実効的双曲型作用素の初期値問題

西谷達雄

はじめに

V.Ivrii は 1972 年に微分作用素に対する初期値問題が任意の低階に対して C^∞ 適切であるためにはその微分作用素の主シンボル $p(x,\xi)$ の特性多様体のすべての危点で基本行列 (今日では Hamilton 行列と呼ばれることも多い)

$$\begin{pmatrix} p_{\xi x} & p_{\xi\xi} \\ -p_{xx} & -p_{x\xi} \end{pmatrix}$$

が 0 でない実の固有値の対をもつことが必要であることを速報誌 [8] に報告した．p の多重特性点は陪特性帯の方程式 (Hamilton 方程式) の特異点であり基本行列はこの特異点における Hamilton 方程式の線形化方程式の係数行列である．基本行列のスペクトル構造が微分方程式に与える影響が明瞭な形で文献に現れたのは非負シンボルをもつ擬微分作用素の下界に関する Melin の不等式がおそらく最初であり，A.Melin の論文 [24] が 1971 年に出版されたこと (この場合には基本行列は純虚固有値しか持たない)，また当時は滑らかな特性根を持つ作用素の研究が主流だったことを考えると，時代がその方向に流れ始めていたかもしれないにせよ，Ivrii の結果はいかにも先駆的であった．この結果の証明は，低階に関する必要条件に関する結果とともに，1974 年の V.Ivrii と V.M.Petkov の長編論文 [9] で与えられた．さらに Ivrii は 1975 年の論文 [10] で主シンボルが各危点の近傍で滑らかな 2 つのシンボルの積に書けるという付加条件のもとに (他の付加条件下での考察もある)，発展作用素の作用素冪を用いて作用素を通常のエネルギー法が適用できるような低階を持つ作用素に変換する，という方法でこの定理の十分性を証明しさらに付加条件なしに「任意の低階に対して初期値問題が C^∞ 適切であるためには各危点で基本行列が 0 でない実の固有値の対をもつことが必要十分である」ことを予想した．この予想が各危点で基本行列が 0 でない実の固有値の対をもつ作用素を effectively hyperbolic operator (実効的双曲型作用素) と呼ぶ由来となった．任意の低階に対して初期値問題が C^∞ 適切となる作用素 (強双曲型作用素とも呼ばれる) は狭義双曲型作用素につぐ重要な作用素でありこの予想は作用素が本質的に 2 階の作用素に帰着される場合には 1980 年代に上記の発展作用素の作用素冪を用いる方法をさらに発展させた方法，擬微分作用素の weight を利用するエネルギー法，さらには特異性の伝播の結果を用いる方法 (ただしこの方法では有限次元を除いての可解性しか得られない) で肯定的に解決された．これらの証明では擬微分作用素や Fourier 積分作用素に関する基本的な結果やその考え方を前提としており証明のために必要となる準備は少ないとはいえない．

そこで本書では 2 階実効的双曲型作用素に対象をしぼって，できるだけ少ない準備で，またそれらにはすべて証明を与えて，その初期値問題を取り扱うことを目的にした． 方法的には [33] の擬微分作用素の weight を用いたエネルギー法を利用するが異なる点の 1

つは作用素を変換する際に一般の Fourier 積分作用素を用いず，時間座標は固定した空間の局所座標系の変換 (あるコンパクト集合の外では線形変換として拡張される) のみを利用する，ということである．これによって一般の Fourier 積分作用素を作用させたときの H^s 有界性と波面集合の変換則を空間の局所座標変換をおこなった際の H^s 有界性や波面集合の変換則の考察で済ますことができる．もう 1 つの違いはエネルギー評価式を得るためにいくつかのパラメーターを含む metric に対応する擬微分作用素の Weyl-Hörmander calculus を適用することでこの方法は [33] でも素朴な形で利用したがここではその方法を整理し徹底する．具体的には擬微分作用素のシンボルを考察点の周りに局所化するとき局所化の度合いを表すパラメーターとこのパラメーターを含む metric を導入し，扱う正値なシンボルおよび非負値のシンボルを正値シンボルで近似したものがこの metric に対して admissible な weight になっている，という枠組みを構築する．この枠組みの中では局所化されたシンボルの間の関係式を対応する擬微分作用素の間の評価式として実現することができ (5.3 節) これによって擬微分作用素の計算が簡単になり，また非常に見通しよくなる．

第 1 章は，初期値問題が C^∞ で可解なら (一意性は要求しない) 特性根は実である，の証明に当てており他の章とは独立しているので第 2 章から読むこともできる．第 2 章では空間の局所座標変換に伴う波面集合のよく知られた変換則を第 6 章での目的に合わせて評価付きで示した (命題 2.3.3)．さらに本書の内容の実質的な部分である第 4 章, 5 章, 6 章だけを読むこともできる．第 4 章では基本行列が 0 でない実の固有値をもつ点の幾何的特徴づけを双曲型 2 次形式の分類にまで立ち戻ることなくより直接的に示す．この特徴づけからエネルギー評価式に用いる擬微分作用素の weight が得られる．第 5 章では上で述べたように擬微分作用素の Weyl-Hörmander calculus を用いた推論や評価を利用して局所化作用素に対する weight 付きエネルギー不等式を導くが，そこで用いる擬微分作用素の合成則，有界性および可逆性については第 7 章で詳細な証明を与えたのでつど参照してもらえればと思う．そこでは本書で扱うシンボルに合わせて admissible weight を一般の Weyl-Hörmander calculus で用いられるものに比べてより制限したものとして定義した (定義 7.1.5)．これにより本書で扱う擬微分作用素についてはその合成則の証明が少し初等的になっている．第 6 章では第 5 章の結果を基に局所化作用素の初期値問題を解きその解作用素の有限伝播性を利用して目的とする初期値問題の解の局所一意存在を示す．第 3 章では第 6 章の推論の雛形として 1 階の双曲型作用素に対する初期値問題を扱いその解作用素の有限伝播性を示した．予め第 3 章に目を通しておくことで第 6 章の推論の流れが容易に把握できると思う．

2024 年 2 月　西谷達雄

目次

第 1 章

初期値問題

初期値問題が適切であることの定義を与え，初期値問題が適切であるためには微分作用素の主シンボルの特性根が実でなければならないことを示す．この特性根が実であることの必要性は解の (一意性を要求しない) 可解性の要請のみから従う．

1.1　初期値問題の適切性

P を $\bar{x} \in \mathbb{R}^{1+d}$ の近傍で定義された C^∞ 係数の m 階の偏微分作用素，$t = t(x)$ は $\bar{x}$ の近傍で定義された滑らかな実数値関数で $t(\bar{x}) = 0$ とし，P は超曲面 $\{t(x) = 0\}$ に関して $\bar{x}$ で非特性的，すなわち $(Pt^m)(\bar{x}) \neq 0$ を満たしているとする．このとき局所座標系 $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \ldots, x_d)$ を $t(x) = x_0$, $\bar{x} = 0$ と選ぶと $(Px_0^m)(0) \neq 0$ より D_0^m の係数は $x = 0$ で零でないのでこの係数で P を割ると最初から D_0^m の係数は 1 と仮定でき

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha = D_0^m + \sum_{|\alpha| \leq m, \alpha_0 < m} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{j=0}^{m} P_j \tag{1.1.1}$$

と書ける．ここで $a_\alpha(x)$ は $x = 0$ の近傍で定義された C^∞ 関数であり，多重指数 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^{1+d}$ に対して $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_d$,

$$D^\alpha = D_0^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_d}, \quad D_j = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

とする．ここで $\mathbb{N}$ は非負整数の全体を表す．また $P_j = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x) D^\alpha$ は P の j 次斉次部分を表す．

つぎに初期値問題の適切性を扱うためにいくつかの関数空間を導入する．

定義 1.1.1. $\mathbb{R}^l$ 上の急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^l) = \mathcal{S}$ を $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^l)$ で任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^l$ に対して $\sup_{x \in \mathbb{R}^l} |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| < +\infty$ を満たすものの全体として定義する．

$u(x) \in \mathcal{S}$ に対してその Fourier 変換 $\mathcal{F}u$ を

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)dx$$

で，また $v(\xi) \in \mathcal{S}$ の Fourier 逆変換 $\bar{\mathcal{F}}v$ を

$$(\bar{\mathcal{F}}v)(x) = (2\pi)^{-l} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} v(\xi)d\xi$$

で定義する．$\int \hat{u}vdx = \int u\hat{v}dx$ $(u, v \in \mathcal{S})$ であるから $\mathcal{F}u(\phi) = u(\mathcal{F}\phi)$ $(u \in \mathcal{S}', \phi \in \mathcal{S})$ によって $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}$ の双対空間 (緩増加超関数の空間) $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l)$ へ一意に拡張される．$\bar{\mathcal{F}}$ についても同様である．このとき Fourier の反転公式より $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I$, $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = I$ が成り立つ．また $\langle x, \xi\rangle$ の代わりに $x\xi$ とも書く．以下よく使う L^2 型の Sobolev 空間を導入する (例えば [28] の第 2 章参照).

$$H^s(\mathbb{R}^l) = H^s = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^l); \langle\xi\rangle^s \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^l)\}, \quad \langle\xi\rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$$

は内積

$$(u, v)_s = (\langle D\rangle^s u, \langle D\rangle^s v) = \int \langle\xi\rangle^{2s} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi$$

で Hilbert 空間となり，そのノルムは

$$\|u\|_s^2 = \int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

で与えられる．特に $s = 0$ のときは内積やノルムを単に $(\cdot, \cdot)$ や $\|\cdot\|$ と書く．また

$$H^{-\infty} = \bigcup_s H^s, \quad H^\infty = \bigcap_s H^s$$

と表すことにする．$\Omega \subset \mathbb{R}^l$ が開集合で $s \in \mathbb{N}$ のときは

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall|\alpha| \le s\}$$

である．したがって $H^\infty(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\alpha \in \mathbb{N}^l\}$ となる．

定義 1.1.2. P に対する初期値問題が原点の近傍で x_0 方向に C^∞ 適切であるとは, ある正数 ϵ と $\mathbb{R}^{1+d}$ の原点近傍 ω があって, $x_0 < \tau$ $(|\tau| \le \epsilon)$ では 0 となる任意の $f(x) \in C_0^\infty(\omega)$ に対して $Pu = f$ を ω で満たし，$x_0 < \tau$ では 0 となる $u(x) \in H^\infty(\omega)$ がただ一つ存在することである.

定義から容易に従うことだが $u \in H^\infty(\omega)$ が $x_0 < \tau$ で 0 かつ $Pu \in C_0^\infty(\omega)$ が $x_0 < t$ $(\tau < t < \epsilon)$ で 0 ならば u は $x_0 < t$ でも 0 となる．実際，定義より $Pv = Pu$ を ω で満たし $x_0 < t$ では 0 になる $v \in H^\infty(\omega)$ が存在するが $P(u - v) = 0$ であり $u - v$ は

$x_0 < \tau$ で 0 ゆえ一意性より $u = v$ が従い u も $x_0 < t$ で 0 となる．いま $Pu = f$ とし f に $x_0 > t$ で擾乱を加えたものを g として $Pv = g$ なる v を考えると $P(u-v) = f - g$ は $x_0 < t$ で 0 なのでいま確かめたように $x_0 < t$ で $u = v$ となる．すなわち f に加えた $x_0 > t$ での擾乱は u の $x_0 < t$ での状態に影響を与えない．このように定義では，未来は過去に影響を与えない，という「因果律」が成立することを要請している．定義 1.1.2 は初期超平面の族 $x_0 = \tau$, $|\tau| < \epsilon$ に初期値を与えて，その初期値をとる解の一意存在を要請する古典的な定義と同値になる．

補題 1.1.1. P に対する初期値問題が原点の近傍で x_0 方向に C^∞ 適切であるとする．このとき任意の $f(x) \in C_0^\infty(\omega)$ および $u_j(x') \in C_0^\infty(\omega \cap \{x_0 = \tau\})$ に対して次の古典的な初期値問題

$$\begin{cases} Pu = f \quad \text{in} \quad \omega \cap \{x_0 > \tau\}, \\ D_0^j u(\tau, x') = u_j(x'), \quad j = 0, 1, \ldots, m-1 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

は一意的な解 $u \in H^\infty(\omega)$ を持つ．

証明．関係式 $Pu = f$ を x_0 で微分することによって $u_j(x')$, $j = 0, \ldots, m-1$ と f から $j = m, m+1, \ldots$ に対して $u_j(x') = D_0^j u(\tau, x')$ が求まる．Borel の 1 補題 (例えば [6] の第 I 章参照) から $\tilde{u} \in C_0^\infty(\omega)$ ですべての $j \in \mathbb{N}$ に対して $D_0^j \tilde{u}(\tau, x') = u_j(x')$ となるものが存在する．明らかに $\{x_0 = \tau\}$ 上ですべての $j \in \mathbb{N}$ に対して $D_0^j(P\tilde{u} - f) = 0$ が成立している．いま g を $x_0 > \tau$ では $g = P\tilde{u} - f$ で $x_0 < \tau$ では 0 で定義すると $g \in C_0^\infty(\omega)$ である．仮定より ω で $Pv = g$ を満たし $x_0 < \tau$ では $v = 0$ となる $v \in H^\infty(\omega)$ が存在するので

$$\begin{cases} P(\tilde{u} - v) = f \quad \text{in} \quad \omega \cap \{x_0 > \tau\}, \\ D_0^j(\tilde{u} - v) = u_j(x') \quad \text{on} \quad \omega \cap \{x_0 = \tau\} \end{cases}$$

が成立し $\tilde{u} - v \in H^\infty(\omega)$ が求める (1.1.2) の解となる． □

逆に $g \in C_0^\infty(\omega)$ は $x_0 < 0$ で $g = 0$ を満たすとして (1.1.2) で $f = 0$, $u_j(x') = 0$, $j = 0, \ldots, m-2$ および $u_{m-1}(x') = g(\tau, x')$ としたときの解 $w(x;\tau)$ をとってくる．このとき適当な $\epsilon > 0$ に対し $u(x)$ を

$$u(x) = \int_{-\epsilon}^{x_0} w(x_0, x'; \tau) d\tau$$

と定義すると $u(x)$ は $|x_0| < \epsilon$ で $Pu = g$ を満たし $x_0 < 0$ では $u = 0$ である．

初期値問題が適切であるためには，特性根がすべて実でなければならないことが，特性根が単純なときは Lax によって ([21])，一般の場合は溝畑 ([27]) によって (Lax-Mizohata の定理) 証明されている．以下，微分作用素 $P_j = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x) D^\alpha$ に対して ξ の多項式

$P_j(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=j}a_\alpha(x)\xi^\alpha$ を P_j のシンボルと呼ぶことにする．特に $P_m(x,\xi)$ を主シンボルと呼ぶ．

定理 1.1.1. P に対する初期値問題は原点の近傍で適切とする．このとき原点の近傍 Ω があって $P_m(x,\xi_0,\xi')=0$ の ξ_0 に関する根 (特性根) は任意の $x\in\Omega$ および任意の $\xi'\in\mathbb{R}^d$ に対して実である．

1.2　初期値問題の可解性

定理 1.1.1 では初期値問題の一意可解性を仮定したが可解性だけから特性根が実であることの必要性が従う．いま次の (一般化された) 初期値問題を考えてみよう．

$$\begin{cases} Pu=0, \\ D_0^j u(0,x')=0,\quad 0\le j\le \mu-1, \\ D_0^\mu u(0,x')=\phi(x). \end{cases} \tag{1.2.3}$$

ここで初期値（境界値）としては $\mu+1$ 個与えている．$\mu=m-1$ のときが通常の初期値問題である．

定理 1.2.1. 係数は原点の近傍 Ω で C^∞ とする．特性方程式 $P_m(0,\xi_0,\xi')=0$, $\xi'=(1,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^d$ は μ 個の実根と $\nu=m-\mu$ (≥ 1) 個の非実根を持つと仮定する．このとき正数列 $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して次が成立する；$\phi(x)=g(x_1)$ を原点の近傍で定義された連続関数とし一般化された初期値問題 (1.2.3) が原点のある近傍で C^m 級の解を持つとする．このとき $g(x_1)$ は原点の近くで C^∞ で

$$\limsup_{n\to\infty}\,(|g^{(n)}(0)|/C_n)^{1/n}\le 1 \tag{1.2.4}$$

が成立する．ここで $g^{(n)}(0)=(d^n g/dx_1^n)(0)$ である．

証明. この結果は本書のテーマではないのでここでは証明の概略のみ述べる．まず ${}^tPu=\sum_{|\alpha|\le m}(-D)^\alpha(a_\alpha u)=\sum_{|\alpha|\le m}\tilde a_\alpha(x)D^\alpha u$ で P の転置作用素 ${}^tP$ を定義する．また $\tilde P_j=\sum_{|\alpha|=j}\tilde a_\alpha(x)D^\alpha$ を ${}^tP$ の j 次斉次部分とし $\tilde P_j(x,\xi)$ をそのシンボルとすると $\tilde P_m(x,\xi)=(-1)^m P_m(x,\xi)$ は明らかである．記号を簡単にするため以下 $\partial_\xi^\alpha D_x^\beta P(x,\xi)$ を $P^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)$ で表すことにする．まず

$$\begin{aligned} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,{}^tP(e^{i\langle x,\xi\rangle}v)&=\sum_{l=0}^m\Big(\sum_{k+|\alpha|=l}\frac{1}{\alpha!}\tilde P_k{}^{(\alpha)}(x,\xi)D^\alpha\Big)v \\ =\sum_{l=0}^m P_l(x,\xi;D)v,&\quad P_l(x,\xi;D)=\sum_{k+|\alpha|=l}\frac{1}{\alpha!}\tilde P_k{}^{(\alpha)}(x,\xi)D^\alpha \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

を確かめるのは容易である．今 Ω を $x=0$ の近傍，$\Gamma \in \mathbb{R}^d \setminus 0$ を $\bar{\xi}'$ を含む開錐とするとき $\Omega \times (\mathbb{R} \times \Gamma)$ で定義された ξ に関して斉次 r_1+r_2-k 次の $p_k(x,\xi)$ で

$$\left|p_{k(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\right| \le C_{k,\alpha,\beta}|\xi|^{r_1}|\xi'|^{r_2-k-|\alpha|}, \quad (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}\times\Gamma),\ \ \alpha,\beta \in \mathbb{N}^{1+d}$$

を満たすものの形式的な和 $p=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,\xi)$ を $\Omega \times (\mathbb{R}\times\Gamma)$ 上の (r_1,r_2) 次のシンボルと呼ぶことにし，そのような 2 つのシンボル p, q に対して $r = p\circ q$ を

$$r=\sum_{k=0}^{\infty} r_m(x,\xi), \quad r_m = \sum_{k+l+|\gamma|=m} \frac{1}{\gamma!} p_k^{(\gamma)} q_{l(\gamma)}$$

で定義する．また $p=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,\xi)$ に対して (1.2.5) に倣って ξ をパラメーターとする微分作用素を

$$P_l(x,\xi;D) = \sum_{k+|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} p_k^{(\alpha)}(x,\xi) D^\alpha$$

で定義すると $r=p\circ q$ のとき

$$R_l(x,\xi;D) = \sum_{j=0}^{l} P_{l-j}(x,\xi;D) Q_j(x,\xi;D) \tag{1.2.6}$$

であることも容易に確かめられる．$\tilde{P}_{m-j}(x,\xi) = p_j(x,\xi)$ とおき $\sum_{j=0}^{m} \tilde{P}_j(x,\xi) = \sum_{j=0}^{m} p_j(x,\xi) = p$ と書くことにする．このとき $x=0$ の近傍 Ω と $\bar{\xi}'$ を含む開錐 Γ があってそこで

$$p = \Big(\xi_0^\mu + \sum_{j=1}^{\mu} a^j(x,\xi')\xi_0^{\mu-j}\Big) \circ \Big(\xi_0^\nu + \sum_{j=1}^{\nu} b^j(x,\xi')\xi_0^{\nu-j}\Big) = r\circ h \tag{1.2.7}$$

と書ける．ここで a^j, b^j は $\Omega\times(\mathbb{R}\times\Gamma)$ 上の ξ_0 によらない $(0,j)$ 次のシンボルである．また $r_0 = \xi_0^\mu + \sum_{j=1}^{\mu} a_0^j(0,\bar{\xi}')\xi_0^{\mu-j} = 0$, $h_0 = \xi_0^\nu + \sum_{j=1}^{\nu} b_0^j(0,\bar{\xi}')\xi_0^{\nu-j} = 0$ はそれぞれ実根のみおよび非実根のみをもつ．実際，仮定より $p_0 = r_0 h_0$ となる r_0, h_0 が求まるので $a^j = a_0^j + A^j$, $b^i = b_0^i + B^i$ とおいて (1.2.7) の両辺を ξ に関する次数をもとに比較すると $C = (A_{j_1}^1,\ldots,A_{j_\mu}^\mu, B_{i_1}^1,\ldots,B_{i_\nu}^\nu)$ に関する連立一次方程式が得られるがその係数行列は r_0 と h_0 の ξ_0 の多項式としての終結式であり，正則行列である．したがって C は一意に決まる．必要なら Ω, Γ を取り替えれば，ある $c_0>0$ があって $|h_0(x,\xi)| \ge c_0^{-1}|\xi|^\nu$ が $\Omega\times(\mathbb{R}\times\Gamma)$ で成立する．これより $\Omega\times(\mathbb{R}\times\Gamma)$ 上の $(-\nu,0)$ 次のシンボル $q=\sum_{k=0}^{\infty} q_k(x,\xi)$ で $h\circ q=1$ を満たすものが存在する．実際，$q_0 = 1/h_0$ とし以下 q_k を順次決めてゆけばよい．このとき $k+|\alpha| \ge 1$ なら

$$\left|q_{k(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}|\xi|^{-\nu-1}|\xi'|^{1-k-|\alpha|} \tag{1.2.8}$$

