}(t_{\nu,n} : A_\nu \rightarrow A_n) = \text{Im}(t_{n',n} : A_{n'} \rightarrow A_n)$ となるような $n' \geq n$ をとる. 任意の $\nu \geq n'$ に対して

$$\text{Im}(\tau_{\nu,n} : Y_\nu \rightarrow Y_n) = \text{Im}(\tau_{n',n} : Y_{n'} \rightarrow Y_n) \quad (\text{B.7})$$

を示せばよい. ‘ \subset ’ は自明なので ‘ \supset ’ を示す. 右辺に属する連続写像 $f : X \rightarrow A_n$ を任意に与える. $B := \text{Im}(t_{n',n} : A_{n'} \rightarrow A_n)$ とおき, $t_{\nu,n} : A_\nu \rightarrow A_n$ がひき起こす全射 $A_\nu \rightarrow B$ の切断 $s : B \rightarrow A_\nu$ を 1 つ固定する. f の像が B に含まれることに注意して, 合成写像

$$g : X \xrightarrow{f} B \xrightarrow{s} A_\nu$$

を考える. f と s の連続性から g は連続 (すなわち $g \in Y_\nu$) であり, $\tau_{\nu,n}(g) = f$ である. よって (B.7) の左辺は右辺を含む. \square

参考文献

- [BK] Bloch, S., Kato, K.: *L*-functions and Tamagawa numbers of motives. In: Cartier, P., Illusie, L., Katz, N. M., Laumon, G., Manin, Yu. I., Ribet, K. A. (eds.) *The Grothendieck Festschrift I*, (Progr. Math. 86), pp. 333–400, Birkhäuser, Boston, 1990
- [J] Jannsen, U.: On the ℓ -adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology. In: Ihara, Y., Ribet, K. A., Serre, J.-P. (eds.) *Galois Group over \mathbb{Q}* , pp. 315–360, Springer, Berlin, 1989
- [河] 河田敬義: ホモロジー代数. (岩波基礎数学選書), 岩波書店, 1990年
- [藤] 藤崎源二郎: 体とガロア理論. (岩波基礎数学選書), 岩波書店, 1991年
- [NSW] Neukirch, J., Schmidt, A., Wingberg, K.: *Cohomology of Number Fields*. 2nd ed., (Grundlehren Math. Wiss. 323), Springer, Berlin, 2008
- [R] Rubin, K.: Tate-Shafarevich groups and *L*-functions of elliptic curves with complex multiplication. *Invent. Math.* **89**, 527–560 (1987)
- [斎] 斎藤秀司: 整数論. (共立講座 21 世紀の数学 20), 共立出版, 1997年
- [斎佐] 斎藤秀司, 佐藤周友: 代数的サイクルとエタールコホモロジー. (シュプリンガー現代数学シリーズ 17), 丸善出版, 2012年
- [S] Serre, J.-P.: *Cohomologie Galoisienne*. 5^e éd., (Lecture Notes in Math. 5), Springer, Berlin, 1992
- [T1] Tate, J.: Duality theorems in Galois cohomology over number fields. In: *Proc. Internat. Congr. Mathematicians, Stockholm, 1962*, pp. 234–241, Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963
- [T2] Tate, J.: Relation between K_2 and Galois cohomology. *Invent. Math.* **36**, 257–274 (1976)
- [辰] 辰馬伸彦: 位相群の帰納的極限の群位相. *数学* **50**, 428–431 (1998)
- [W] Wiles, A.: Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem. *Ann. of Math.* **142**, 443–551 (1995)

最後に

本文を書く機会を与えて下さったオーガナイザーの方々にお礼申し上げます。三氏には本文の定理 2.7 の仮定 (*) の必要性について検証している際にも多くの示唆を頂きました。また、修正版の原稿を注意深く読んで下さった西牧優氏にも心より感謝いたします。