が成り立つことに注意する．これより

$$p \circ q = (r \circ h) \circ q = r \circ (h \circ q) = r$$

が成立する．したがって (1.2.5) と (1.2.6) より $N > m$ を任意の自然数とするとき

$$e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,{}^tP\Big(e^{i\langle x,\xi\rangle}\sum_{j=0}^{N-m} Q_j v\Big) = \sum_{j=0}^{N-m} R_j v + \sum_{\substack{N-m<k+l\le N,\\ k\le N-m, l\le m}} P_l Q_k v \tag{1.2.9}$$

が得られる．いま一般化された初期値問題 (1.2.3), $\phi = g(x_1)$ に $x = 0$ のある近傍で C^m 級の解 u が存在すると仮定する．$v \in C_0^\infty(K)$, $K = \{|x_j| \le r\}$ を $x = 0$ の近傍で 1 で $\operatorname{supp} v$ 上で $Pu = 0$ かつ $\operatorname{supp} v \cap \{x_0 = 0\}$ 上で $D_{x_0}^j u(0, x') = 0$ $(0 \le j \le \mu - 1)$ となるように選び $w_N(x;\xi) = \sum_{j=0}^{N-m} Q_j(x,\xi;D)v(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} 0 &= \int (Pu)(e^{i\langle x,\xi\rangle} w_N)dx = \int u(x)\,{}^tP(e^{i\langle x,\xi\rangle} w_N)dx \\ &= \int e^{i\langle x,\xi\rangle} u\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,{}^tP(e^{i\langle x,\xi\rangle} w_N)dx \end{aligned}$$

すなわち (1.2.9) より

$$\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\Big(\sum_{j=0}^{N-m} R_j v\Big)u dx = -\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\Big(\sum_{\substack{N-m<k+l\le N,\\ k\le N-m, l\le m}} P_l Q_k v\Big)u dx$$

が成立する．右辺を評価するため $f(x) \in C_0^\infty(K)$ とし $\int e^{i\langle x,\xi\rangle}(P_l f)u dx$ を考えよう．$P_l f$ の項で ξ_0^k $(k \ge 1)$ を含む項では $\xi_0^k e^{i\xi_0 x_0}$ を $D_0^k(e^{i\xi_0 x_0})$ で置き換えて部分積分を繰り返すと P_l は (ξ, D) に関して高々 m 次であるから

$$\Big|\int e^{i\langle x,\xi\rangle}(P_l f)u dx\Big| \le C|\xi'|^m \sup_{K, j\le m}|D_0^j u| \sup_{K,|\alpha|\le m}|D^\alpha f|$$

が従う．ここで C は P だけから決まることに注意する．他方 (1.2.8) に注意すると任意の $1 \le N - 2m \le k \le N - m$, $\gamma \in \mathbb{N}^{1+d}$ に対して $C_{N,\gamma}$ が存在し $\Omega \times (\mathbb{R} \times \Gamma)$ で $\big|D^\gamma(Q_k v)\big| \le C_{N,\gamma}|\xi|^{-\nu-1}|\xi'|^{1+2m-N}$ が成立することは容易にわかるから

$$\Big|\int d\xi_0 \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\Big(\sum_{\substack{N-m<k+l\le N,\\ k\le N-m, l\le m}} P_l Q_k v\Big)u dx\Big| \le C_N|\xi'|^{1+3m-N} \sup_{K, j\le m}|D_0^j u|$$

を得る．ここで C_N は u には依らない．次に $\int e^{i\langle x,\xi\rangle}(R_j v)u dx$ を評価する．$R_j v$ は $D^\alpha v$ $(|\alpha| \le j)$ の線形結合であり係数は ξ_0 の高々 μ 次の多項式であるから，上で行った

ように係数が ξ_0^k を含めば部分積分を行い，ξ_0 を含まない形にする．$\operatorname{supp} v(0,x')$ 上で $D_0^j u(0,x')=0$ $(0\le j\le \mu-1)$ であったから Fourier の反転公式から

$$\int d\xi_0\int e^{i\langle x,\xi\rangle}\Big(\sum_{j=0}^{N-m}R_jv\Big)udx=2\pi(-1)^{\mu}\int e^{i\langle x',\xi'\rangle}v(0,x')D_0^{\mu}u(0,x')dx'$$

を得る．$\tilde{v}(x')=v(0,x')$ とおくと $g(x')=D_0^{\mu}u(0,x')$ より

$$\big|\bar{\mathcal{F}}(\tilde{v}g)(\xi')\big|\le C_N|\xi'|^{1+3m-N}\sup_{K,j\le m}|D_0^ju|,\quad \xi'\in\Gamma \tag{1.2.10}$$

が成立する．$P_m(0,\xi_0,-\bar{\xi}')=0$ も μ 個の実根と ν 個の非実根を持つので同じ議論を繰り返すと，必要なら Γ を縮めて (1.2.10) が $\xi'\in\Gamma\cup(-\Gamma)$ で成り立つとしてよい．ただし $-\Gamma=\{\xi';-\xi'\in\Gamma\}$ とした．一方 $c>0$ があって $\xi'=(\xi_1,\xi'')\notin\Gamma\cup(-\Gamma)$, $\xi''=(\xi_2,\ldots,\xi_d)$ のとき $|\xi''|\ge c|\xi_1|$ が成り立つので部分積分より

$$\begin{aligned}\big|\bar{\mathcal{F}}(\tilde{v}g)(\xi')\big|&\le\int(1+|\xi''|^2)^{-N}|(1+|D''|^2)^N\tilde{v}||g(x_1)|dx'\\&\le C_N'(1+|\xi'|)^{-2N}\sup_{|x_1|\le r}|g(x_1)|,\quad D''=(D_2,\ldots,D_d)\end{aligned}$$

が成立する．C_N' は g には依らない．以上をまとめると任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して u および g には依らない C_N があって任意の $\xi'\in\mathbb{R}^d$ について

$$\big|\bar{\mathcal{F}}(\tilde{v}g)(\xi')\big|\le C_N(1+|\xi'|)^{-N}\big\{\sup_{K,j\le m}|D_0^ju(x)|+\sup_{|x_1|\le r}|g(x_1)|\big\} \tag{1.2.11}$$

が成り立つ．Fourier の反転公式より $(d/dx_1)^n\tilde{v}g=\mathcal{F}\big((-\xi_1)^n\bar{\mathcal{F}}\tilde{v}g\big)$ であるから (1.2.11) で $N=n+d+1$ と選んで

$$\begin{aligned}|(d/dx_1)^ng(0)|=|(d/dx_1)^n(\tilde{v}g)(0)|&\le\Big|\int|\xi_1|^nd\xi'\int e^{i\langle x',\xi'\rangle}\tilde{v}gdx'\Big|\\&\le C_{n+d+1}\int(1+|\xi'|)^{-d-1}d\xi'\big\{\sup_{K,j\le m}|D_0^ju(x)|+\sup_{|x_1|\le r}|g(x_1)|\big\}\\&\le CC_{n+d+1}\big\{\sup_{K,j\le m}|D_0^ju(x)|+\sup_{|x_1|\le r}|g(x_1)|\big\}.\end{aligned}$$

したがって $\tilde{C}_n=C_{n+d+1}$ とおくと $\limsup_{n\to\infty}(|g^{(n)}(0)/\tilde{C}_n)^{1/n}\le 1$ が従う． □

証明中の (1.2.7) および (1.2.8) の詳細については [29] を参照のこと．

系 1.2.1. 係数は $C^{\infty}(\Omega)$ とする．このとき初期値問題 (1.2.3) $(\mu=m-1)$ が任意の $\phi(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ に対して原点の近傍 (ϕ によってもよい) で C^m 級の解をもつためには特性方程式 $P_m(0,\xi_0,\xi')=0$ が任意の $\xi'\in\mathbb{R}^d$ に対して実根のみをもつことが必要である．

証明. 特性方程式 $P_m(0,\xi_0,\xi')=0$ がある $0\neq\xi'\in\mathbb{R}^d$ に対して $\nu=m-\mu\geq 1$ 個の非実根を持つと仮定しよう．斉次性より $|\xi'|=1$ としてよい．局所座標系 $x'=(x_1,\dots,x_d)$ の線形変換で $\xi'=(1,0,\dots,0)$ と仮定できるので定理 1.2.1 を適用する．このとき (1.2.4) を満たさない $g(x_1)$ を選べば $\phi=g(x_1)$ とした初期値問題 ($D_0^j u(0,x')$, $j=\mu+1,\dots,m-1$ は任意でよい) には C^m 級の解が存在しない． □

係数が Ω で実解析的なら，特性根の虚実に関係なく，Cauchy-Kowalevsky の定理によって任意の実解析的な初期値に対し原点の近傍で実解析的な初期値問題の解が存在するが，非実の特性根がある場合は，C^m 級の解が存在するような初期値のクラスはそう広くはない．

命題 1.2.1. I を原点を含む $\mathbb{R}$ の開区間とする．定理と同じ仮定の下で，初期値問題 (1.2.3), $\phi=g(x_1)$ が原点の近傍で C^m 級の解をもたないような $g(x_1)\in C^\infty(I)$ の集合は $C^\infty(I)$ で稠密である．

証明. $x_1=t$ と書くことにする．閉区間列 $J_1\subset\cdots\subset J_n\subset J_{n+1}\subset\cdots$ を I の汲み尽し列，すなわち $\cup_{n=1}^\infty J_n=I$ であるとする．$f,g\in C^\infty(I)$ に対して

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|f-g|_n/(1+|f-g|_n),\quad |\phi|_n=\sum_{k\leq n}\max_{J_n}|\partial_t^k\phi|$$

と定めると d は $C^\infty(I)$ の位相を与える距離である．従って

$$S=\{g(t)\in C^\infty(I);\limsup_{n\to\infty}(|g^{(n)}(0)|/C_n)^{1/n}>1\}$$

とおくとき，任意の $f\in C^\infty(I)$ に対して $d(f,h_\ell)\to 0$ $(\ell\to\infty)$ をみたす $h_\ell\in S$ が存在することを示せばよい．$\rho(0)=1$, $\rho^{(n)}(0)=0$ $(n\geq 1)$ をみたす $\rho\in C_0^\infty(I)$ を 1 つ固定し，与えられた $f\in C^\infty(I)$ に対して ϕ_ℓ を次のように定める．

$$\phi_\ell(t)=\sum_{j\geq\ell}\rho_j(t),\quad \rho_j(t)=f_j\rho(t/\epsilon_j)t^j/j!. \tag{1.2.12}$$

ここで $\{C_j\}$ を定理 1.2.1 の正数列とし $f^{(j)}(0)\geq 0$ なら $f_j=2^jC_j$ で $f^{(j)}(0)<0$ のときは $f_j=-2^jC_j$ とする．また $\epsilon_j>0$ は後で決める．$|d^m\rho_j/dt^m|=|\rho_j^{(m)}(t)|$ を評価すると $\rho(t/\epsilon_j)\neq 0$ なら $|t/\epsilon_j|\leq 1$ と仮定してよいので ϵ_j には依らない $C_{m,j}$ があって

$$\left|\rho_j^{(m)}(t)\right|\leq C_{m,j}\epsilon_j^{j-m},\quad (j\geq m)$$

が成り立つ．ここで $\epsilon_j=\min_{0\leq m\leq j-1}\left(2^{-j}C_{m,j}^{-1}\right)^{1/(j-m)}$ と定めると $j\geq m+1$ のとき $|\rho_j^{(m)}(t)|\leq 2^{-j}$ が成り立ち $\sum_{j\geq\ell}\rho_j^{(m)}(t)$ は I で一様収束するので $\phi_\ell\in C^\infty(I)$ となる．

いま $h_\ell(t)=f(t)+\phi_\ell(t)$ とおくと $h_\ell\in C^\infty(I)$ で $\rho_j^{(m)}(0)=\delta_{jm}f_j$ より

$$\phi_\ell^{(m)}(0)=\sum_{j\ge\ell}\rho_j^{(m)}(0)=\begin{cases}0 \quad (m<\ell)\\ 2^mC_m \quad (m\ge\ell,\ f^{(m)}(0)\ge 0)\\ -2^mC_m \quad (m\ge\ell,\ f^{(m)}(0)<0)\end{cases}$$

であるから

$$\limsup_{n\to\infty}\left(|h_\ell^{(n)}(0)|/C_n\right)^{1/n}\ge\limsup_{n\to\infty}\left(|\phi_\ell^{(n)}(0)|/C_n\right)^{1/n}>1$$

となって $h_\ell\in S$ である．次に $|\phi_\ell^{(m)}(t)|\le\sum_{j\ge\ell}|\rho_j^{(m)}(t)|\le\sum_{j\ge\ell}2^{-j}=2^{-\ell+1}$ $(m\le\ell-1)$ より

$$|\phi_\ell|_n=\sum_{m\le n}\max_{J_n}|\phi_\ell^{(m)}(t)|\le\sum_{m\le n}2^{-\ell+1}\le\ell\,2^{-\ell+1}\quad(\ell\ge n+1) \tag{1.2.13}$$

なので $|\phi_\ell|_n\to 0$ $(\ell\to\infty)$ が成り立つ．いま与えられた $\epsilon>0$ に対して n_1 を $\sum_{n=n_1+1}^\infty 2^{-n}<\epsilon$ と選んでおき，この n_1 に対して ℓ_1 を

$$\ell_1\le\ell,\ \ 1\le n\le n_1\Longrightarrow|\phi_\ell|_n<\epsilon$$

と選ぶ．このとき $\ell_1\le\ell$ なら

$$d(f,h_\ell)\le\sum_{n=1}^{n_1}2^{-n}|\phi_\ell|_n\big/(1+|\phi_\ell|_n)+\sum_{n=n_1+1}^{\infty}2^{-n}\le 2\epsilon$$

となって $d(f,h_\ell)\to 0$ $(\ell\to\infty)$ が従う． □

命題 1.2.2. I を原点を含む $\mathbb{R}$ の開区間とする．定理と同じ仮定の下で，初期値問題 (1.2.3), $\phi=g(x_1)$ が原点の近傍で C^m 級の解をもつ $g(x_1)\in C^\infty(I)$ の集合は $C^\infty(I)$ の第一類集合である．

証明. $f_j=2^jC_j$ として ϕ_ℓ を (1.2.12) で定義する．このとき

$$\phi_\ell^{(m)}(0)=\sum_{j\ge\ell}\rho_j^{(m)}(0)=\begin{cases}0 \quad (m<\ell)\\ 2^mC_m \quad (m\ge\ell)\end{cases}$$

は明らか．(1.2.13) より任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $M_n>0$ が存在して

$$\sup_\ell|\phi_\ell|_n\le M_n \tag{1.2.14}$$

が成り立つ．いま次の $C^\infty(I)$ 上の連続線形形式の列を考える．

$$T_nf=C_n^{-1}(2/3)^nf(0),\quad n=1,2,\ldots.$$

一様有界性定理 (例えば [28, 補題 2.5]) より，もし任意の $f \in C^\infty(I)$ について $\sup_n |T_n f| < +\infty$ が成立すれば $C^\infty(I)$ のある 0 の近傍 $V = \{f \in C^\infty(I); |f|_{m_j} < \delta_j, j = 1, \ldots, N\}$ があって

$$\sup_{n, f \in V} |T_n f| < +\infty \tag{1.2.15}$$

が成立するはずだが (1.2.14) より適当な $\epsilon > 0$ をとれば $\{\epsilon\phi_\ell\} \in V$ $(\forall \ell)$ であり，一方で任意の $M > 0$ に対して n_1 を $(4/3)^{n_1} > M$ と選ぶと

$$\left|T_{n_1}\phi_{n_1}\right| = \left|C_{n_1}^{-1}(2/3)^{n_1}\phi_{n_1}^{(n_1)}(0)\right| = (4/3)^{n_1} > M$$

となって (1.2.15) は成り立たない．すなわち $\sup_n |T_n f| = +\infty$ となる $f \in C^\infty(I)$ が存在する．このとき集合 $B = \{f \in C^\infty(I); \sup_n |T_n f| < +\infty\}$ は第一類集合である．実際 $B_k = \{f \in C^\infty(I); \sup_n |T_n f| \le k\}$ とおくと $B = \cup_k B_k$ で B_k は閉集合なので B が第一類集合でないとすると定義からある B_{k_0} は内点を持つが，B_{k_0} が対称で凸ということから B_{k_0} は 0 のある近傍を含み，したがって任意の $f \in C^\infty(I)$ について $|T_n f| < +\infty$ となり，$B = C^\infty(I)$ となって矛盾する．ここで

$$S^c = \{g(t) \in C^\infty(I); \limsup_{n\to\infty}(|g^{(n)}(0)|/C_n)^{1/n} \le 1\} \subset B$$

に注意すれば S^c が第一類集合であることが従う． □

第 2 章

波面集合

この章では古典的擬微分作用素と波面集合の定義およびその簡単な性質を証明する．特に引き戻し (座標変換) による波面集合の評価付き変換則 (命題 2.3.3) は後の第 6 章で利用する．

2.1 振動積分

A を $d \times d$ 実正則行列とし $a(y,\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ はある $m_i \in \mathbb{R}$ および $0 \le \delta < 1$ に対して次の評価

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a(y,\eta)| \le C_{\alpha,\beta} \langle \eta \rangle^{m_1+\delta|\alpha|} \langle y \rangle^{m_2}, \quad (y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \tag{2.1.1}$$

を満たすとする．このとき $\chi(y,\eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ で $\chi(0,0) = 1$ となるものを 1 つ選んで振動積分 $\int e^{-i\langle Ay,\eta \rangle} a(y,\eta) dy d\eta$ を

$$\int e^{-i\langle Ay,\eta \rangle} a(y,\eta) dy d\eta = \lim_{\epsilon \to 0} \int e^{-i\langle Ay,\eta \rangle} \chi(\epsilon y, \epsilon \eta) a(y,\eta) dy d\eta \tag{2.1.2}$$

で定義する．右辺が χ の選び方によらず一意に決まることは容易にわかる．実際 $\langle {}^tA\eta \rangle^{-2l} \langle D_y \rangle^{2l} \langle Ay \rangle^{-2l'} \langle D_\eta \rangle^{2l'} e^{-i\langle Ay,\eta \rangle} = e^{-i\langle Ay,\eta \rangle}$ に注意して部分積分を行うと

$$\begin{aligned} &\int e^{-i\langle Ay,\eta \rangle} \chi(\epsilon y, \epsilon \eta) a(y,\eta) dy d\eta \\ &= \int e^{-i\langle Ay,\eta \rangle} \langle Ay \rangle^{-2l'} \langle D_\eta \rangle^{2l'} (\langle {}^tA\eta \rangle^{-2l} \langle D_y \rangle^{2l} \chi(\epsilon y, \epsilon \eta) a) dy d\eta \end{aligned}$$

が成立する．A は正則であるから $c > 0$ が存在して $\langle Ay \rangle \ge c\langle y \rangle$, $\langle {}^tA\eta \rangle \ge c\langle \eta \rangle$ が成り立ち，また (2.1.1) より $\epsilon > 0$ に一様に

$$\left| \langle Ay \rangle^{-2l'} \langle D_\eta \rangle^{2l'} (\langle {}^tA\eta \rangle^{-2l} \langle D_y \rangle^{2l} \chi(\epsilon y, \epsilon \eta) a) \right| \le C_{l,l'} \langle y \rangle^{m_2 - 2l'} \langle \eta \rangle^{m_1 - 2(1-\delta)l}$$

と評価されるので l, l' を $m_2 - 2l' < -d$, $m_1 - 2(1-\delta)l < -d$ と選ぶと (2.1.2) の右辺は Lebesgue の優収束定理より

$$\int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}\langle Ay\rangle^{-2l'}\langle D_\eta\rangle^{2l'}(\langle {}^tA\eta\rangle^{-2l}\langle D_y\rangle^{2l}a(y,\eta))dyd\eta$$

に収束する．特に a が可積分なら振動積分は通常の積分と一致している．また (2.1.2) より任意の α, β について

$$\int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}(Ay)^\beta a(y,\eta)dyd\eta = \int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}D_\eta^\beta a(y,\eta)dyd\eta,$$
$$\int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}({}^tA\eta)^\alpha a(y,\eta)dyd\eta = \int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}D_y^\alpha a(y,\eta)dyd\eta$$

が成り立つ．B_i を実正則行列とするとき $a(B_1y, B_2\eta)$ が (2.1.1) を満たすことは明らかで $y = B_1\tilde{y}$, $\eta = B_2\tilde{\eta}$ と変数変換を行うと

$$\int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}a(y,\eta)dyd\eta = \int e^{-i\langle {}^tB_2AB_1\tilde{y},\tilde{\eta}\rangle}a(B_1\tilde{y}, B_2\tilde{\eta})|\mathrm{det}B_1||\mathrm{det}B_2|d\tilde{y}d\tilde{\eta}$$

も明らかである．さらに $y_0, \eta_0 \in \mathbb{R}^d$ とするとき $e^{-i\langle A(y+y_0),\eta+\eta_0\rangle}a(y+y_0, \eta+\eta_0) = e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}\tilde{a}(y,\eta)$ と書くと $\tilde{a}(y,\eta)$ は (2.1.1) を満たす．また

$$\int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}\chi(\epsilon y,\epsilon\eta)\tilde{a}(y,\eta)dyd\eta = \int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}\chi(\epsilon(y-y_0),\epsilon(\eta-\eta_0))a(y,\eta)dyd\eta$$

より $\chi(\epsilon(y-y_0),\epsilon(\eta-\eta_0)) - \chi(\epsilon y,\epsilon\eta) \to 0$ $(\epsilon \to 0)$ に注意し部分積分を繰り返すと右辺は $\epsilon \to 0$ のとき $\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}\chi(\epsilon y,\epsilon\eta)a(y,\eta)dyd\eta$ に収束する．すなわち振動積分は平行移動によらない．振動積分を使って超関数 $\int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}a(y,\eta)d\eta$ を

$$\left\langle \int e^{-i\langle Ay,\eta\rangle}a(y,\eta)d\eta, u\right\rangle = \int e^{-\langle Ay,\eta\rangle}a(y,\eta)u(y)dyd\eta, \quad u(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

で定義する．いま $\chi(y,\eta) = \chi(y)\chi(\eta)$, $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\chi(0) = 1$ と選ぶと

$$(2\pi)^{-d}\int e^{-iy\eta}\chi(\epsilon y)\chi(\epsilon\eta)u(y)dyd\eta = (2\pi)^{-d}\int \chi(\epsilon y)u(y)dy\int e^{-iy\eta}\chi(\epsilon\eta)d\eta$$
$$= (2\pi)^{-d}\epsilon^{-d}\int \hat{\chi}(\epsilon^{-1}y)\chi(\epsilon y)u(y)dy = (2\pi)^{-d}\int \hat{\chi}(y)\chi(\epsilon^2 y)u(\epsilon y)dy$$

で右辺は Lebesgue の優収束定理から $\epsilon \to 0$ のとき $u(0)(\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}\chi)(0) = u(0)$ に収束する．すなわち

$$(2\pi)^{-d}\int e^{-iy\eta}d\eta = \delta(y) \tag{2.1.3}$$

である．ここで $\delta(y)$ は $y = 0$ での Dirac measure である．

本書では特に断らない限り積分はすべて振動積分とする．

2.2　古典的擬微分作用素

この節では古典的擬微分作用素の基本的な性質をまとめておく．$a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ が古典的擬微分作用素のクラス S^m に属すとは任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $C_k > 0$ が存在して

$$\sup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2d}, |\alpha+\beta|\le k} \left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\right| \le C_k \langle\xi\rangle^{m-|\beta|}$$

が成り立つことである．この不等式が成立する最小の C_k をセミノルムとして S^m は Fréchet 空間となる．また $S^{-\infty} = \cap S^m$, $S^\infty = \cup S^m$ とおく．第 7.1 節の metric $\underline{g}$ ((7.1.14)) で $\gamma = 1$ として固定したものを g_0 とすると $S^m = S(\langle\xi\rangle^m, g_0)$ に他ならない．$a \in S^m$ とし $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は原点の近傍で恒等的に 1 であるとすると $\epsilon > 0$ に対して $\chi(\epsilon\xi)a(x,\xi) \in S^{-\infty}$, $(1-\chi(\epsilon\xi))a(x,\xi) \in S^m$ であり，また $\epsilon \to 0$ のとき S^{m+1} で $\chi(\epsilon\xi)a(x,\xi) \to a(x,\xi)$, $(1-\chi(\epsilon\xi))a(x,\xi) \to 0$ となることは容易に確かめられる．

命題 2.2.1. $a_j \in S^{m_j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ とし，$m_0 > m_1 > m_2 > \cdots$, $m_j \to -\infty$ とする．このとき $a \in S^{m_0}$ で任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$a - \sum_{j<k} a_j \in S^{m_k}$$

を満たすものがある．これを $a \sim \sum_0^\infty a_j$ と書く．

証明. $\chi \in C_0^\infty$ を $x = 0$ の近傍で $\chi = 1$ なるものとすると $\epsilon \to 0$ のとき S^{m_j+1} で $(1-\chi(\epsilon\cdot))a_j \to 0$ なので $\epsilon_j > 0$ を

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta((1-\chi(\epsilon_j\xi))a_j(x,\xi)| \le 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha|}, \quad |\alpha+\beta| \le j$$

が成り立つように選べる．$A_j(x,\xi) = (1-\chi(\epsilon_j\xi))a_j(x,\xi) \in S^{m_j}$ とおくとき $\epsilon_j \to 0$ と仮定してよいので和 $a = \sum_0^\infty A_j$ は局所有限であり $a \in C^\infty$ である．従って α, β, k が与えられたとき N を $|\alpha+\beta| \le N$, $m_N + 1 \le m_k$ と選ぶと

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta(a(x,\xi) - \sum_{j<N} A_j(x,\xi))| \le (1+|\xi|)^{m_k-|\alpha|}$$

が成立する．従って特に $a \in S^{m_0}$ である．$a_j - A_j = \chi(\epsilon_j\xi)a_j(x,\xi) \in S^{-\infty}$ より $a - \sum_{j<k} a_j = a - \sum_{j<N} A_j + \sum_{j<k}(A_j - a_j) + \sum_{k\le j<N} A_j$ と書いて結論が従う．　□

χ を命題 2.2.1 のそれとすると $a \sim \sum_0^\infty a_j$ と $a \sim \sum_0^\infty (1-\chi(\xi))a_j$ は同値であるから $a_j(x,\xi)$ が ξ について斉次 $m-j$ 次のときも（したがって a_j は $\xi \ne 0$ で C^∞）同様に $a \sim \sum_0^\infty a_j$ と表すことにする．ξ について斉次 $m-j$ 次の a_j が与えられたとき $a \sim \sum_0^\infty a_j$ となる $a \in S^m$ の存在することは命題 2.2.1 の証明から明らかである．

$a \in S^m$ に対し $\mathrm{op}(a)$ を定義 7.2.2 で定義し定理 7.3.1 を $g = \underline{g}$ として適用する．定理は γ に一様に成り立っているので $\gamma = 1$ のとき (7.1.4) より $\underline{g}/\underline{g}^\sigma = \langle\xi\rangle^{-2}$ に注意すると

定理 2.2.1. $a_j \in S^{m_j}$, $j = 1, 2$ とする．このとき $b \in S^{m_1+m_2}$ があって

$$\mathrm{op}(a_1)\mathrm{op}(a_2) = \mathrm{op}(b)$$

が成立する．この b を $a_1\#a_2$ と表すとき任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_1\#a_2 - \sum_{|\alpha+\beta|<N} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_1(x,\xi) \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_2(x,\xi) \in S^{m_1+m_2-N}$$

が成り立つ．$N = 2$ のとき

$$(a_1\#a_2)(x,\xi) - \big(a_1(x,\xi)a_2(x,\xi) + \frac{1}{2i}\{a_1, a_2\}(x,\xi)\big) \in S^{m_1+m_2-2}$$

となる．ここで $\{a_1, a_2\} = \sum_{|\alpha|=1}(\partial_\xi^\alpha a_1 \partial_x^\alpha a_2 - \partial_x^\alpha a_1 \partial_\xi^\alpha a_2)$ で a_1 と a_2 の Poisson Bracket と呼ばれる．これより $a_1\#a_2 - a_2\#a_1 + i\{a_1, a_2\} \in S^{m_1+m_2-2}$ である．

$A_i = \mathrm{op}(a_i)$ とするとき $[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$ は A_1 と A_2 の交換子を表すとする．したがって $[A_1, A_2] = \mathrm{op}(a_1\#a_2 - a_2\#a_1)$ である．

次に定理 7.4.1 を $a \in S^0$ に適用してみる．定理 7.4.1 は γ に一様に成り立っており $\gamma = 1$ のとき $\underline{g} = \langle\xi\rangle^{-1}\bar{g} \le \bar{g}$ より $a \in S(1, \bar{g})$ となり次の L^2 有界性定理が得られる．

定理 2.2.2. $a(x,\xi) \in S^0$ とすると $\mathrm{op}(a)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で有界である．

つぎに $a \in S^m$ とするとき $\langle D\rangle^s \mathrm{op}(a) = \mathrm{op}(\langle\xi\rangle^s\#a\#\langle\xi\rangle^{-m-s})\langle D\rangle^{m+s}$ とかくと $\langle\xi\rangle^s\#a\#\langle\xi\rangle^{-m-s} \in S^0$ なので

系 2.2.1. $a \in S^m$ とする．このとき $C > 0$ があって

$$\|\mathrm{op}(a)u\|_s \le C\|u\|_{s+m}, \quad u \in H^{s+m}.$$

補題 2.2.1. $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $a(x,\xi) \in S^0$ とする．このとき任意の N について $a_N \in S^0$, $r_N \in S^{-N}$ が存在し $\chi\#a = a_N + r_N$ と書ける．ここで $\mathrm{supp}\, a_N \subset \mathrm{supp}\,\chi \cap \mathrm{supp}\, a$ で任意の $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $p \ge 0$ に対し $C > 0$ が存在し

$$|\partial_x^\alpha r_N| \le C(1+|x|)^{-p}(1+|\xi|)^{-N}$$

が成立する．$a\#\chi$ についても同様である．

証明. 定理 2.2.1 を $a_1 = \chi$, $a_2 = a$ として適用したときの左辺第 2 項を a_N として定義すると a_N に対する主張は明らかである．第 7.3 節によると r_N は次の形をした項

$$r = \int e^{-2i(\eta z - y\zeta)} \partial_x^\gamma \chi(x+\theta y) \partial_\xi^\gamma a(x+z, \xi+\zeta) dy d\eta dz d\zeta,\ |\theta| \le 1, |\gamma| = N$$

を $(1-\theta)^{N-1}d\theta$ で積分したものの 1 次結合であり $d\eta dz$ で積分を行うと (2.1.3) より $\partial_x^\alpha r$ は次の形の項の和である．

$$r_\alpha = \int e^{2iy\zeta}\partial_x^{\gamma+\alpha'}\chi(x+\theta y)\partial_x^{\alpha''}\partial_\xi^\gamma a(x,\xi+\zeta)dyd\zeta,\ \ \alpha'+\alpha''=\alpha.$$

ここで $\langle y\rangle^{-2l}\langle D_\zeta/2\rangle^{2l}e^{-2iy\zeta}=e^{-2iy\zeta}$, $\langle\zeta\rangle^{-2k}\langle D_y/2\rangle^{2k}e^{-2iy\zeta}=e^{-2iy\zeta}$ に注意して部分積分を行うと r_α は定数倍を除いて

$$\int e^{2iy\zeta}\langle D_y/2\rangle^{2k}\langle\zeta\rangle^{-2k}\langle D_\zeta/2\rangle^{2l}\langle y\rangle^{-2l}\partial_x^{\gamma+\alpha'}\chi(x+\theta y)\partial_x^{\alpha''}\partial_\xi^\gamma a(x,\xi+\zeta)dyd\zeta$$

に等しい．χ の support が $|x|\le R$ に含まれるとすると $1+|x|\le 1+|x+\theta y|+|y|\le(1+|x+\theta y|)(1+|y|)$ より $\partial_x^{\gamma+\alpha'}\chi(x+\theta y)$ の support 上で $(1+|x|)^p\le(1+R)^p(1+|y|)^p$ である．ゆえに $(1+|\xi|)^N\le(1+|\xi+\zeta|)^N(1+|\zeta|)^N$ に注意して

$$\big|(1+|\xi|)^N(1+|x|)^p r_\alpha\big|\le C\int\langle y\rangle^{p-2l}\langle\zeta\rangle^{N-2k}dyd\zeta$$

が得られる．$2l-p\ge d+1$, $2k-N\ge d+1$ と l, k を選べば望む評価が得られる．$a\#\chi$ についても同様に証明できる． □

2.3　波面集合

$U\subset\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$ が錐集合であるとは，$(x,\xi)\in U$ ならば $(x,r\xi)\in U\,(r>0)$ が成立するときをいう．したがって U は $\{(x,\xi/|\xi|);(x,\xi)\in U\}\subset\mathbb{R}^d\times S^{d-1}$ と同一視できる．ここで S^{d-1} は $\mathbb{R}^d$ の単位球である．以下では錐集合の位相はこの同一視を用いて $\mathbb{R}^d\times S^{d-1}$ の部分集合としての位相を考えるものとする．また $\overset{\circ}{U}$ で U の内部，U^c で U の補集合を表すものとする．また $U\Subset V$ は U が $\overset{\circ}{V}$ で相対コンパクトであることを表す．$(\bar{x},\bar{\xi})\in\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$ の近傍で錐集合であるものを $(\bar{x},\bar{\xi})$ の錐近傍という．$a\in S^m$ が錐集合 U では S^k $(k>m)$ の評価を満たすとき a は U で S^k ということにし，$a\in S^k(U)$ と表すことにする．$\pi(U)=\{x\in\mathbb{R}^d;(x,\xi)\in U\}$ で U の x-空間への射影を表すとし，$U_{\bar{x}}=\{\xi\in\mathbb{R}^d\setminus 0;(\bar{x},\xi)\in U\}$ は U の $x=\bar{x}$ での切り口を表すとする．

定義 2.3.1. $(\bar{x},\bar{\xi})$, $\bar{\xi}\in\mathbb{R}^d\setminus 0$ が $u\in H^{-\infty}$ の波面集合に属さないとは $\bar{x}$ のある近傍で 1 となる $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と $\bar{\xi}$ を含む開錐 $\Gamma\subset\mathbb{R}^d\setminus 0$ が存在し任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し

$$|\mathcal{F}(\chi u)(\xi)|\le C_N\langle\xi\rangle^{-N},\quad \xi\in\Gamma$$

の成立することである．$WF(u)\subset\mathbb{R}^d\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$ は錐閉集合である．

最初に $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $u \in H^q(\mathbb{R}^d)$ のとき

$$|\mathcal{F}(\chi u)(\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{-q+(d+1)/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \tag{2.3.4}$$

が成り立つことに注意する．$q \ge 0$ の場合を示す．$\hat{\chi} \in \mathcal{S}$ および $1+|\eta|+|\xi| \le 2(1+|\eta|)(1+|\xi-\eta|)$ より

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(\chi u)(\xi)| &\le C\int|\hat{\chi}(\xi-\eta)||\hat{u}(\eta)|d\eta \le C_q\int\langle\xi-\eta\rangle^{-q}\langle\eta\rangle^{-q}\langle\eta\rangle^{q}|\hat{u}(\eta)|d\eta\\ &\le C_q'(1+|\xi|)^{-q+(d+1)/2}\int\langle\eta\rangle^{-(d+1)/2}\langle\eta\rangle^{q}|\hat{u}(\eta)|d\eta\end{aligned}$$

と評価して Schwarz の不等式を用いればよい．

補題 2.3.1. 閉錐集合 U と $U_{\bar{x}} \cap \Gamma = \emptyset$ を満たす閉錐 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d \setminus 0$ を考える．このとき $\bar{x}$ の近傍 ω と閉錐 $\tilde{\Gamma} \Supset \Gamma$ があって任意の $\alpha(x) \in C_0^\infty(\omega)$ および $\operatorname{supp} h \subset U$ を満たす任意の $h \in S^0$，任意の $p, q \in \mathbb{R}$ に対して C が存在し

$$\big|\mathcal{F}(\alpha\,\mathrm{op}(h)v)(\xi)\big|,\ \big|\mathcal{F}(\mathrm{op}(h)\alpha v)(\xi)\big| \le C(1+|\xi|)^p\|v\|_q,\ \ \xi \in \tilde{\Gamma},\ v \in H^q \tag{2.3.5}$$

が成立する．

証明. 仮定より $(\{\bar{x}\}\times\Gamma)\cap U = \emptyset$ であるから $\bar{x}$ のコンパクト近傍 ω と $\Gamma \Subset \tilde{\Gamma}$ を満たす閉錐 $\tilde{\Gamma}$ で $(\omega\times\tilde{\Gamma})\cap U = \emptyset$ を満たすものがある．したがって $\epsilon > 0$ が存在して $\xi \in \tilde{\Gamma}$, $(x,\eta) \in \pi^{-1}(\omega)\cap U$, $|\xi|+|\eta| = 1$ のとき $|\xi-\eta| \ge \epsilon$ が成立する．$\tilde{\Gamma}$ は錐，U は錐集合であったから

$$\xi \in \tilde{\Gamma},\ \ (x,\eta) \in \pi^{-1}(\omega)\cap U \Longrightarrow |\xi-\eta| \ge \epsilon(|\xi|+|\eta|) \tag{2.3.6}$$

が成立する．$\alpha(x) \in C_0^\infty(\omega)$ に対し $\alpha(x)\mathrm{op}(h) = \mathrm{op}(\alpha\#h)$ を考えると補題 2.2.1 より任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha\#h - h_m = r_m \in S^{-m}$ と書ける．ここで $h_m \in S^0$ で $\operatorname{supp} h_m \subset \pi^{-1}(\omega)\cap U$ である．容易にわかるように

$$\mathcal{F}(\mathrm{op}(h_m)v)(\xi) = \pi^{-d}\int e^{-2ix(\xi-\eta)}h_m(x,\eta)\hat{v}(2\eta-\xi)dxd\eta \tag{2.3.7}$$

であるから $e^{-2ix(\xi-\eta)} = \langle\xi-\eta\rangle^{-2N}\langle D_x/2\rangle^{2N}e^{-2ix(\xi-\eta)}$ を用いて部分積分を繰り返すと

$$\big|\mathcal{F}(\mathrm{op}(h_m)v)(\xi)\big| \le C\int\langle\xi-\eta\rangle^{-2N}|\langle D_x/2\rangle^{2N}h_m(x,\eta)||\hat{v}(2\eta-\xi)|dxd\eta$$

が得られるが (2.3.6) より $\xi \in \tilde{\Gamma}$ のとき上式の右辺が (2.3.5) の右辺で評価されることは容易に示される．つぎに (2.3.7) で h_m を r_m で置き換えて同様に部分積分を繰り返すと

補題 2.2.1 より $|\langle D_x/2\rangle^{2N} r_m(x,\eta)| \le C(1+|x|)^{-d-1}(1+|\eta|)^{-m}$ ゆえ

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{F}(\mathrm{op}(r_m)v)(\xi)\big| &\le C_m \int (1+|\xi-\eta|^2)^{-N}(1+|\eta|)^{-m}|\hat{v}(2\eta-\xi)|d\eta\\ &\le C_m \int (1+|\xi-\eta|+|\eta|)^{-\min\{2N,m\}}|\hat{v}(2\eta-\xi)|d\eta\end{aligned}$$

と評価される．ここで N, m は任意であるから上式の右辺が (2.3.5) の右辺で (任意の ξ について) 評価されることが従う．$\mathcal{F}(\mathrm{op}(h)\alpha v)(\xi)$ についても同様である． □

命題 2.3.1. $h \in S^0$ の support は閉錐集合 U に含まれるとする．このとき任意の $v \in H^{-\infty}$ について $WF(\mathrm{op}(h)v) \subset U$ である．

証明. $\Gamma = \{\lambda\bar{\xi}; \lambda > 0\}$ とおく．$(\bar{x},\bar{\xi}) \notin U$ とすると $U_{\bar{x}} \cap \Gamma = \emptyset$ ゆえ補題 2.3.1 より $(\bar{x},\bar{\xi}) \notin WF(\mathrm{op}(h)v)$ が従う． □

補題 2.3.2. $h \in S^0$ の support はコンパクト錐集合に含まれるとし $u \in H^q$ は任意の N に対して $\hat{u}(\xi) = O(|\xi|^{-N})$ を開錐 Γ で満たすとする．このとき任意の N および任意の開錐 $\Gamma' \Subset \Gamma$ に対して C が存在し

$$\big|\mathcal{F}(\mathrm{op}(h)u)(\xi)\big| \le C\langle\xi\rangle^{-N}\big\{\sup_{\eta\in\Gamma}(1+|\eta|)^{N+(d+1)/2}|\hat{u}(\eta)| + \|u\|_q\big\},\ \ \xi \in \Gamma'$$

が成立する．

証明. (2.3.7) より $\mathcal{F}(\mathrm{op}(h)u)(\xi) = \pi^{-d}\int e^{-2ix(\xi-\eta)}h(x,\eta)\hat{u}(2\eta-\xi)dxd\eta$ を

$$\begin{aligned}\pi^d\mathcal{F}(\mathrm{op}(h)u)(\xi) &= \int_{|\xi-\eta|<c|\xi|} + \int_{|\xi-\eta|\ge c|\xi|} = \int_{|\xi-\eta|<c|\xi|}\\ &+ \int_{|\eta|\ge c|\xi|} e^{2ix\eta}h(x,\eta+\xi)\hat{u}(2\eta+\xi)dxd\eta = I_1 + I_2\end{aligned}$$

と書く．$0<c<1$ を $|\xi-\eta|<c|\xi|$ かつ $\xi \in \Gamma'$ なら $2\eta-\xi = \xi+2(\eta-\xi) \in \Gamma$ が成立するように選ぶと部分積分によって

$$\begin{aligned}|I_1(\xi)| &\le \int_{|\xi-\eta|<c|\xi|}\langle\xi-\eta\rangle^{-2N}|\langle D_x/2\rangle^{2N}h(x,\eta)||\hat{u}(2\eta-\xi)|dxd\eta\\ &\le C\sup_{\eta\in\Gamma}(1+|\eta|)^{2N}|\hat{u}(\eta)|\int\langle\xi-\eta\rangle^{-2N}(1+|2\eta-\xi|)^{-2N}d\eta\\ &\le C'(1+|\xi|)^{-2N+d+1}\sup_{\eta\in\Gamma}(1+|\eta|)^{2N}|\hat{u}(\eta)|, \quad \xi \in \Gamma'\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $1+|\xi|+|\eta| \le 3(1+|\xi-\eta|)(1+|2\eta-\xi|)$ を利用した．I_2 について

は $|\eta| \geq c|\xi|$ で $|2\eta+\xi| \leq (2+c^{-1})|\eta|$ に注意すると部分積分により

$$\begin{aligned}|I_2(\xi)| &\leq \int_{|\eta|\geq c|\xi|} \langle\eta\rangle^{-2N} |\langle D_x/2\rangle^{2N} h(x,\eta+\xi)||\hat{u}(2\eta+\xi)|dxd\eta \\ &\leq C\langle\xi\rangle^{-2N+|q|+(d+1)/2} \int \langle\eta\rangle^{-(d+1)/2} \langle 2\eta+\xi\rangle^{q} |\hat{u}(2\eta+\xi)|d\eta \\ &\leq C'\langle\xi\rangle^{-2N+|q|+(d+1)/2}\|u\|_q\end{aligned}$$

が従う．N は任意であるから主張が示された． □

命題 2.3.2. $h(x,\xi) \in S^0$ とする．このとき $WF(\mathrm{op}(h)u) \subset WF(u)$.

証明. $(\bar{x},\bar{\xi}) \notin WF(u)$ とする．$\bar{x}$ のある近傍で 1 となる $\beta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と $\bar{\xi}$ の錐近傍 Γ が存在し任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{F}(\beta v)(\xi) = O(|\xi|^{-N})$ が Γ で成り立つ．$\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $\bar{x}$ のある近傍で 1 で $\mathrm{supp}\,\alpha \subset \{\beta = 1\}$ を満たすものとすると定理 2.2.1 より $\alpha\#(\beta\#h - h\#\beta) \in S^{-\infty}$ でまた $\alpha\#h = h_N + r_N$, $r_N \in S^{-N}$ と書ける．ここで $h_N \in S^0$ の support はコンパクトである．これより $\alpha\,\mathrm{op}(h)v = \mathrm{op}(h_N)\beta v + w$, $w \in H^{-N+q}$ と書ける．$\tilde{\alpha} \in C_0^\infty$ を $\bar{x}$ のある近傍で 1 で $\mathrm{supp}\,\tilde{\alpha} \subset \{\alpha = 1\}$ と選ぶと $\tilde{\alpha}\,\mathrm{op}(h)v = \tilde{\alpha}\mathrm{op}(h_N)\beta v + \tilde{\alpha}w$ ゆえ $\tilde{\alpha}\mathrm{op}(h_N)\beta v$ に補題 2.3.2 を $\tilde{\alpha}w$ に (2.3.4) を適用すると $(\bar{x},\bar{\xi}) \notin WF(\mathrm{op}(h)u)$ が従う． □

κ を $\mathbb{R}^d$ 上の微分同相写像，$U \subset \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus 0)$ を錐集合とするとき

$$\kappa^* U = \{(x, {}^t\kappa'(x)\eta); (\kappa(x),\eta) \in U\}$$

と定める．f が $\mathbb{R}^d$ 上の関数のときは $\kappa^* f = f(\kappa(x))$ は κ による f の引き戻しを表すものとする．次のことは定義から明らかである．

$$ {}^t\kappa'(x)U_y = \big(\kappa^* U\big)_x \quad (y = \kappa(x)). \tag{2.3.8}$$

命題 2.3.3. κ は $\mathbb{R}^d$ 上の微分同相写像で，あるコンパクト集合の外では線形変換であるとする．U, V を $V \cap \kappa^* U = \emptyset$ を満たす 2 つの閉錐集合とする．また $h, k \in S^0$ は $\mathrm{supp}\,h \subset U$, $\mathrm{supp}\,k \subset V$ とする．このとき任意の $p, q \in \mathbb{R}$ に対して C が存在し次が成り立つ.

$$\|\mathrm{op}(k)\kappa^*\mathrm{op}(h)v\|_p \leq C\|v\|_q, \quad v \in H^q.$$

証明. 最初に $\kappa(x)$ が正則な線形変換 Ax とする．このとき

$$\begin{aligned}\kappa^*\mathrm{op}(h)v &= (2\pi)^{-d}\int e^{i(Ax-y)\xi} h((Ax+y)/2,\xi)v(y)dyd\xi \\ &= (2\pi)^{-d}\int e^{i(x-y)\,{}^tA\xi} h(A(x+y)/2,\xi)v(Ay)|\mathrm{det}A|dyd\xi \\ &= (2\pi)^{-d}\int e^{i(x-y)\xi} h(A(x+y)/2,{}^tA^{-1}\xi)v(Ay)dyd\xi\end{aligned}$$

であるから $h_A(x,\xi) = h(Ax, {}^t\!A^{-1}\xi)$ とおくと $\kappa^*\mathrm{op}(h)v = \mathrm{op}(h_A)\kappa^* v$ である．$\mathrm{supp}\, h_A \subset \kappa^* U$ より $k\#h_A \in S^{-\infty}$ となる．ゆえに $\|\mathrm{op}(k)\kappa^*\mathrm{op}(h)v\|_p = \|\mathrm{op}(k\#h_A)\kappa^* v\|_p \le C\|\kappa^* v\|_q \le C'\|v\|_q$ は明らかである．つぎに U, V がコンパクト錐集合と仮定してよいことを確かめる．いま $\kappa(x)$ は $|x| \ge R > 2$ では線形変換 Ax に等しいとしてよい．$\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $|x| \le R$ で 1, $|x| \ge R+1$ で 0 とする．$\mathrm{op}(k)\kappa^*\mathrm{op}(h) = \mathrm{op}(k)(\chi + (1-\chi))\kappa^*\mathrm{op}(h)$ と書くと $\mathrm{op}(k)(1-\chi)\kappa^*\mathrm{op}(h) = \mathrm{op}(k)(1-\chi)\mathrm{op}(h_A)\kappa^*$ である．定理 2.2.1 によれば $k\#(1-\chi)\#h_A \in S^{-\infty}$ であるから $\mathrm{op}(k\#\chi)\kappa^*\mathrm{op}(h)$ を考えればよい．再び定理 2.2.1 より任意の N に対し support がコンパクトな $k_N \in S^0$ があって $k\#\chi - k_N \in S^{-N}$ となるので $\mathrm{op}(k_N)\kappa^*\mathrm{op}(h)$ を考えればよい．$\tilde\chi(x) = \chi(\kappa^{-1}(x))$ とし $\mathrm{op}(k_N)\kappa^*\mathrm{op}(h) = \mathrm{op}(k_N)\kappa^*(\tilde\chi + (1-\tilde\chi))\mathrm{op}(h)$ と書いて同様に考えると $\mathrm{op}(k_N)\kappa^*\tilde\chi\mathrm{op}(h)$ を考えればよく，$\tilde\chi\#h - h_{N'} \in S^{-N'}$ と書くと結局 $\mathrm{op}(k_N)\kappa^*\mathrm{op}(h_{N'})$ を考えればよいことがわかる．すなわち U, V はコンパクト錐集合と仮定できる．

U, V のコンパクト錐近傍 $U \Subset W$, $V \Subset Z$ で $Z \cap \kappa^* W = \emptyset$ を満たすものをとってくる．$\tilde\Gamma_y = \mathring{W}_y$, $\Gamma_x = \mathring{Z}_x$ とおくと $U_y \cap \tilde\Gamma_y^c = \emptyset$ より補題 2.3.1 を適用すると y の近傍 Ω_y があって任意の $\alpha \in C_0^\infty(\Omega_y)$，任意の $p, q \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left|\mathcal{F}(\alpha\,\mathrm{op}(h)v)(\eta)\right| \le C(1+|\eta|)^p\|v\|_q, \quad \eta \in \tilde\Gamma_y^c,\ \ v \in H^q \tag{2.3.9}$$

が成立する．同様に $V_x \cap \Gamma_x^c = \emptyset$ より x の近傍 ω_x と Γ_x^c を内部に含む閉錐 $\hat\Gamma_x$ があって任意の $\beta \in C_0^\infty(\omega_x)$, 任意の $p, q \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left|\mathcal{F}(\mathrm{op}(k)\beta u)(\xi)\right| \le C(1+|\xi|)^p\|u\|_q, \quad \xi \in \hat\Gamma_x,\ \ u \in H^q \tag{2.3.10}$$

が成り立つ．必要なら ω_x をさらに小さくとって $\kappa(\omega_x) \Subset \Omega_y$ $(y = \kappa(x))$ と仮定してよい．$\pi(Z)$ はコンパクトであるから有限個の ω_{x_i} で覆うことができる．$\omega_{x_i} = \omega_i$ と記すことにする．$\Omega_i = \Omega_{y_i}$, $\Gamma_i = \Gamma_{x_i}$, $\tilde\Gamma_i$, $\hat\Gamma_i$ なども同様とする．次に $\beta_i \in C_0^\infty(\omega_i)$ を $\pi(Z)$ 上で $\sum_i \beta_i = 1$ を満たすようにとってくる．$k\#(1 - \sum\beta_i) \in S^{-\infty}$ であるから $\mathrm{op}(k)$ の代わりに $\sum_i \mathrm{op}(k)\beta_i$ を考えればよい．$\kappa(\omega_i)$ 上では 1 であるような $\alpha_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ を考えると $\beta_i\kappa^*(1-\alpha_i) \equiv 0$ であるから $\mathrm{op}(k)\beta_i\kappa^*$ の代わりに $\sum_i \mathrm{op}(k)\beta_i\kappa^*\alpha_i$ を考えればよい．$u = \alpha_i\mathrm{op}(h)v$ とおいて $\kappa^* u$ を逆 Fourier 変換を用いて表すと $\kappa^* u = (2\pi)^{-d}\int e^{i\langle\kappa(x),\eta\rangle}\hat u(\eta)d\eta$ より

$$\mathcal{F}(\beta_i\kappa^* u) = (2\pi)^{-d}\int \beta_i(x)e^{i(\langle\kappa(x),\eta\rangle - \langle x,\xi\rangle)}\hat u(\eta)d\eta dx = \int I(\xi,\eta)\hat u(\eta)d\eta$$

とかける．ここで

$$I(\xi,\eta) = (2\pi)^{-d}\int \beta_i(x)e^{i(\langle\kappa(x),\eta\rangle - \langle x,\xi\rangle)}dx$$

とおいた．最初に任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\bigl|I(\xi,\eta)\bigr| \le C_N(1+|\xi|)^{-N}(1+|\eta|)^N, \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^d \tag{2.3.11}$$

が成り立つことをみておく．$d(\langle \kappa(x),\eta\rangle - \langle x,\xi\rangle) = \langle dx, {}^t\kappa'(x)\eta - \xi\rangle$ に注意する．仮定より $B>0$ があって $|{}^t\kappa'(x)\eta| \le B|\eta|$ なので $|\xi| \ge 2B|\eta|$ なら $|{}^t\kappa'(x)\eta - \xi| \ge |\xi|/2$ が成立する．そこで部分積分を繰り返すと $|I(\xi,\eta)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N}$ が得られる．一方 $|\xi| \le 2B|\eta|$ のときは自明な不等式 $|I(\xi,\eta)| \le C \le C(2B)^N(1+|\xi|)^{-N}(1+|\eta|)^N$ より (2.3.11) は明らかである．

次に ω_i は $x \in \omega_i$ かつ $\eta \in \tilde{\Gamma}_i$ ならば ${}^t\kappa'(x)\eta \notin \Gamma_i$ が成立するように選べていると仮定してよいので $\epsilon > 0$ があって

$$x \in \omega_i \;\; \eta \in \tilde{\Gamma}_i,\;\; \xi \in \Gamma_i \Longrightarrow |{}^t\kappa'(x)\eta - \xi| \ge \epsilon(|\xi|+|\eta|) \tag{2.3.12}$$

が成り立つ．実際，$|\xi|+|\eta|=1$ のとき左辺が 0 にならないことから斉次性を用いればよい．(2.3.12) を利用して部分積分を繰り返すと

$$\bigl|I(\xi,\eta)\bigr| \le C_N(1+|\xi|+|\eta|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma_i,\;\; \eta \in \tilde{\Gamma}_i \tag{2.3.13}$$

が得られる．まとめると

$$\begin{aligned}\bigl|\mathcal{F}(\beta_i\kappa^* u)(\xi)\bigr| \le C'_N\Bigl(&\int_{\tilde{\Gamma}_i} |\hat{u}(\eta)|(1+|\xi|+|\eta|)^{-N}d\eta \\ &+(1+|\xi|)^{-N}\int_{\tilde{\Gamma}_i^c} |\hat{u}(\eta)|(1+|\eta|)^N d\eta\Bigr), \quad \xi \in \Gamma_i\end{aligned}$$

が成立する．(2.3.9) より任意の p に対して $\eta \in \tilde{\Gamma}_i^c$ で $|\hat{u}(\eta)| \le C(1+|\eta|)^p\|v\|_q$ が成り立つことに注意すると任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $\bigl|\mathcal{F}(\beta_i\kappa^* u)(\xi)\bigr| \le C\langle\xi\rangle^{-N}\|v\|_q$ $(\xi \in \Gamma_i)$ が従う．ここで補題 2.3.2 を $\Gamma = \Gamma_i$, $\Gamma' = \hat{\Gamma}_i^c$ として適用すると

$$\begin{aligned}\bigl|\mathcal{F}(\mathrm{op}(k)\beta_i\kappa^*\alpha_i\mathrm{op}(h)v)(\xi)\bigr| &\le C\langle\xi\rangle^{-N}\bigl(\|v\|_q + \|\alpha_i\mathrm{op}(h)v\|_q\bigr) \\ &\le C'\langle\xi\rangle^{-N}\|v\|_q, \quad \xi \in \hat{\Gamma}_i^c\end{aligned}$$

が得られる．$\xi \in \hat{\Gamma}_i$ のときは (2.3.10) より任意の p に対して

$$\bigl|\mathcal{F}(\mathrm{op}(k)\beta_i\kappa^*\alpha_i\mathrm{op}(h)v)(\xi)\bigr| \le C\langle\xi\rangle^p\|\kappa^*\alpha_i\mathrm{op}(h)v\|_q \le C'\langle\xi\rangle^p\|v\|_q$$

が得られるのでこの 2 つを合わせて結論を得る． □

第 3 章

1 階双曲型作用素

実数値の $\lambda(t,x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R};S^1)$ に対して $D_t + \mathrm{op}(\lambda)$ に対する初期値問題が一意的に可解であることを示す．これより初期値問題の解作用素が定義できるがこの解作用素が有限伝播の性質を持つことも示す．この章の議論は第 6 章で行う議論の雛形でもある．

3.1 初期値問題

この節では記号を少し変えて $x_0 = t$, $x = (x_1,\ldots,x_d)$, $D = (D_1,\ldots,D_d)$, $D_t = -i\,\partial/\partial t$ と書くことにする．次の初期値問題を考えよう．

$$\begin{cases} D_t u + \mathrm{op}(\lambda(t))u = f, & \tau < t,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(\tau,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ここで $\lambda(t,x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R};S^1)$ とし，更に $\mathsf{Im}\lambda(t,x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R};S^0)$ と仮定する．

補題 3.1.1. $P = D_t + \mathrm{op}(\lambda(t))$ とおき $T > 0$ を 1 つ固定する．このとき任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し $C > 0$ が存在して任意の $u \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau,T];H^{s+1-j})$ について

$$\|u(t,\cdot)\|_s \le C\Big(\|u(\tau,\cdot)\|_s + \int_\tau^t \|Pu(t')\|_s dt'\Big), \quad -T \le \tau \le t \le T \tag{3.1.2}$$

が成立する．

証明. $\theta > 0$ をパラメーターとして $P_\theta = e^{-\theta t}Pe^{\theta t} = D_t - i\theta + \mathrm{op}(\lambda)$ を考えると

$$-2\mathsf{Im}(P_\theta u, u) = \partial_t\|u(t)\|^2 + 2\theta\|u(t)\|^2 - 2(\mathrm{op}(\mathsf{Im}\lambda)u,u)$$

である．仮定と定理 2.2.2 から $C > 0$ が存在し $|t| \le T$ で $|(\mathrm{op}(\mathsf{Im}\lambda)u,u)| \le C\|u\|^2$ が成り立つので u を $\langle D\rangle^s u$ で置き換えると

$$-2\mathsf{Im}(P_\theta\langle D\rangle^s u, \langle D\rangle^s u) \ge \partial_t\|u(t)\|_s^2 + 2(\theta - C)\|u\|_s^2$$

が従う．$[P_\theta, \langle D\rangle^s] = [\mathrm{op}(\lambda), \langle D\rangle^s] = \mathrm{op}(\lambda\#\langle\xi\rangle^s - \langle\xi\rangle^s\#\lambda)$ であるが定理 2.2.1 より $\lambda\#\langle\xi\rangle^s - \langle\xi\rangle^s\#\lambda \in S^s$ ゆえ任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して θ_s が存在して $\theta \geq \theta_s$ のとき

$$2\|P_\theta u\|_s\|u\|_s \geq -2\mathsf{Im}(\langle D\rangle^s P_\theta u, \langle D\rangle^s u) \geq \partial_t\|u(t)\|_s^2 + \theta\|u\|_s^2 \tag{3.1.3}$$

が成立する．τ から t まで積分して $u(t)$ を $e^{-\theta t}u(t)$ で置き換えると

$$e^{-2\theta t}\|u(t)\|_s^2 \leq e^{-2\theta\tau}\|u(\tau)\|_s^2 + \int_\tau^t e^{-2\theta t'}\|Pu(t')\|_s\|u(t')\|_s dt'$$

を得る．この式の $[\tau, t]$ 上での sup を考えると

$$M^2 = \sup_{\tau\leq t'\leq t} e^{-2\theta t'}\|u(t')\|_s^2 \leq e^{-2\theta\tau}\|u(\tau)\|_s^2 + 2M\int_\tau^t e^{-\theta t'}\|Pu(t')\|_s dt'$$

が従いこれより

$$\Big(M - \int_\tau^t e^{-\theta t'}\|Pu(t')\|_s dt'\Big)^2 \leq \Big(e^{-\theta\tau}\|u(\tau)\|_s + \int_\tau^t e^{-\theta t'}\|Pu(t')\|_s dt'\Big)^2$$

が成り立ち (3.1.2) を得る． □

定理 3.1.1. $T > 0$ を 1 つ固定し $|\tau| \leq T$ とする．このとき任意の $s \in \mathbb{R}$, 任意の $f \in L^1((\tau, T); H^s)$ および任意の $\phi \in H^s$ に対して初期値問題 (3.1.1) の一意的な解 $u \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau, T]; H^{s-j})$ が存在する．またこの $u(t)$ は (3.1.2) を満たす．

証明. $f = 0, \phi = 0$ とすると (3.1.2) から $u = 0$ が従い一意性が示される．次に u の存在を示す．命題 7.2.1 より $P^* = D_t + \mathrm{op}(\bar\lambda(t))$ であるから $\mathsf{Im}\bar\lambda = -\mathsf{Im}\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}; S^0)$ に注意し $P_\theta^* = e^{\theta t}P^*e^{-\theta t} = D_t + i\theta + \mathrm{op}(\bar\lambda)$ とおき同様に考えると

$$2\,\mathsf{Im}(\langle D\rangle^{-s}P_\theta^* v, \langle D\rangle^{-s}v) \geq -\partial_t\|v(t)\|_{-s}^2 + \theta\|u\|_{-s}^2, \quad \theta \geq \theta_s'$$

が成り立つ．$[t, T]$ 上で積分し v を $e^{\theta t}v$ で置き換え補題 3.1.1 の議論を繰り返すと

$$\|v(t)\|_{-s} \leq C\Big(\|v(T)\|_{-s} + \int_t^T \|P^*v(t)\|_{-s}dt\Big) \tag{3.1.4}$$

が得られる．つぎに $\{P^*v; v \in C_0^\infty(\{(t,x); t < T\})\}$ 上の反線形形式

$$\mathcal{L} : P^*v \mapsto -i(\phi, v(\tau)) + \int_\tau^T (f, v)dt$$

を考えよう．(3.1.4) より $\mathcal{L}$ は well-defined でさらに

$$|(\phi, v(\tau))| \le \|\phi\|_s \|v(\tau)\|_{-s} \le C\|\phi\|_s \int_\tau^T \|P^* v(t)\|_{-s} dt,$$

$$\begin{aligned}\Big|\int_\tau^T (f,v)dt\Big| &\le \sup_{\tau \le t \le T} \|v(t)\|_{-s} \int_\tau^T \|f\|_s dt \\ &\le C \int_\tau^T \|P^* v(t)\|_{-s} dt \int_\tau^T \|f(t)\|_s dt\end{aligned}$$

と評価されるので Hahn-Banach の定理によって $\mathcal{L}$ は $L^1([\tau, T]; H^{-s})$ 上の反線形形式に拡張される．ゆえに $L^1([\tau, T]; H^{-s})$ の双対空間 $L^\infty([\tau, T]; H^s)$ の元 u が存在し任意の $g \in L^1([\tau, T]; H^{-s})$ に対して

$$\mathcal{L}(g) = \int_\tau^T (u, g) dt$$

が成立する．ここで $g = P^* v$ と選ぶと

$$-i(\phi, v(\tau)) + \int_\tau^T (f, v) dt = \int_\tau^T (u, P^* v) dt \tag{3.1.5}$$

が任意の $v \in C_0^\infty(\{(t,x); t < T\})$ について成立する．v を $C_0^\infty(\{(t,x); 0 < t < T\})$ に制限することによって u は超関数の意味で $Pu = f$ を $(\tau, T) \times \mathbb{R}^d$ で満たすことがわかる．$D_t u = -\mathrm{op}(\lambda) u + f$ から $u \in C([\tau, T]; H^{s-1})$ が従い $v(\tau) \in C_0^\infty$ は任意であるから (3.1.5) より $u(\tau) = \phi$ も従う．そこで $\phi_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f_\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+d})$ を

$$\|\phi - \phi_\nu\|_s \to 0, \quad \int_\tau^T \|f - f_\nu\|_s dt \to 0$$

と選ぶ．このとき $D_t u_\nu + \mathrm{op}(\lambda) u_\nu = f_\nu$ の解 $u_\nu \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau, T]; H^{s+1-j})$ で $u_\nu(\tau) = \phi_\nu$ を満たすものがある．(3.1.2) より $\nu \to \infty$ のとき u_ν は $C([\tau, T]; H^s)$ の Cauchy 列となるのでその極限が求める解になる．証明より極限の u が (3.1.2) を満たすことは明らかである． □

系 3.1.1. $\phi \in H^\infty$ とすると (3.1.1) で $f = 0$ のとき $u \in C^1([\tau, T]; H^\infty(\mathbb{R}^d))$ である．

3.2　解作用素の有限伝播性

定義 3.2.1. $\mathrm{Re}\lambda(t) = \lambda_1(t) \in S^1$ とおく．$f(t,x,\xi) \in C^\infty((-T, T); S^0)$ がある $c > 0$ について

$$\partial_t f \ge c, \quad \partial_t f \ge \big|\{\lambda_1, f\}\big| \tag{3.2.6}$$

を満たすとき f は (P に対して) 空間的であるという．

f を空間的とするとき

$$\bar{f}(t,x,\xi) = \begin{cases} \exp\left(1/f(t,x,\xi)\right) & (f<0) \\ 0 & (f \ge 0) \end{cases} \tag{3.2.7}$$

とおき，さらに

$$\bar{f}_1 = f^{-1}(\partial_t f)^{1/2}\bar{f}, \quad m = f(\partial_t f)^{-1/2} \tag{3.2.8}$$

と定義する．$\bar{f}$, $\bar{f}_1$, $\partial_t \bar{f}$, $m \in S^0$ などを確かめることは容易である．また

$$\bar{f} - m\#\bar{f}_1 \in S^{-1}$$

も明らかである．$\ell \ge 0$ を 1 つ固定し $w_\delta = \langle \delta\xi\rangle^{-\ell}$ $(0<\delta<1)$ とおき

$$F^\delta = \mathrm{op}(w_\delta \bar{f}), \quad F_1^\delta = \mathrm{op}(w_\delta \bar{f}_1)$$

と定義する．δ によらない C_β があって $|\partial_\xi^\beta w_\delta^{\pm 1}| \le C_\beta w_\delta^{\pm1}\langle\xi\rangle^{-|\beta|}$ が成立することをみるのは容易である．以下の考察はすべて $0<\delta<1$ について一様であり，このことはいちいちことわらない．

定義 3.2.2. $S_i(t,\cdot)$, $i=1,2$ を $C^1((-T,T);H^s)$ 上の実数値の汎関数とする．δ によらない定数 $C = C_s > 0$ が存在して

$$\left|S_1(t,u(t)) - S_2(t,u(t))\right| \le C\left(\|u\|_{s-1/2}^2 + \|F^\delta u\|_s^2\right),\ \ u(t) \in C^1((-T,T);H^s)$$

が成立するとき $S_1 \overset{s}{\sim} S_2$ と書くことにする．また $S_1(t,u(t)) - S_2(t,u(t))$ が上式の右辺で評価されるとき $S_1 \overset{s}{\lesssim} S_2$ あるいは $S_2 \overset{s}{\gtrsim} S_1$ と表す．

以下，定数 c, C は δ には依らないが一般には s に依存し，行ごとに変わりうる．まず $(\langle D\rangle^s[D_t - i\theta, F^\delta]u, \langle D\rangle^s F^\delta u) = -i(\langle D\rangle^s\mathrm{op}(w_\delta\partial_t\bar{f})u, \langle D\rangle^s F^\delta u)$ を考えよう．$w_\delta\bar{f} - m\#(w_\delta\bar{f}_1) \in S^{-1}$ より $F^\delta = \mathrm{op}(m)F_1^\delta + \mathrm{op}(r)$, $r \in S^{-1}$ と書くことができる．次に交換子を使って $\mathrm{op}(m)$ を順次左に移してゆく．各操作で生じる新たな作用素のシンボルはすべて S^{-1} に属する．最後に $m\#(w_\delta\partial_t\bar{f}) + w_\delta\bar{f}_1 \in S^{-1}$ を利用すると

$$(\langle D\rangle^s[D_t - i\theta, F^\delta]u, \langle D\rangle^s F^\delta u) \overset{s}{\sim} i\|F_1^\delta u\|_s^2 \tag{3.2.9}$$

が成立することが容易にわかる．次に $(\langle D\rangle^s[\mathrm{op}(\lambda), F^\delta]u, \langle D\rangle^s F^\delta u)$ を考察する．この項は明らかに $\overset{s}{\sim} -i(\langle D\rangle^s\mathrm{op}(\{\lambda, w_\delta\bar{f}\})u, \langle D\rangle^s F^\delta u)$ である．$\{\lambda, w_\delta\bar{f}\} = \{\lambda,\bar{f}\}w_\delta + \{\lambda, w_\delta\}\bar{f}$ と 2 項に分けると $m\#(\{\lambda,\bar{f}\}w_\delta) + \left(\{\lambda,f\}/\partial_t f\right)\#(w_\delta\bar{f}_1) \in S^{-1}$ ゆえ上と同様にしてこの項は

$$\begin{aligned} &\overset{s}{\sim} (\langle D\rangle^s\mathrm{op}(i(\{\lambda,f\}/\partial_t f))F_1^\delta u, \langle D\rangle^s F_1^\delta u) \\ &\overset{s}{\sim} (\mathrm{op}(i(\{\lambda,f\}/\partial_t f))\langle D\rangle^s F_1^\delta u, \langle D\rangle^s F_1^\delta u) \end{aligned}$$

である．もう一方の項については $\{\lambda, w_\delta\}w_\delta^{-1} \in S^0$ は容易に確かめられるので $\{\lambda, w_\delta\}\bar{f} - (\{\lambda, w_\delta\}w_\delta^{-1})\#(w_\delta \bar{f}) \in S^{-1}$ となってこの項は

$$\overset{s}{\sim} (\langle D\rangle^s \mathrm{op}(i\{\lambda, w_\delta\}w_\delta^{-1})F^\delta u, \langle D\rangle^s F^\delta u) \overset{s}{\sim} 0$$

である．したがってまとめると

$$\begin{aligned}&-2\mathsf{Im}(\langle D\rangle^s [F^\delta, P_\theta]u, \langle D\rangle^s F^\delta u)\\ &\overset{s}{\gtrsim} 2\|F_1^\delta u\|_s^2 + 2\mathsf{Re}(\mathrm{op}(i\{\lambda, f\}/\partial_t f)\langle D\rangle^s F_1^\delta u, \langle D\rangle^s F_1^\delta u)\end{aligned}$$

が成立する．右辺第 2 項を $\|\mathrm{op}(\{\lambda, f\}/\partial_t f)\langle D\rangle^s F_1^\delta u\|^2 + \|F_1^\delta u\|_s^2$ で評価すると右辺はさらに

$$\overset{s}{\gtrsim} \|F_1^\delta u\|_s^2 - \|\mathrm{op}(\{\lambda, \bar{f}\}/\partial_t f)\langle D\rangle^s F_1^\delta u\|^2$$

と評価される．$(\{\lambda, f\}/\partial_t f)\#(\{\lambda, f\}/\partial_t f) - (\{\lambda, f\}/\partial_t f)^2 \in S^{-1}$ より右辺はさらに $\overset{s}{\sim} \big(\mathrm{op}(1 - (\{\lambda, f\}/\partial_t f)^2)\langle D\rangle^s F_1^\delta u, \langle D\rangle^s F_1^\delta u)$ である．f を空間的とすると $1 - (\{\lambda, f\}/\partial_t f)^2 \geq 0$ であるから後で証明する系 5.2.1 を適用すると

$$\big(\mathrm{op}(1 - (\{\lambda, f\}/\partial_t f)^2)\langle D\rangle^s F_1^\delta u, \langle D\rangle^s F_1^\delta u) \geq -C\|F_1^\delta u\|_{-1/2+s} \overset{s}{\sim} 0$$

となる．まとめると

補題 3.2.1. f を空間的とすると任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して C_s が存在して

$$-\mathsf{Im}(\langle D\rangle^s [F^\delta, P_\theta]u, \langle D\rangle^s F^\delta u) \geq -C_s\big(\|u\|_{s-1/2}^2 + \|F^\delta u\|_s^2\big)$$

が成立する．

(3.1.3) と補題 3.2.1 より

$$\begin{aligned}&-2\mathsf{Im}(\langle D\rangle^s F^\delta P_\theta u, \langle D\rangle^s F^\delta u) = -2\mathsf{Im}(\langle D\rangle^s [F^\delta, P_\theta]u, \langle D\rangle^s F^\delta u)\\ &-2\mathsf{Im}(\langle D\rangle^s P_\theta F^\delta u, \langle D\rangle^s F^\delta u) \geq \partial_t\|F^\delta u\|_s^2 + (\theta - C_s)\|F^\delta u\|_s^2 - C_s\|u\|_{s-1/2}^2\end{aligned}$$

を得る．θ を $\theta - C_s \geq 0$ と選ぶ．いまある l があって $\lim_{t\downarrow\tau}\|u(t)\|_l = 0$ が成り立つとする．ℓ を $s + \ell \leq l$ と選ぶと $\delta > 0$ のとき $\|F^\delta u\|_s \leq C_\delta\|u\|_l$ ゆえ $\lim_{t\downarrow\tau}\|F^\delta u(t)\|_s = 0$ であるから

$$\|F^\delta u(t)\|_s^2 \leq C_s\int_\tau^t \|u(t')\|_{s-1/2}^2 dt' + 2\int_\tau^t \|F^\delta u\|_s\|F^\delta P_\theta u\|_s dt'$$

が従う．u を $e^{-\theta t}u$ で置き換えると $|\tau| \leq T$, $\tau \leq t \leq T$ のとき

$$\|F^\delta u(t)\|_s^2 \leq C_s\Big(\int_\tau^t \|u(t')\|_{s-1/2}^2 dt' + \int_\tau^t \|F^\delta u\|_s\|F^\delta P u\|_s dt'\Big)$$

が成り立つ．そこで

$$M_s(u;t) = \sup_{\tau \le t' \le t} \|u(t')\|_s \tag{3.2.10}$$

とおくと $M_s^2(F^\delta u;t) \le C_s M_{s-1/2}^2(u;t) + C_s M_s(F^\delta u;t)\int_\tau^t \|F^\delta Pu(t')\|_s dt'$ が従い $M_s(F^\delta u;t) \le C_s M_{s-1/2}(u;t) + C_s \int_\tau^t \|F^\delta Pu(t')\|_s dt'$ を得る．$\delta \to 0$ として

$$M_s(Fu;t) \le C_s M_{s-1/2}(u;t) + C_s \int_\tau^t \|FPu(t')\|_s dt' \tag{3.2.11}$$

が成立する．まとめると

補題 3.2.2. f は P に対して空間的とし $F = \mathrm{op}(\bar{f})$ とおく．ある $l \in \mathbb{R}$ について $u \in C([\tau,T];H^l)$ で $\lim_{t\downarrow\tau} \|u(t)\|_l = 0$ が成り立つとする．このとき $M_{s-1/2}(u;t) < +\infty$, $\tau \le t \le T$ かつ $FPu \in L^1([\tau,T];H^s)$ ならば $M_s(Fu;t) < +\infty$, $\tau \le t \le T$ である．さらに (3.2.11) が成り立つ．

前節で $P = D_t + \mathrm{op}(\lambda(t))$ に対する初期値問題を解いたがこの解作用素が有限伝播であることを示そう．そのためにまず空間的なシンボルの族を導入する．$\chi(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ を非減少で $|s| \le 1$ では $\chi(s) = s$, $|s| \ge 2$ で $|\chi(s)| = 2$ となるもの，また $0 \le \tilde{\chi}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ を原点の近傍では 0 で $|\xi| \ge 1$ で $\tilde{\chi} = 1$ を満たすものとして $w = (y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus 0)$ に対して

$$d_\epsilon(x,\xi;w) = \left\{\Sigma_{j=1}^d \chi^2(x_j - y_j) + \tilde{\chi}(\xi)\big|\xi/|\xi| - \eta/|\eta|\big|^2 + \epsilon^2\right\}^{1/2}$$

とおく．$|\xi| \ge 1$ のとき $d_\epsilon^2(x,\xi;w) \ge \min\{1, |x-y|^2\} + |\xi/|\xi| - \eta/|\eta||^2 + \epsilon^2$ に注意しよう．以下しばしば w を省略して $d_\epsilon(x,\xi)$ と書く．$\epsilon \ne 0$ なら $d_\epsilon \in S^0$ を確かめるのは容易である．$0 < \nu$ を正のパラメーターとして

$$f_\epsilon(t,x,\xi;w) = t - \tau - 2\nu\epsilon + \nu d_\epsilon(x,\xi;w) \tag{3.2.12}$$

とおく．$\epsilon > 0$ によらない $C > 0$ があって $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d_\epsilon| \le C\langle\xi\rangle^{-|\beta|}$ $(|\alpha+\beta| = 1)$ が成り立っているので $\nu_0 > 0$ が存在して $0 < \nu \le \nu_0$ のとき f_ϵ は $\epsilon > 0$ によらず空間的である．

命題 3.2.1. (3.2.12) の f_ϵ に対して $F_\epsilon = \mathrm{op}(\bar{f}_\epsilon)$ とおく．ある $l, l' \in \mathbb{R}$ について $u \in C([\tau,T];H^l)$, $\lim_{t\downarrow\tau} \|u(t)\|_l = 0$ および $Pu \in L^1([\tau,T];H^{l'})$ とする．いまある $\epsilon_0 > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$ に対し $F_{\epsilon_0}Pu \in L^1([\tau,T];H^{s_0})$ とすると任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0$ および任意の $s \le s_0 - 1/2$ に対して $F_\epsilon u \in C([\tau,T];H^s)$ でさらに

$$\|F_\epsilon u(t)\|_s \le C\int_\tau^t \|F_{\epsilon_0}Pu(t_1))\|_{s_0} dt_1 + C\Big(\int_\tau^t \|Pu(t_1)\|_{l'} dt_1 + M_l(u;t)\Big)$$

が成立する．

証明. まず $\epsilon < \epsilon_j < \epsilon_0$ を単調減少で $j \to \infty$ のとき $\epsilon_j \downarrow \epsilon$ となるように選ぶ．以下 $F_j = F_{\epsilon_j}$, $f_j = f_{\epsilon_j}$ と書き j に関する帰納法で $l + j/2 \le s_0$ なる j に対して

$$
\begin{aligned}
&M_{l+j/2}(F_j u;t) \le C_j M_l(u;t)\\
&+C_j \int_\tau^t \big\{\|F_0 Pu(t_1)\|_{l+j/2} dt_1 + \|Pu(t_1)\|_{l'}\big\} dt_1
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

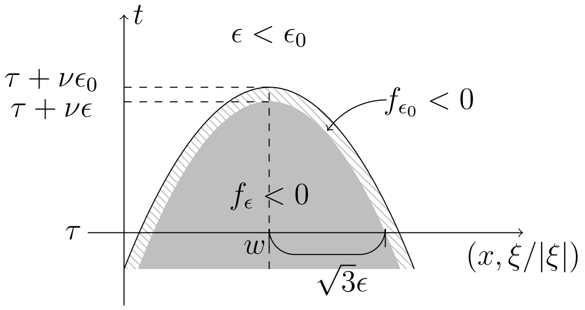
を示そう．$g_j \in S^0$ を $\mathrm{supp}\, g_j \subset \{f_j < 0\}$ および $\{f_{j+1} < 0\} \subset \{g_j = 1\}$ が満たされるように選ぶ．$F_{j+1} P\mathrm{op}(g_j)u = F_{j+1}\mathrm{op}(g_j)Pu + F_{j+1}[P, \mathrm{op}(g_j)]u$ と書くと定理 2.2.1 より C が存在し $\|F_{j+1}[P, \mathrm{op}(g_j)]u\|_{l+(j+1)/2} \le C\|u\|_l$ は明らかである．また $\bar{f}_{j+1} \# g_j - \bar{f}_{j+1} \in S^{-\infty}$ であるから同様に議論すると $\|F_{j+1}P\mathrm{op}(g_j)u\|_{l+(j+1)/2}$ は $C(\|F_{j+1}Pu\|_{l+(j+1)/2} + \|u\|_l + \|Pu\|_{l'})$ で評価される．また $k_j \in S^0$ があって $\bar{f}_{j+1} - k_j \# \bar{f}_0 \in S^{-\infty}$ であるから，結局

$$
\|F_{j+1}P\mathrm{op}(g_j)u\|_{l+(j+1)/2} \le C\big\{\|F_0 Pu\|_{l+(j+1)/2} + \|u\|_l + \|Pu\|_{l'}\big\}
$$

が成立する．従って補題 3.2.2 が $s = l + (j+1)/2 \le s_0$, $F = F_{j+1}$, $u = \mathrm{op}(g_j)u$ として適用でき

$$
\begin{aligned}
&M_{l+(j+1)/2}(F_{j+1}\mathrm{op}(g_j)u;t) \le C M_{l+j/2}(\mathrm{op}(g_j)u;t)\\
&+C\int_\tau^t \big\{\|F_0 Pu\|_{l+(j+1)/2} + \|Pu\|_{l'}\big\} dt_1 + CM_l(u;t)
\end{aligned}
\tag{3.2.14}
$$

が成立する．$\tilde{k}_j \in S^0$ があって $g_j - \tilde{k}_j \# \bar{f}_j \in S^{-\infty}$ より $M_{l+j/2}(\mathrm{op}(g_j)u;t) \le C\{M_{l+j/2}(F_j u;t) + M_l(u;t)\}$ が成り立つ．また $\bar{f}_{j+1} g_j = \bar{f}_{j+1}$ であるから同様にして $M_{l+(j+1)/2}(F_{j+1}u;t) \le C\{M_{l+(j+1)/2}(F_{j+1}\mathrm{op}(g_j)u;t) + M_l(u;t)\}$ が成立する．従って帰納法の仮定 (3.2.13) と (3.2.14) より (3.2.13) が $j+1$ について成立することがわかる．すなわち (3.2.13) が $l + j/2 \le s_0$ をみたす最大の $j = j_0$ について成立する．$\epsilon < \epsilon_{j_0}$ であるから $k \in S^0$ があって $\bar{f}_\epsilon = k\bar{f}_{j_0}$ とかけるので同様の議論から $M_{l+j_0/2}(F_\epsilon u;t) \le C\{M_{l+j_0/2}(F_{j_0}u;t) + M_l(u;t)\}$ ゆえ結論を得る．　□



命題 3.2.1 を初期値問題 (3.1.1) で $f = 0$, $\phi \ne 0$ の場合に応用してみよう．

系 3.2.1. $u \in \cap_{j=0}^{1} C^j([\tau, T]; H^{s-j})$ を $f = 0$, $\phi \in H^s$ のときの初期値問題 (3.1.1) の解とする．$0 < \epsilon_0 < 1/\sqrt{3}$ とし $\mathrm{supp}\, a \subset \{|x-y|^2 + |\xi/|\xi| - \eta/|\eta||^2 \le 3\epsilon_0^2\}$ を満たす任意の $a \in S^0$ に対して $\mathrm{op}(a)\phi \in H^\infty$ であるとする．このとき任意の $0 < \epsilon < \epsilon_0$ に対して $F_\epsilon u \in C([\tau, T]; H^\infty)$ である．

証明. $d = (|x-y|^2 + |\xi/|\xi| - \eta/|\eta||^2)^{1/2}$ とおく．(3.2.7) に倣って $\check{f}(t, x, \xi)$ を $f(t, x, \xi) > 0$ では $e^{-1/f}$ それ以外では 0 として定義する．f_ϵ は (3.2.12) で定義したものとすると $\check{f}_\epsilon \in S^0$ は容易にわかる．いま $\epsilon_i > 0$ を $\epsilon < \epsilon_2 < \epsilon_1 < \epsilon_0$ と選ぶと $|\xi| \ge 1$, $d \ge \sqrt{3}\,\epsilon_0$ のとき $\check{f}_{\epsilon_1}(\tau, x, \xi) > 0$ であるから $d \ge \sqrt{3}\,\epsilon_0$, $|\xi| \ge 2$ で $\alpha(x, \xi)\check{f}_{\epsilon_1}(\tau, x, \xi) = 1$ を満たすような $\alpha \in S^0$ が存在する．$w = u - \mathrm{op}(\alpha \check{f}_{\epsilon_1})\phi$ とおこう．$g = -P\mathrm{op}(\alpha \check{f}_{\epsilon_1})\phi$ とすると $Pw = g$ である．w_i をそれぞれ初期値問題

$$Pw_1 = g,\ \ w_1(\tau, \cdot) = 0, \quad Pw_2 = 0,\ \ w_2(\tau, \cdot) = w(\tau, \cdot)$$

の解とすると一意性より $w = w_1 + w_2$ である．$w_2(\tau) = \mathrm{op}(1 - \alpha \check{f}_{\epsilon_1}(\tau))\phi$ で $\mathrm{supp}(1 - \alpha \check{f}_{\epsilon_1}(\tau)) \subset \{d \le \sqrt{3}\,\epsilon_0\} \cup \{|\xi| \le 2\}$ であるから仮定より $w_2(\tau) \in H^\infty$ であり系 3.1.1 によると $w_2(t) \in C([\tau, T]; H^\infty)$ である．他方 $\bar{f}_{\epsilon_2}\check{f}_{\epsilon_1} \equiv 0$ であるから定理 2.2.1 を適用すると $F_{\epsilon_2} g \in C([\tau, T]; H^\infty)$ が従う．ゆえに命題 3.2.1 より $F_\epsilon w_1 \in C([\tau, T]; H^\infty)$ が成り立ち $F_\epsilon w \in C([\tau, T]; H^\infty)$ を得る．$u = w + \mathrm{op}(\alpha \check{f}_{\epsilon_1})\phi$ であったから $\bar{f}_\epsilon \check{f}_{\epsilon_1} \equiv 0$ より結論を得る． □

初期値問題 (3.1.1) で $\phi = 0$ のときの解作用素

$$G : L^1((\tau, T); H^s) \ni f(t) \mapsto u(t) \in C([\tau, T]; H^s) \tag{3.2.15}$$

を考える．このとき $(\tau, T) \times \mathbb{R}^d$ で $PGf = f$ でありまた

$$\|Gf(t, \cdot)\|_s \le C \int_\tau^t \|f(t_1)\|_s dt_1, \quad \tau \le t \le T \tag{3.2.16}$$

が成立している．

命題 3.2.2. U_1 を閉錐集合，U_2 をコンパクト錐集合とし $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たすとする．このとき $\delta = \delta(U_i) > 0$ が存在し任意の $l_i \in \mathbb{R}$ および $\mathrm{supp}\, h_i \subset U_i$ を満たす任意の $h_i \in S^0(\mathbb{R}^{2d})$ に対し $C > 0$ が存在し

$$\|\mathrm{op}(h_2) G\, \mathrm{op}(h_1) f(t)\|_{l_1} \le C \int_\tau^t \|f(t_1)\|_{l_2} dt_1, \quad \tau \le t \le \tau + \delta$$

が任意の $f \in L^1((\tau, \tau + \delta); H^{l_2})$ について成立する．

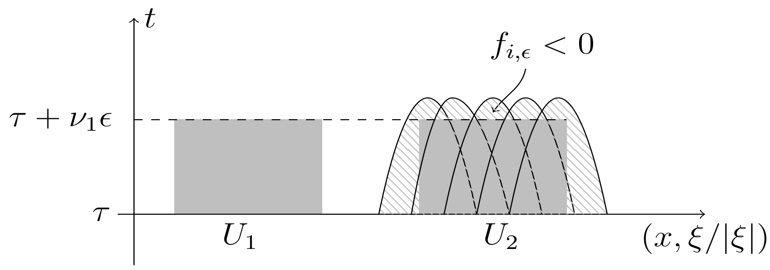
証明. $f_\epsilon(x,\xi;w)$ を (3.2.12) で定義したものとし，$\nu>0$ (ϵ によらない) を f_ϵ が空間的になるように 1 つ選ぶ．$16\,\epsilon^2\le|x-\tilde{x}|^2+|\xi/|\xi|-\tilde{\xi}/|\tilde{\xi}||^2$ が任意の $(x,\xi)\in U_1$, $(\tilde{x},\tilde{\xi})\in U_2$ について成り立つような $0<\epsilon<1/4$ を 1 つ選んで固定する．いま $0<\nu_1<\nu$ を 1 つ任意に決めると U_2 はコンパクトであるから有限個の $w_i=(y_i,\eta_i)\in U_2$, $i=1,\ldots,n$ が存在して

$$U_2\subset\cup_{i=1}^n\{f_\epsilon(\tau+\nu_1\epsilon,x,\xi;w_i)=-(2\nu-\nu_1)\epsilon+\nu d_\epsilon(x,\xi;w_i)<0\}$$

が成立する．$f_{i,\epsilon}=f_\epsilon(\tau,x,\xi;w_i)$, $F_{i,\epsilon}=\mathrm{op}(\bar{f}_{i,\epsilon})$ とおく．このとき $[\tau,\tau+\nu_1\epsilon]\times U_2$ 上で $\sum_i f_{i,\epsilon}<0$ となることは明らかである．一方 ϵ の選び方から $\{f_{i,2\epsilon}(t,x,\xi)=t-\tau-4\nu\epsilon+\nu d_{2\epsilon}(x,\xi;w_i)<0\}$ は $[\tau,\tau+\nu_1\epsilon]\times(U_1\cap\{|\xi|\ge1\})$ と交わらない．よって任意の $p\in\mathbb{R}$ について $\int_\tau^t\|F_{i,2\epsilon}\mathrm{op}(h_1)f\|_p dt_1\le C\int_\tau^t\|f\|_{l_2}dt_1$ である．ここで命題 3.2.1 を $u=G\mathrm{op}(h_1)f\in C([\tau,\tau+\nu_1\epsilon];H^{l_2})$, $F_{\epsilon_0}=F_{i,2\epsilon}$, $F_\epsilon=F_{i,\epsilon}$, $l=l'=l_2$ として適用する．$Pu=\mathrm{op}(h_1)f$ であるから任意の $s<p-1/2$ について

$$\|F_{i,\epsilon}G\mathrm{op}(h_1)f\|_s\le C\int_\tau^t\big\{\|F_{i,2\epsilon}\mathrm{op}(h_1)f\|_p+\|\mathrm{op}(h_1)f\|_{l_2}\big\}dt_1$$
$$+CM_{l_2}(G\mathrm{op}(h_1)f;t)\le C\int_\tau^t\|f\|_{l_2}dt_1$$

が成立する．p は任意であるから $s=l_1$ と選ぶことができる．また $k\in C^\infty([-T,T];S^0)$ があって $[\tau,\tau+\nu_1\epsilon]\times\mathbb{R}^d$ で $h_2-k\#\sum_i\bar{f}_{i,\epsilon}\in S^{-\infty}$ と書けるので $\|\mathrm{op}(h_2)v\|_{l_1}\le C\sum_i\|F_{i,\epsilon}v\|_{l_1}+C\|v\|_{l_2}$ が成立する．ここで $v=G\mathrm{op}(h_1)f$ とし (3.2.16) に注意すると $\delta=\nu_1\epsilon$ として結論が得られる．　□



命題 3.2.2 で述べた性質に名前をつけておこう．P を m 階の微分作用素としその初期値 0 に対する初期値問題の解作用素 G を考えよう．ここで G はある $l\in\mathbb{R}$ および任意の $s\in\mathbb{R}$ に対し次を満たすとする；

$$G:L^1((\tau,T);H^{l+s})\mapsto\cap_{j=0}^{m-1}C^j([\tau,T];H^{s+m-1-j}),\ \ PGf=f,$$
$$\sum_{j=0}^{m-1}\|D_t^jGf(t,\cdot)\|_{s+m-1-j}\le C_s\int_\tau^t\|f(t_1)\|_{l+s}dt_1,\quad\tau\le t\le T.$$

定義 3.2.3. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ を満たす任意の閉錐集合 U_1 とコンパクト錐集合 U_2 に対して $\delta > 0$ が存在し任意の $l_i \in \mathbb{R}$ および $\operatorname{supp} h_i \subset U_i$ をみたす任意の $h_i(x,\xi) \in S^0(\mathbb{R}^{2d})$ に対し $C > 0$ が存在して任意の $f \in L^1((\tau,T);H^{l_2})$ について

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|D_t^j \mathrm{op}(h_2) G \mathrm{op}(h_1) f(t)\|_{l_1-j} \leq C_{l_1,l_2} \int_\tau^t \|f(t_1)\|_{l_2} dt_1 \tag{3.2.17}$$

が $\tau < t \leq \min(\tau+\delta, T)$ で成立するとき G は有限伝播であるという (正確には超局所的に有限伝播というべきであるが本書では省略して単に有限伝播ということにする).

命題 3.2.2 はこの定義の $m = 1$ の場合である．いま P が $P_k = D_t + \mathrm{op}(\lambda_k)$, $\lambda_k \in C^\infty(\mathbb{R};S^1)$, $\mathsf{Im}\,\lambda_k \in C^\infty(\mathbb{R};S^0)$ の積 $P = P_1P_2$ であるとする．P_k の解作用素 $G_k : L^1((\tau,T);H^s) \mapsto C([\tau,T];H^s)$ で $P_kG_kf = f$ および (3.2.16) を満たすものがある．$G = G_2G_1$ とおくと $G : L^1((\tau,T);H^s) \mapsto \cap_{j=0}^1 C^j([\tau,T];H^{s-j})$ で $P_1P_2Gf = f$ および

$$\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j G f(t_1)\|_{s-j} dt_1 \leq C \int_\tau^t \|f(t_1)\|_s dt_1 \tag{3.2.18}$$

をみたす．実際 $D_tG_2\tilde{f} = -\mathrm{op}(\lambda_2)G_2\tilde{f} + \tilde{f}$ から $\tilde{f} = G_1 f \in C([\tau,T];H^s)$ とすると $G_2G_1f \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau,T];H^{s-j})$ が従い，また

$$\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j G_2\tilde{f}\|_{s-j} \leq C\big(\|G_2\tilde{f}\|_s + \|\tilde{f}\|_{s-1}\big) \leq C \int_\tau^t \|\tilde{f}\|_s dt_1 + C\|\tilde{f}\|_s \tag{3.2.19}$$

であるから $\tilde{f} = G_1 f$ として (3.2.18) が従う．$G = G_2G_1$ が有限伝播であることを確かめよう．U_1 を閉錐集合，U_2 をコンパクト錐集合で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ とする． 開錐集合 V，コンパクト錐集合 W を $U_2 \Subset V \Subset W$ かつ $U_1 \cap W = \emptyset$ である様に選ぶ．さらに $\phi \in S^0$ を $\operatorname{supp}\phi \subset W$ で V 上では $\phi = 1$ である様に選ぶ．$h_i \in S^0$, $\operatorname{supp} h_i \subset U_i$ とするとき $\mathrm{op}(h_2)G\mathrm{op}(h_1)$ は

$$\mathrm{op}(h_2)G_2\mathrm{op}(\phi)G_1\mathrm{op}(h_1), \quad \mathrm{op}(h_2)G_2\mathrm{op}(1-\phi)G_1\mathrm{op}(h_1) \tag{3.2.20}$$

の和なのでそれぞれについて調べる．(3.2.20) の最初の項は (3.2.19) より

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1} \|\mathrm{op}(h_2)D_t^j G_2\mathrm{op}(\phi)G_1\mathrm{op}(h_1)f\|_{l_1-j} \leq C \int_\tau^t \|\mathrm{op}(\phi)G_1\mathrm{op}(h_1)f\|_{l_1} dt_1 \\ +C\|\mathrm{op}(\phi)G_1\mathrm{op}(h_1)f\|_{l_1-1}\end{aligned}$$

と評価される．ここで $U_1 \cap W = \emptyset$ より G_1 の有限伝播性を利用すれば (3.2.17) $(m = 2)$ が容易に従う．つぎに (3.2.20) の 2 番目の項は $G_1 f = \tilde{f}$ とおくと $\phi^c = 1 - \phi$ として

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1} \|\mathrm{op}(h_2) D_t^j G_2 \mathrm{op}(\phi^c) \tilde{f}\|_{l_1 - j} &\le C \|\mathrm{op}(h_2)\mathrm{op}(\lambda_2) G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - 1} \\ &+ C\|\mathrm{op}(h_2) G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1} + C\|\mathrm{op}(h_2)\mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - 1}\end{aligned}$$

と評価されるが $h_2 \# \lambda_2 - \lambda_2 \# h_2 - \tilde{h}_N \in S^{-N}$ となる $\tilde{h}_N \in S^0$, $\mathrm{supp}\, \tilde{h}_N \subset U_2$ を用いると右辺はさらに

$$\begin{aligned}C\big(&\|\mathrm{op}(h_2) G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1} + \|\mathrm{op}(\tilde{h}_N) G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - 1} \\ &+ \|G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - N} + \|\mathrm{op}(h_2)\mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - 1}\big)\end{aligned}$$

で評価される．$\mathrm{supp}\, \phi^c \subset V^c$ で $V^c \cap U_2 = \emptyset$ であるから第 1, 2 項については G_2 の有限伝播性より

$$\|\mathrm{op}(h_2) G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1} + \|\mathrm{op}(\tilde{h}_N) G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - 1} \le C \int_\tau^t \|\tilde{f}\|_{l_2} dt_1$$

が成り立つ．残りの項は $h_2 \# \phi^c \in S^{-\infty}$ に注意して N を適当に大きく選ぶと

$$\|G_2 \mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - N} + \|\mathrm{op}(h_2)\mathrm{op}(\phi^c)\tilde{f}\|_{l_1 - 1} \le C\Big(\|\tilde{f}\|_{l_2} + \int_\tau^t \|\tilde{f}\|_{l_2} dt_1\Big)$$

と評価される．$\tilde{f} = G_1 f$ であったから (3.2.16) に注意すれば (3.2.17) $(m = 2)$ が成り立つ．

P_i $(i = 1, 2)$ を m_i 階の微分作用素とし G_i を有限伝播な P_i の解作用素とするとき $G = G_2 G_1$ が $P_1 P_2$ の有限伝播な解作用素であることも同様にして示される．

第 4 章

実効的双曲型特性点

微分作用素の主シンボルを p とするとき $p=0$ の危点が実効的双曲型であることの定義とその幾何的特徴づけを与える．この幾何的特徴づけからエネルギー不等式に用いる weight が得られる．

4.1 序

以下しばらくの間 t, τ の代わりに x_0, ξ_0 また $x=(x_0,x')=(x_0,x_1,\ldots,x_d)$, $\xi=(\xi_0,\xi')=(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_d)$ と書く．初期値問題を考えるので定理 1.1.1 を考慮して特性根が実である場合のみを考えることにし

$$P_m(x,\xi)=p(x,\xi)$$

とおき $\nabla p(x,\xi)$ で ${}^t\big(\partial p(x,\xi)/\partial x, \partial p(x,\xi)/\partial\xi\big)$ をまた $\nabla^2 p$ で p の Hesse 行列を表すことにする．

補題 4.1.1. Ω を $\mathbb{R}^{1+d}$ の開集合とし特性方程式 $p(x,\xi_0,\xi')=0$ の根 (特性根) は任意の $(x,\xi')\in\Omega\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$ に対し実であるとする．このとき $\bar{\xi}_0$ が $p(\bar{x},\xi_0,\bar{\xi}')=0$, $(\bar{x},\bar{\xi}')\in\Omega\times(\mathbb{R}^d\setminus 0)$ の重複根なら $\nabla p(\bar{x},\bar{\xi}_0,\bar{\xi}_0')=0$, すなわち $(\bar{x},\bar{\xi}_0,\bar{\xi}_0')$ は $p=0$ の危点である．さらに $\bar{\xi}_0$ が重複度 3 以上の根なら $\nabla^2 p(\bar{x},\bar{\xi}_0,\bar{\xi}_0')=O$ である．

この補題の証明は与えないので詳しくは [9] あるいは [5] を参照のこと．$p=0$ が危点を持つ場合の初期値問題の適切性に関する V.Ivrii の基本的結果 ([9]) を述べるためにまず Hamilton 行列 (基本行列) を導入しよう ([9] では基本行列と呼んでいるが Hamilton ベクトル場との関係から現在では Hamilton 写像と呼ばれることが多い)．記号を簡単にするために $X=(x,\xi)\in\mathbb{R}^{1+d}\times\mathbb{R}^{1+d}=V$ などと書くことにする．次の Hamilton 方程

式を考えよう．

$$\frac{d}{ds}X = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial p(x,\xi)/\partial\xi \\ -\partial p(x,\xi)/\partial x \end{pmatrix} = \sigma\nabla p(X), \quad \sigma = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}.$$

ここで I は $d+1$ 次の単位行列を表す．また $\sigma\nabla p$ は p の Hamilton ベクトル場と呼ばれ $H_p = \sigma\nabla p$ と表される．この σ を表現行列とする 2 次形式 $\sigma(X,Y) = \langle\sigma X, Y\rangle$ は V 上の標準的なシンプレクティック形式

$$\sigma(X,Y) = \langle\xi, y\rangle - \langle\eta, x\rangle, \;\; X=(x,\xi), Y=(y,\eta) \in V$$

である．ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^{1+d}$ の通常の内積を表す．以下 2 次形式 σ とその表現行列を同じ文字 σ で表すことにする．$\rho \in \mathbb{R}^{1+d}\times(\mathbb{R}^{1+d}\setminus 0)$ を $p=0$ の危点とする．$\nabla p(\rho)=0$ なのでこの Hamilton 方程式を ρ で線形化すると線形化方程式は $dX/ds = \sigma\,\nabla^2 p(\rho)X$ となる．線形化方程式の係数行列 $\sigma\nabla^2 p(\rho)$ を $F_p(\rho)$ と書き p の ρ における Hamilton 行列と呼ぶ．したがって Hesse 行列から定まる 2 次形式を $Q(X,Y) = \langle X, \nabla^2 p(\rho)Y\rangle$ と表すと ${}^t\sigma\sigma = I_{2+2d}$ より

$$Q(X,Y) = \langle\sigma X, F_p(\rho)Y\rangle \tag{4.1.1}$$

である．また局所座標系 (x,ξ) を用いれば

$$F_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial^2 p/\partial x\partial\xi & \partial^2 p/\partial\xi\partial\xi \\ -\partial^2 p/\partial x\partial x & -\partial^2 p/\partial\xi\partial x \end{pmatrix}$$

と表される．

定義 4.1.1. $p=0$ の危点で Hamilton 行列が 0 でない実の固有値を持つとき，その危点を実効的双曲型 (特性点) という．また p はその危点で実効的双曲型であるといい危点がすべて実効的双曲型であるような p (または $\mathrm{op}(P)$) を実効的双曲型 (作用素) と呼ぶ．

2 階の実効的双曲型作用素の例をいくつか見てみよう．最初に一般的な注意として $x=(x_a,x_b)$, $x_a=(x_0,x_1,\ldots,x_\ell)$, $x_b=(x_{\ell+1},\ldots,x_d)$ $(1\le\ell\le d-1)$ とし $P_1 = D_0^2 - A(x_a, D_a')$, $D_a' = (D_1,\ldots,D_\ell)$ が $\mathbb{R}^{1+\ell}$ で実効的双曲型作用素で $E(x_b, D_b)$ は $\mathbb{R}^{d-\ell}$ で楕円型, すなわちその主シンボル $e(x_b,\xi_b)$ はある $c>0$ について $e(x_b,\xi_b)\ge c\,|\xi_b|^2$ を満すとする．このとき $P = P_1 - E$ は $\mathbb{R}^{1+d}$ で実効的双曲型である．実際 $\rho = (\bar{x},\bar{\xi})$ を $p = p_1 - e$ の危点とすると $\bar{\xi}_0 = 0$ で A の主シンボルが非負であることより $(\bar{x}_b,\bar{\xi}_b)$ で $e=0, \nabla e = 0$ となり $(\bar{x}_a,\bar{\xi}_a)$ は $p_1=0$ の危点である．定義より F_p は F_{p_1} と F_e の直和に相似であるから F_{p_1} の固有値は F_p の固有値でもある．次に $d=1$ として

$$P = D_0^2 - a(x)D_1^2, \quad p = \xi_0^2 - a(x)\xi_1^2, \quad x=(x_0,x_1)\in\mathbb{R}^2$$

を考える．特性根が実より $a(x)$ は非負値である．この P が実効的双曲型であるための必要十分条件は $a(x)=0$ なら $\partial_{x_0}^2 a(x)\neq 0$ (従って $\partial_{x_0}^2 a(x) > 0$) の成立することである．

実際 $\rho=(\bar{x},\bar{\xi})$ が危点なら $\bar{\xi}_0=0$ かつ $a(\bar{x})=0$ であり $a(x)$ が非負関数であることから $\partial_x^\alpha a(\bar{x})=0$ $(|\alpha|=1)$ を利用すると $F_p(\rho)$ の固有値は 0 と $\pm\sqrt{\partial_{x_0}^2 a(\bar{x})/2}\,\bar{\xi}_1$ であることが容易にわかる．この例は $d=1$ の特殊性によっているので $d\geq 2$ のときは注意が必要である．$d\geq 2$ とし q_i, r_i $(1\leq i\leq d-1)$ を正数として

$$P=D_0^2-\sum_{i=1}^{d-1}q_i(x_{i-1}-x_i)^2D_d^2-\sum_{i=1}^{d-1}r_iD_i^2$$

を考えよう．$\{(x,\xi); x_0=x_1=\cdots=x_{d-1}, \xi_0=\xi_1=\cdots=\xi_{d-1}=0\}$ が $p=0$ の危点集合でありこの P が実効的双曲型であるための必要十分条件は r_i が $\sum_{i=1}^{d-1}r_i^{-1}>1$ を満たすことである．もう少し一般的に $\ell\,(\leq d-1)$ を自然数とし $\rho=(0,\bar{\xi})$, $\bar{\xi}_0=\bar{\xi}_1=\cdots=\bar{\xi}_\ell=0$ を $p=0$ の危点とするとき $(0,\bar{\xi}')$ の近傍で滑らかな正値の実数値関数 $q_i(x,\xi'), r_i(x,\xi')$ $(1\leq i\leq \ell)$ があって

$$p=\xi_0^2-\sum_{i=1}^{\ell}(x_{i-1}-x_i)^2q_i(x,\xi')-\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i^2r_i(x,\xi')$$

と書けるとする．このとき ρ が実効的双曲型特性点であるための必要十分条件は $\sum_{i=1}^{\ell}r_i^{-1}(0,\bar{\xi}')>1$ の成立することである．これを確かめるには後に述べる補題 4.2.2 の (i) を示すのが一番簡単である．本書では立ち入らないが危点が実効的双曲型であるという性質が正準座標系の選び方によらないこと (局所座標系 x の選び方によらないことは補題 6.3.1 で示す) を利用すると

$$P=D_0^2-q_1(x_0D_d-D_1)^2-\sum_{i=2}^{d-1}q_i(D_{i-1}-D_i)^2-\sum_{i=1}^{d-1}r_ix_i^2D_d^2$$

が実効的双曲型であるための必要十分条件も同じく $\sum_{i=1}^{d-1}r_i^{-1}>1$ であることがわかる．次に P が滑らかな実数値関数を係数にもつ 1 階の微分作用素の積

$$P=(D_0-\sum_{j=1}^{d}b_{1j}(x)D_j)(D_0-\sum_{j=1}^{d}b_{2j}(x)D_j)$$

である場合を考える．この P が実効的双曲型であるための必要十分条件は $p_i(x,\xi)=\sum_{j=1}^{d}b_{ij}(x)\xi_j$ とおくとき $p_1(\rho)=p_2(\rho)=0$ なら $\{p_1,p_2\}(\rho)\neq 0$ の成立することである．もう少し一般的に危点 ρ の近傍で定義された実の滑らかな関数 $p_i(x,\xi)$ $(p_i(\rho)=0, \nabla p_i(\rho)\neq 0)$ があって ρ の近傍で $p=p_1p_2$ と書けているとする．このとき ρ が実効的双曲型特性点であるための必要十分条件は $\{p_1,p_2\}(\rho)\neq 0$ である．実際 ρ で $F_p=\sigma\nabla p_2{}^t\nabla p_1+\sigma\nabla p_1{}^t\nabla p_2$ であるから ${}^t\nabla p_i\sigma\nabla p_i=0$ と ${}^t\nabla p_1\sigma\nabla p_2=\{p_2,p_1\}$ に注意すると

$$F_p\sigma\nabla p_1=\{p_1,p_2\}\sigma\nabla p_1,\quad F_p\sigma\nabla p_2=\{p_2,p_1\}\sigma\nabla p_2$$

となり $\pm\{p_1, p_2\}(\rho)$ は F_p の実固有値である (それ以外の固有値はすべて 0 であることが示される).

ここで Ivrii による基本結果を述べよう.

定理 4.1.1. P に対する初期値問題は任意の低階 $P_j,\ j \le m-1$ に対して定義 1.1.2 の意味で原点の近傍で C^∞ 適切とする．このとき原点近傍 Ω があって $p=0$ の危点 $(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^{1+d} \setminus 0)$ は実効的双曲型である.

補題 4.1.1 より定義 1.1.2 の意味で適切な初期値問題においては危点 $(\bar{x}, \bar{\xi})$ が実効的双曲型なら $\bar{\xi}_0$ は $p(\bar{x}, \xi_0, \bar{\xi}')=0$ の 2 重特性根となっている．以上の考察をもとに以下本書では主として 2 階の微分作用素

$$P = -D_0^2 + \sum_{|\alpha| \le 2, \alpha_0 < 2} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{4.1.2}$$

で特性根が実の場合を考える．考察の都合上 D_0^2 の係数は -1 とすることが多い．$p(x,\xi) = -\xi_0^2 + a_1(x,\xi')\xi_0 + a_2(x,\xi')$ と書くとき，特性根が実であることより $a_j(x,\xi')$ は実数値である．そこで局所座標 x_0 を不変に保つ局所座標系 x の適当な変換

$$y_0 = x_0, \quad y_j = y_j(x),\ \ y_j(0,x') = x_j,\ \ j = 1, \dots, d$$

を行なって $a_1 = 0$ と仮定できる．したがって以下

$$p(x,\xi) = -\xi_0^2 + a(x,\xi')$$

と仮定する．$a(x,\xi')$ は ξ' の斉次 2 次多項式であり, また特性根が実であるから $a(x,\xi') \ge 0$ である．今 $\rho = (0,\bar{\xi}) \in \mathbb{R}^{1+d} \times (\mathbb{R}^{1+d} \setminus 0)$ を $p=0$ の危点とすると $\partial_{\xi_0} p(0,\bar{\xi}) = 0$ より $\bar{\xi}_0 = 0$ が従う．以後 $\rho' = (0, \bar{\xi}') \in \mathbb{R}^{1+d} \times (\mathbb{R}^d \setminus 0)$ と書くことにし ρ を 1 つ固定して考える.

4.2　実効的双曲型特性点での Hamilton 写像

$Q(X,Y)$ を Hesse 行列 $\nabla^2 p(\rho)$ から定まる 2 次形式とし $Q(X) = Q(X,X)$ と書くことにする．このとき $p(\rho+\epsilon X) = -\epsilon^2\xi_0^2 + a(\rho'+\epsilon X) + O(\epsilon^3) = \epsilon^2 Q(X)/2 + O(\epsilon^3)$ $(\epsilon \to 0)$ であるが $a(x,\xi')$ が ρ' の近傍で非負であることより $\nabla^2 a(\rho')$ は半正定符号で，したがって Q の符号は $(r,1)$, $r \in \mathbb{N}$ であるが $r=0$ なら $Q(X) = -\xi_0^2$ となって F_p は 0 以外の固有値を持たない．よって $r \ge 1$ である．さらに Morse の補題から ρ' の適当な錐近傍で $a(x,\xi')$ は次のように書くことができる ([7, Lemma C.6.2] を参照)；

$$a(x,\xi') = \sum_{j=1}^{r} \phi_j^2(x,\xi') + g(x,\xi'). \tag{4.2.3}$$

ここで $\phi_1,\dots,\phi_r$ は ρ' で 0，ρ' の錐近傍で ξ' について斉次 1 次の C^∞ 関数で $\nabla\phi_1,\dots,\nabla\phi_r$ は ρ' で 1 次独立，また g は ρ' で 0，ρ' の錐近傍で ξ' について斉次 2 次の C^∞ 関数で $g\geq 0$, $\nabla^2 g(\rho')=O$ を満たす．$\xi_0=\phi_0$ とおくと

$$Q(X,Y)=-\langle\nabla\phi_0,X\rangle\langle\nabla\phi_0,Y\rangle+\sum_{j=1}^{r}\langle\nabla\phi_j,X\rangle\langle\nabla\phi_j,Y\rangle \tag{4.2.4}$$

と書ける．$H_{\phi_j}=\sigma\nabla\phi_j$ を ϕ_j の Hamilton ベクトル場とすると $\langle\nabla\phi_j,X\rangle=\sigma(X,H_{\phi_j})$ なので

$$Q(X,Y)=\sigma\big(X,-\sigma(Y,H_{\phi_0})H_{\phi_0}+\sum_{j=1}^{r}\sigma(Y,H_{\phi_j})H_{\phi_j}\big)$$

が成り立つ．よって $F_pY=-\sigma(Y,H_{\phi_0})H_{\phi_0}+\sum_{j=1}^{r}\sigma(Y,H_{\phi_j})H_{\phi_j}$．これより F_p の核 $\mathrm{Ker}\,F_p$ と像 $\mathrm{Im}F_p$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,F_p&=\{X\in V;\sigma(X,H_{\phi_j})=0,j=0,\dots,r\},\\ \mathrm{Im}F_p&=\{X\in V;X=\sum_{j=0}^{r}\alpha_jH_{\phi_j},\ \alpha_j\in\mathbb{R}\}\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

で与えられる．つぎに

$$\Gamma=\{(x,\xi)=X\in V;Q(X)<0,\,\xi_0>0\} \tag{4.2.6}$$

で Γ を定義するとこれは V 内の凸開錐で $\{X\in V;Q(X)\neq 0\}$ の正の ξ_0 軸を含む連結成分である．ここで次の補題に注意しよう．

補題 4.2.1. $F_p(\rho)$ が 0 でない実の固有値をもつとすると $\Gamma\cap\mathrm{Im}F_p\neq\{0\}$ である．

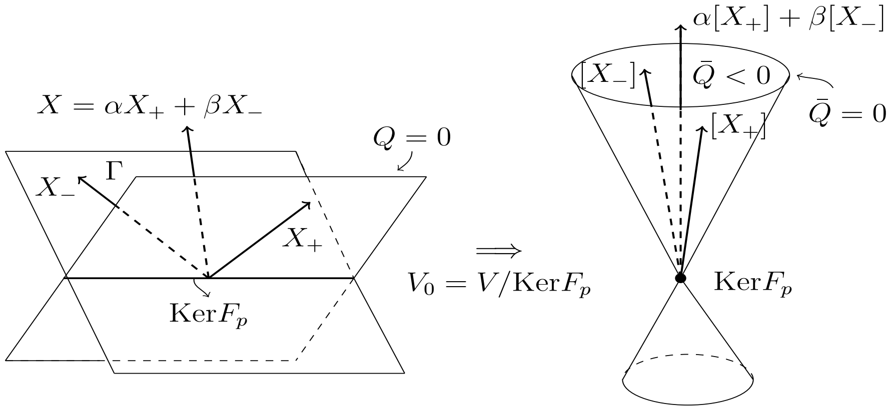
証明. まず $\lambda\neq 0$ を実の固有値とするとき $-\lambda$ も F_p の固有値となることを示す．F_p は実行列ゆえ $0\neq X_+\in V$ が存在して $F_pX_+=\lambda X_+$ である．Q は対称，σ は反対称 2 次形式であることから F_p は σ に関して反対称ゆえ $0=\sigma((F_p-\lambda)X_+,Y)=\sigma(X_+,(-F_p-\lambda)Y)$, $Y\in V$ が成り立ち $F_p+\lambda$ が全射でないこと，したがって $-\lambda$ が固有値であることが分かる．$F_pX_\pm=\pm\lambda X_\pm$, $0\neq X_\pm\in V$ とすると $\lambda\neq 0$ より $X_\pm\in\mathrm{Im}F_p$ である．以下 X_+ と X_- の適当な 1 次結合が Γ に属することを示す．$Q(X,Y)=\sigma(X,F_pY)=-\sigma(F_pX,Y)$ より Q は $V_0=V/\mathrm{Ker}F_p$ 上の 2 次形式として well-defined であるからそれを $\bar{Q}$ と表すと $\bar{Q}$ は V_0 上非退化である．今 $\sigma(X_+,X_-)=0$ と仮定すると $\sigma(X,X)=0$ $(X\in V)$ であるから任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned}&\bar{Q}(\alpha[X_+]+\beta[X_-])=Q(\alpha X_++\beta X_-)\\ &=\sigma(\alpha X_++\beta X_-,\alpha\lambda X_+-\beta\lambda X_-)=0\end{aligned}$$

が成立する．$[X_+], [X_-]$ が V_0 上 1 次独立であることは明らかであり $\bar{Q}$ は $[X_+], [X_-]$ で張られる 2 次元ベクトル空間上で 0 となるので $\bar{Q}$ が V_0 上の非退化な 2 次形式で負の慣性指数が 1 であることに反する．これより $\sigma(X_+, X_-) \neq 0$ が従う．$X = \alpha X_+ + \beta X_-$ とすると

$$Q(X) = \sigma(\alpha X_+ + \beta X_-, \lambda\alpha X_+ - \lambda\beta X_-) = -2\alpha\beta\lambda\sigma(X_+, X_-)$$

より，α, β を $\alpha\beta\lambda\sigma(X_+, X_-) > 0$ と選べば $Q(X) = Q(-X) < 0$ とできる．したがって X あるいは $-X$ のいずれかは Γ に属すことがわかる．□



以下 V の部分空間 S に対してその σ - 直交空間を $S^\sigma = \{X \in V; \sigma(X,Y) = 0, \forall Y \in S\}$ で定義する．σ は非退化なので $(S^\sigma)^\sigma = S$ が成り立ち，したがって $\mathrm{Im}F_p = (\mathrm{Ker}F_p)^\sigma$ である． また $X \in V$ に対して $\langle X \rangle$ で X を含む直線を表すことにする．Γ の σ に関する双対錐 C を

$$C = \{X \in V; \sigma(X,Y) \leq 0, \forall Y \in \Gamma\}$$

で定義する．次の補題が実効的双曲型特性点を幾何的に特徴づけるときの鍵となる．

補題 4.2.2. θ を ξ_0 軸の正方向の単位ベクトルとする．次の 3 条件は同値である；

(i)　$\Gamma \cap \mathrm{Im}F_p \neq \{0\}$,

(ii)　$H \cap C = \{0\}$ かつ $\mathrm{Ker}F_p + \langle\theta\rangle \subset H$ をみたす超平面 $H \subset V$ が存在する，

(iii)　$\Gamma \cap \mathrm{Im}F_p \cap \langle\theta\rangle^\sigma \neq \{0\}$.

証明. この証明では $\mathrm{Ker}F_p = \Lambda$ と書くことにする．最初に

$$X \in \Gamma \Longrightarrow \langle X \rangle^\sigma \cap C = \{0\} \tag{4.2.7}$$

に注意する．実際 Γ が開集合であることより $|Z|$ が十分小さければ $X + Z \in \Gamma$ である．一方 $\langle X \rangle^\sigma \cap C \ni Y \neq 0$ なる Y が存在すれば $\sigma(X + Z, Y) = \sigma(Z, Y) \leq 0$ が成立し $Y \neq 0$ に矛盾する．

(i) $\Longrightarrow$ (ii). まず $\theta \in \Lambda + \Lambda^\sigma$ の場合を考えよう．(4.1.1) より $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$ および $\Gamma + \Lambda \subset \Gamma$ は明らか．したがって $\theta = X_1 + X_2$, $X_1 \in \Lambda$, $X_2 \in \Lambda^\sigma$ と書くとき $\theta \in \Gamma$ より $0 \neq X_2 \in \Gamma$ である．$\Lambda \subset \langle X_2 \rangle^\sigma$ および $X_2 \in \langle X_2 \rangle^\sigma$ より $\theta \in \langle X_2 \rangle^\sigma$ も明らかである．(4.2.7) よりこの $H = \langle X_2 \rangle^\sigma$ が求めるものである．

次に $\theta \notin \Lambda + \Lambda^\sigma$ の場合を考えよう．したがって $(\Lambda + \Lambda^\sigma) \cap \langle \theta \rangle = \{0\}$ でまた仮定より $0 \neq Z \in \Gamma \cap \Lambda^\sigma$ が存在する．$\Lambda \subset \langle Z \rangle^\sigma$ は明らかである．(4.2.7) より $\langle Z \rangle^\sigma \cap C = \{0\}$ であるが一方 $\Gamma + \Lambda \subset \Gamma$ より $C \subset \Lambda^\sigma$ であるから $\Lambda + \Lambda^\sigma \not\subset \langle Z \rangle^\sigma$ を得る．$\langle Z \rangle^\sigma$ は V の超平面なので $\langle Z \rangle^\sigma + (\Lambda + \Lambda^\sigma) = V$ となり $\dim(\langle Z \rangle^\sigma \cap (\Lambda + \Lambda^\sigma)) = \dim(\Lambda + \Lambda^\sigma) - 1$ が従う．そこで $V = (\Lambda + \Lambda^\sigma) \oplus \langle \theta \rangle \oplus W$ と直和に書くと $H = (\langle Z \rangle^\sigma \cap (\Lambda + \Lambda^\sigma)) \oplus \langle \theta \rangle \oplus W$ が求めるものになっている．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). $0 \neq X \in V$ を $\langle X \rangle = H^\sigma$ となるよう選ぶと $\Lambda + \langle \theta \rangle \subset H$ より $\langle X \rangle \subset (\Lambda + \langle \theta \rangle)^\sigma = \Lambda^\sigma \cap \langle \theta \rangle^\sigma$ である．X または $-X$ のいずれかは Γ に属すことを示そう．そうでないとすると $\langle X \rangle \cap \Gamma = \emptyset$ であるが，このとき Hahn-Banach の定理によって $\sigma(Z, Y) \leq 0, \forall Y \in \Gamma$ および $\sigma(Z, Y) \geq 0, \forall Y \in \langle X \rangle$ (したがって $\sigma(Z, Y) = 0, \forall Y \in \langle X \rangle$) をみたす $0 \neq Z \in V$ が存在し $Z \in C$ かつ $Z \in \langle X \rangle^\sigma = H$ となって $H \cap C = \{0\}$ に反する．

(iii) $\Longrightarrow$ (i) は自明. □

系 4.2.1. $F_p(\rho)$ が 0 でない実の固有値をもつとすると $C \cap \mathrm{Ker} F_p = \{0\}$ である．

証明. 補題 4.2.1 と補題 4.2.2 の (ii) から明らか. □

本書では必要としないので証明しないが，補題 4.2.2 の同値な 3 条件は，ρ が実効的双曲型特性点であるための十分条件にもなっている ([5], [33]).

4.3　実効的双曲型特性点の幾何的特徴付け

ここでは元の記法に戻って x_0 を t, ξ_0 を τ と書き，また $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$ と表すことにする．このとき

$$p(t, x, \tau, \xi) = -\tau^2 + a(t, x, \xi) \tag{4.3.8}$$

である．ここで $a(t, x, \xi)$ は ξ について斉次 2 次で $(0, 0) \in \mathbb{R}^{1+d}$ のある近傍 Ω があって $(t, x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d$ で非負である．

命題 4.3.1. p は (4.3.8) の形をしているとし $(0, 0, 0, \bar{\xi})$ を実効的双曲型特性点とする．このとき $x = 0$ の周りの $\bar{\xi} = e_d = (0, \ldots, 0, 1)$ となる局所座標系を適当に選ぶと以下のことが成立する；$(0, e_d)$ の錐近傍で滑らかな ξ について斉次 0 次の $\psi(x, \xi)$, $\psi(0, e_d) = 0$

と $(0,0,e_d)$ の錐近傍で滑らかな ξ について斉次 1 次の $\ell(t,x,\xi)$, $\ell(0,0,e_d)=0$ と斉次 2 次の $q(t,x,\xi)\geq 0$, $q(0,0,e_d)=0$ が存在して $(0,0,e_d)$ の錐近傍で

$$p(t,x,\tau,\xi)=-\tau^2+\ell^2(t,x,\xi)+q(t,x,\xi),\quad q(t,x,\xi)\geq \bar{c}(t-\psi)^2|\xi|^2 \tag{4.3.9}$$

と書ける．ここで $\bar{c}>0$ はある正定数であり ψ の $(0,e_d)$ での微分は $d\psi=d\xi_1$ または $d\psi=\varepsilon dx_1+cdx_d$ (ここで $c\in\mathbb{R}$ で ε は 0 または 1) である．さらに ψ, ℓ, q は次を満たす．

$$|\{\ell,\psi\}(0,0,e_d)|<1,\quad \{\psi,\{\psi,q\}\}(0,0,e_d)=0. \tag{4.3.10}$$

またこの局所座標系の変換は $x=0$ の適当な近傍の外側では線形変換であるような $\mathbb{R}^d$ 上の微分同相写像に拡張される．

$d\psi=d\xi_1$ または $d\psi=\varepsilon x_1+cx_d$ に対応して ψ は次のように書ける．

$$\psi(x,\xi)=\xi_1/|\xi|+r(x,\xi),\quad \psi(x,\xi)=\varepsilon x_1+cx_d+r(x,\xi) \tag{4.3.11}$$

ここで $dr(0,e_d)=0$ である．$\varepsilon=0$ の場合は $\varepsilon=1$ の場合と並行に議論すればよく (より易しい）必要な変更はほとんど明らかなので以下 $\varepsilon=1$ と仮定する．斉次関数に関する Euler の恒等式より $\partial^2_{\xi_j\xi_d}q(0,0,e_d)=0, 1\leq j\leq d$ に注意すると $\{\psi,\{\psi,q\}\}(0,0,e_d)=0$ より $d\psi=d\xi_1$ あるいは $d\psi=dx_1+cdx_d$ に応じて

$$\partial^2_{x_1}q(0,0,e_d)=0,\quad \partial^2_{\xi_1}q(0,0,e_d)=0 \tag{4.3.12}$$

となることに注意しよう．以下，座標変換で $d\psi=d\xi_1$ となる場合を場合 (a), $d\psi=dx_1+cdx_d$ となる場合を場合 (b) と呼ぶことする．

証明に入る前に条件 (4.3.9) と (4.3.10) の意味を粗くみておこう．$f=t-\psi(x,\xi)$ とおく．$p=0$ の危点は $\{\tau=0,\ell=0,q=0\}$ に含まれる．したがって (4.3.9) より超曲面 $\{f=0\}$ に含まれることがわかる．次に $\ell^2+q\neq 0$ なら $p=0$ は単純根しかもたず $p=-(\tau-\sqrt{\ell^2+q})(\tau+\sqrt{\ell^2+q})$ と分解される．$\tau\pm\sqrt{\ell^2+q}$ の Hamilton ベクトル場と超曲面 $f=0$ の交わり方をみるため

$$\begin{aligned}\langle H_{\tau\pm\sqrt{\ell^2+q}},\nabla f\rangle&=1\mp\{\ell^2+q,\psi\}/(2\sqrt{\ell^2+q})\\&=1\mp\{\ell,\psi\}\ell/\sqrt{\ell^2+q}\mp\{q,\psi\}/(2\sqrt{\ell^2+q})\\&\geq 1-|\{\ell,\psi\}|-\big|\{q,\psi\}|/(2\sqrt{\ell^2+q})\end{aligned}$$

を考える．$\{\psi,\{\psi,q\}\}$ は q の H_ψ 方向の 2 階微分であるから $q\geq 0$ より Glaeser の不等式によれば $|\{\psi,q\}|^2\leq C|\{\psi,\{\psi,q\}\}|q$ が得られ (4.3.10) より $(0,e_d)$ の近傍を縮めれば右辺第 3 項はいくらでも小さくできる．したがって (4.3.10) よりある $c>0$ があって $\big|\langle H_{\tau\pm\sqrt{\ell^2+q}},\nabla f\rangle\big|\geq c$ が従う．ゆえに $\tau\pm\sqrt{\ell^2+q}$ の Hamilton ベクトル場 (の長さを

1 に正規化したもの) の $f=0$ への極限が存在すれば (実際に存在しこれは Hamilton 写像の実固有値に対応する固有ベクトルである) この極限は曲面 $f=0$ と横断的であることがわかる．

命題 4.3.1 の証明：局所座標系 x の線形変換によって $\bar{\xi}=(0,\dots,0,1)=e_d$ と仮定できる．以下 $\rho'=(0,0,e_d)\in\mathbb{R}^{1+d}\times\mathbb{R}^d$, $\rho''=(0,e_d)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ と表すことにする．補題 4.2.2 より $0\neq X\in\Gamma\cap\mathrm{Im}F_p\cap\langle\theta\rangle^\sigma$ を選ぶことができる．(4.2.5) より X は $H_{\phi_j}(\rho')$ の 1 次結合であり $X=\sum_{j=1}^r\alpha_jH_{\phi_j}(\rho')+\alpha_0H_{\phi_0}(\rho')$ と書けるが $X\in\langle\theta\rangle^\sigma$ より $0=\sigma(X,\theta)=-\alpha_0=0$ である．f を

$$f(t,x,\xi)=\sum_{j=1}^r\alpha_j\phi_j(t,x,\xi)/|\xi|$$

で定めると $X=H_f(\rho')=\sigma\nabla f(\rho')\in\Gamma$ より (4.2.6) に注意すると ρ' で $\partial f/\partial t<0$ が成り立つ．したがって陰関数定理より $\psi(x,\xi)$ が存在して $f(t,x,\xi)=e(t,x,\xi)(t-\psi(x,\xi))$ と書ける ($e(\rho')<0$)．(4.2.3) より $c_1>0$ が存在して

$$a(t,x,\xi)\geq c_1(t-\psi(x,\xi))^2|\xi|^2 \tag{4.3.13}$$

が成立する．$H_f(\rho')=e(\rho')H_{t-\psi}(\rho')\in\Gamma$ と (4.2.4) より

$$1>\sum_{j=1}^r\langle\nabla\phi_j(\rho'),H_{t-\psi}(\rho')\rangle^2=\sum_{j=1}^r\{\phi_j,\psi\}^2(\rho')$$

が従う．(4.2.3) を用いて $\{\psi,\{\psi,g\}\}(\rho')=0$ に注意して $\{\psi,\{\psi,a\}\}$ を計算すると $\nabla^2g(\rho')=O$ より

$$\big|\{\psi,\{\psi,a\}\}(\rho')\big|=2\Big|\sum_{j=1}^r\{\psi,\phi_j\}^2(\rho')\Big|<2 \tag{4.3.14}$$

が得られる．ここで次のよく知られた補題を準備しよう．

補題 4.3.1. ρ'' で $d\psi\neq0$ は dx_d に平行ではないとする．このとき $x=0$ の周りの局所座標系 $x=(x_1,\dots,x_d)$ を $d\psi=d\xi_1$ または $d\psi=dx_1+cdx_d$ $(c\in\mathbb{R})$ が ρ'' で成立するように選べる．

証明. 斉次関数に関する Euler の恒等式より $\partial_{\xi_d}\psi(\rho'')=0$ となるので ρ'' の周りの Taylor 展開より $\psi(x,\xi)=\langle\tilde{a},\tilde{\xi}\rangle+\langle\tilde{b},\tilde{x}\rangle+b_dx_d+r(x,\xi)$ と書ける．ここで $\tilde{\xi}=(\xi_1,\dots,x_{d-1})$, $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_{d-1})$ で r は ρ'' で 2 次で 0 になる．もし $\tilde{a}=0$ なら仮定より $\tilde{b}\neq0$ なので座標系 $\tilde{x}$ の線形変換を行うと ρ'' で $d\psi=dx_1+b_ddx_d$ とできる．もし $\tilde{a}\neq0$ なら座標 x_j, $1\leq j\leq d-1$ の番号の付け替えと伸縮で $\langle\tilde{a},\tilde{\xi}\rangle=\xi_1+\cdots+\xi_k$ と仮定してよい．次

に座標 x_d を $x_d-\sum_{j=1}^{k}b_jx_j^2/2$ に変換すると $\langle\tilde{b},\tilde{x}\rangle+b_dx_d=\sum_{j=k+1}^{d}b_jx_j$ と仮定でき，さらに座標 x_d を $x_d-x_1\sum_{j=k+1}^{d}b_jx_j$ に変換すると $b_{k+1}=\cdots=b_d=0$ とできる．最後に座標系 $(x_1,\dots,x_k)$ の線形変換を行うと ρ'' で $d\psi=d\xi_1$ となる． □

命題 4.3.1 の証明の続き： $d\psi$ が ρ'' で 0 または dx_d に平行なら $\ell=0$, $q=a$ と選べばよい．実際 Euler の恒等式より $\partial_{\xi_d}^2a(\rho')=0$ なので $\{\psi,\{\psi,a\}\}(\rho')=0$ が従う． 次に $d\psi(\rho'')\neq 0$ が dx_d に平行ではないとすると補題 4.3.1 より $d\psi=d\xi_1$ または $d\psi=dx_1+cdx_d$ と仮定できる．まず $\nabla a(\rho')=0$ に注意しておく．最初に ρ'' で $d\psi=d\xi_1$ のときを考えよう．$\{\psi,a\}=\partial_{x_1}a+r$ と書け r は ρ' で 2 次で 0 になる．従って $\partial_{x_1}^2a(\rho')=0$ なら $\{\psi,\{\psi,a\}\}(\rho')=0$ ゆえ $\ell=0$, $q=a$ と選べる．そうでなければ Malgrange の準備定理 (例えば [6, Theorem 7.5.5]) より ρ' の錐近傍で

$$a(t,x,\xi)=e(t,x,\xi)((x_1-h(t,x',\xi))^2+g(t,x',\xi)),\quad x'=(x_2,\dots,x_d)$$

と表すことができる．ここで $e(\rho')>0$ で h,g は ρ' で 0 で ξ に関して斉次 0 次の滑らかな関数である．ℓ と q を

$$\ell(t,x,\xi)=e^{1/2}(t,x,\xi)(x_1-h(t,x',\xi)),\ \ q(t,x,\xi)=e(t,x,\xi)g(t,x',\xi)$$

で定義し $\psi_1(t,x',\xi)=\psi(h(t,x',\xi),x',\xi)$ とおく．このとき $d\psi_1(\rho')=d\xi_1$ は明らかである．$a(t,h,x',\xi)=e(t,h,x',\xi)g(t,x',\xi)$ であるから (4.3.13) より $c_2>0$ が存在して

$$q(t,x,\xi)\geq c_2(t-\psi_1(t,x',\xi))^2|\xi|^2$$

が成り立つ．ρ' で $\partial\psi_1/\partial t=0$ であるから $t-\psi_1(t,x',\xi)$ に陰関数定理を適用すると $t-\psi_1(t,x',\xi)=e'(t,x',\xi)(t-\psi_2(x',\xi))$ と表せる．$d\psi_2(\rho'')=d\psi_1(\rho')=d\xi_1$ で $g\geq 0$ は x_1 によらないので $\{\psi_2,\{\psi_2,q\}\}(\rho')=0$ は容易である．したがって (4.3.14) から $\{\ell,\psi_2\}^2(\rho')<1$ が従いこの ψ_2 が求めるものである．$d\psi=dx_1+cdx_d$ のときも同様に証明できる．$\{\psi,a\}=-\partial_{\xi_1}a-c\partial_{\xi_d}a+r$ と書く．ここで r は ρ' で 2 次で 0 になる．Euler の恒等式によれば $\partial_{\xi_j\xi_d}^2a(\rho')=0$ なので $\partial_{\xi_1}^2a(\rho')=0$ のときは $\{\psi,\{\psi,a\}\}(\rho')=0$ となり $\ell=0$, $q=a$ と選べる．そうでなければ Malgrange の準備定理より ρ' の錐近傍で

$$a(t,x,\xi)=e(t,x,\xi)((\xi_1-h(t,x,\xi'))^2+g(t,x,\xi')),\quad \xi'=(\xi_2,\dots,\xi_d)$$

と表すことができる．ℓ と q を

$$\ell(t,x,\xi)=e^{1/2}(t,x,\xi)(\xi_1-h(t,x,\xi')),\ \ q(t,x,\xi)=e(t,x,\xi)g(t,x,\xi')$$

で定義し $\psi_1(t,x,\xi')=\psi(x,h(t,x,\xi'),\xi')$ とおき，Euler の恒等式に注意しながら $d\psi=d\xi_1$ の場合の証明を繰り返えせばよい．最後に補題 4.3.1 で用いた座標変換は A を正則行列，$q(x)$ を x の 2 次形式として $y=Ax+q(x)$ の形をしていたので $q(x)$ を $x=0$ の小さな近傍の外側で切り落とし，その外側に 0 で拡張するとこの座標変換は $\mathbb{R}^d$ の微分同相で $x=0$ の近傍の外では線形変換 Ax となっている．

第 5 章

エネルギー評価

この章では実効的双曲型特性点の周りに局所化された微分作用素に対して第 4 章で得られた weight を用いてエネルギー不等式を導く．

5.1 シンボルの局所化

ここでは命題 4.3.1 にしたがって局所座標系の変換 (a) または (b) を行なった後に得られるシンボルを $(0, e_d)$ の周りにパラメーター M 付きで局所化し，この M を用いて条件 (4.3.10) を量的に表現することにする．最初に座標関数を局所化する．まず $\chi(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $|s| \leq 1$ では s, $|s| \geq 2$ では $|\chi(s)|$ が定数で，すべての点で $0 \leq d\chi(s)/ds = \chi^{(1)}(s) \leq 1$ となるものを 1 つ固定し，つぎに $y(x) = (y_1(x), \dots, y_d(x))$ および $\eta(\xi) = (\eta_1(\xi), \dots, \eta_d(\xi))$ を

$$y_j(x) = M^{-1}\chi(Mx_j),\ \ \eta_j(\xi) = M^{-1}\chi(M(\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1} - \delta_{jd})),\ \ j = 1, 2, \dots, d$$

で定義する．ここで $\langle\xi\rangle_\gamma = (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}$ で δ_{ij} はクロネッカーのデルタとする．また M, γ はパラメーターで，以下常に次の制限の下で動くものとする．

$$\gamma \geq M^4 \geq 1. \tag{5.1.1}$$

適当に $C > 0$ を選ぶと

$$|y(x)| \leq CM^{-1}, \quad |\eta(\xi)| \leq CM^{-1}, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \tag{5.1.2}$$

が成り立つので $(y(x), \eta(\xi) + e_d)$ は M とともに小さくなる $(0, e_d)$ の近傍に含まれる．一方で $(0, e_d)$ の “錐様” の近傍;

$$W_{M,\gamma} = \left\{(x, \xi); |x| \leq M^{-1},\ |\xi/|\xi| - e_d| \leq M^{-1}/2,\ |\xi| \geq \gamma M^{1/2}\right\} \tag{5.1.3}$$

では $(y,(\eta(\xi)+e_d)\langle\xi\rangle_\gamma)=(x,\xi)$ が成立している．実際 $(x,\xi)\in W_{M,\gamma}$ のとき $|\xi/\langle\xi\rangle_\gamma - e_d|\le|\xi/\langle\xi\rangle_\gamma-\xi/|\xi||+|\xi/|\xi|-e_d|$ および $\langle\xi\rangle_\gamma\ge|\xi|$ より

$$\Big|\frac{\xi}{\langle\xi\rangle_\gamma}-\frac{\xi}{|\xi|}\Big|=\frac{|\langle\xi\rangle_\gamma-|\xi||}{\langle\xi\rangle_\gamma}=\frac{\gamma^2}{\langle\xi\rangle_\gamma(\langle\xi\rangle_\gamma+|\xi|)}\le\frac{\gamma^2}{2|\xi|^2}\le\frac{M^{-1}}{2}$$

に注意すれば $|\xi/\langle\xi\rangle_\gamma-e_d|\le M^{-1}$ が従う．以下 $T_0>0$ を 1 つ固定し時刻 t も $t=0$ の近くに局所化し

$$|t|<T_0M^{-1} \tag{5.1.4}$$

の範囲で考えることにする．

定義 5.1.1. $f(t,x,\xi)$ を $(t,x,\xi)=(0,0,e_d)$ の近傍で定義された滑らかな関数とするとき f の局所化を $f_M(t,x,\xi)=f(t,y(x),\eta(\xi)+e_d)$ で定義する．$f(t,x,\xi)$ が $(0,0,e_d)$ の錐近傍で定義された ξ について斉次 m 次の関数のときは $f_M(t,x,\xi)=f(t,y(x),\eta(\xi)+e_d)\langle\xi\rangle_\gamma^m$ と定義する．f_M はパラメーター γ にも依存するが記号をできるだけ簡単にするために以下では γ は省くことにする．

f_M は M が大きいときには $W_{M,\gamma}$ で f に一致する．命題 4.3.1 で与えられた局所座標系の変換を ($x=0$ の適当な近傍の外側では線形変換であるように) $\mathbb{R}^d$ の微分同相写像に拡張したものを $x\mapsto\kappa(x)$ と表すことにし $(Tu)(t,x)=u(t,\kappa(x))$ と定義するとき微分作用素 $T^{-1}PT$ のシンボルの局所化は

$$\hat{P}(t,x,\tau,\xi)=-\tau^2+\ell_M^2(t,x,\xi)+q_M(t,x,\xi)+a_1(t,x,\xi)+a_0(t,x,\xi)\tau$$

と表される．ここで $a_j(t,x,\xi)$ はある j 次以下の微分作用素のシンボルの局所化であるが以下の考察では具体的な形は必要でない．命題 4.3.1 の局所座標変換を行なって得られるシンボルについて，どちらの局所座標変換を行なって得られたものかを明示するために

命題, 主張 (a)　(命題, 主張 (b))

と書くことにする．命題，主張 (a) と書くときはこの命題や主張が座標変換 (a) を行なった場合に成立することを意味し．命題, 主張 (b) と書くときについても同様とする．もし，命題や主張に (ϵ) が含まれていれば，座標変換が $(\epsilon)=(a)$ のときは $\epsilon=a$ とした命題や主張が成り立ち，座標変換が $(\epsilon)=(b)$ のときは $\epsilon=b$ とした命題や主張が成り立つこととする．また命題や主張が (a), (b), (ϵ) のいずれも含まない場合は，どちらの座標変換 (a), (b) を行なってもその命題や主張が成り立つこととする．

条件 (4.3.10) を量的に表現するため $M>0,\gamma>0$ をパラメーターとする次の metric を考える．

$$G_{(x,\xi)}(y,\eta)=M^2|y|^2+M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-2}|\eta|^2,\quad (x,\xi),\ (y,\eta)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d.$$

$m(x,\xi)$ を正値関数とするとき $a \in S(m,G)$ とは M,γ によらない $C_{\alpha,\beta}>0$ が存在して

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \lesssim M^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|} m(x,\xi)$$

の成立することである．以後断らない限り $A \lesssim B$ は「A,B が含むすべてのパラメーター (この節では M,γ) によらない」定数 $C>0$ が存在して $A \le CB$ の成り立つこととする．$y_j \in S(M^{-1},G)$ は明らかで

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\alpha \eta_j(\xi)\right| \lesssim & \sum_{\alpha=\alpha^1+\cdots+\alpha^s,\,|\alpha^i|\ge 1} M^{-1}|\chi^{(s)}(M(\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}-\delta_{jd}))| \\ & \times|\partial_\xi^{\alpha^1}(M(\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}-\delta_{jd}))|\cdots|\partial_\xi^{\alpha^s}(M(\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}-\delta_{jd}))| \\ & \lesssim \sum_{s\le|\alpha|} M^{-1}M^s\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\alpha|} \lesssim M^{-1+|\alpha|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\alpha|}, \quad |\alpha|\ge 1\end{aligned}$$

より $\eta_j \in S(M^{-1},G)$ も容易に分かる．また (5.1.4) の制限より $t^k \in S(M^{-k},G)$, $k\ge 0$ でもある．

補題 5.1.1. *$\partial\eta_j/\partial\xi_k - \delta_{jk}\chi^{(1)}(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\langle\xi\rangle_\gamma^{-1} \in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},G)$ $(1\le j\le d-1$, $1\le k\le d)$.*

証明. $j\ne d$ とすると

$$\partial\eta_j/\partial\xi_j = \chi^{(1)}(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\langle\xi\rangle_\gamma^{-1} - M^{-2}\chi^{(1)}(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}$$

で $\chi^{(1)}(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^2 \in S(1,G)$ に注意する．いま $k\ne j$ とすると

$$\partial\eta_j/\partial\xi_k = -M^{-1}\chi^{(1)}(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})(\xi_k\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}$$

ゆえ $\chi^{(1)}(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})(M\xi_j\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}) \in S(1,G)$ に注意すればよい． □

補題 5.1.2. *$f(t,x,\xi)$ は $(0,0,e_d)$ の近傍で滑らかで $\partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta f(0,0,e_d)=0$ $(k+|\alpha|+|\beta|<r)$ を満たすとする．このとき $f_M \in S(M^{-r},G)$ で*

$$f_M(t,x,\xi) - \sum_{|\alpha+\beta|+k=r}\frac{1}{k!\alpha!\beta!}\partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta f(0,0,e_d)t^k y^\alpha \eta^\beta \in S(M^{-r-1},G) \qquad (5.1.5)$$

である．また $\partial_t f_M(x,\xi) \in S(M^{-r+1},G)$ である．今 $\sum_{|\alpha+\beta|+k=r}\cdots$ の項が y_l $(1\le l\le d)$ を含まなければ $\partial_{x_l} f_M \in S(M^{-r},G)$，$\eta_d$ を含まなければ $\partial_{\xi_d} f_M \in S(M^{-r}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},G)$ さらに η_l $(1\le l\le d-1)$ と η_d を含まなければ $\partial_{\xi_l} f_M \in S(M^{-r}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},G)$ である．

証明. $f(t,y,\eta+e_d)$ を $(t,y,\eta)=(0,0,0)$ の周りで Taylor 展開すると

$$f(t,y,\eta+e_d)=\sum_{|\alpha+\beta|+k=r}\frac{1}{k!\alpha!\beta!}\partial_t^k\partial_y^\alpha\partial_\eta^\beta f(0,0,e_d)t^k y^\alpha\eta^\beta$$
$$+\sum_{|\alpha+\beta|+k=r+1}\frac{r+1}{k!\alpha!\beta!}t^k y^\alpha\eta^\beta\int_0^1(1-\theta)^r\partial_t^k\partial_y^\alpha\partial_\eta^\beta f(\theta t,\theta y,\theta\eta+e_d)d\theta$$

と書ける．ここで $t^k y^\alpha\eta^\beta\in S(M^{-|\alpha+\beta|-k},G)$ に注意する．$|(t,y,\eta)|\le CM^{-1}$ より積分項は $S(1,G)$ に属すので右辺第 2 項は $S(M^{-r-1},G)$ に属す．$\partial_t f_M\in S(M^{-r+1},G)$ はこの式より明らか．次に $\sum_{|\alpha+\beta|+k=r}\cdots$ の項が y_l を含まなければ (5.1.5) より $\partial_{x_l}f_M\in S(M^{-r},G)$ は明らか．η_l, η_d を含まないときは補題 5.1.1 を (5.1.5) に適用すれば結論が従う．　□

補題 5.1.3. $C>0$ が存在して

$$\left|\partial_{x_1}q_M\right|\le CM^{-1/2}\sqrt{q_M}\,\langle\xi\rangle_\gamma,\quad \left|\partial_{x_j}q_M\right|\le C\sqrt{q_M}\,\langle\xi\rangle_\gamma,\ \ j\neq 1,\quad (a),$$
$$\left|\partial_{\xi_j}q_M\right|\le CM^{-1/2}\sqrt{q_M},\ \ j=1,d,\quad \left|\partial_{\xi_j}q_M\right|\le C\sqrt{q_M},\ \ j\neq 1,d,\quad (b).$$

証明. まず $q(t,y,\eta+e_d)$ が非負値で $\partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta q(0,0,e_d)=0$ $(k+|\alpha|+|\beta|<2)$ より $f=q$ のときの (5.1.5) において $|\alpha+\beta|+k=2$ の項は半正定符号の 2 次形式であることに注意する．(a) の場合は (4.3.12) より $\partial_{x_1}^2 q(0,0,e_d)=0$ なのでこの 2 次形式の項は y_1 を含まない．したがって補題 5.1.2 から $\partial_{x_1}^2 q_M\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^2,G)$ および $\partial_{x_j}^2 q_M\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^2,G)$ が従うので以下 q_M に Glaeser の不等式を適用すればよい．次に (b) を考える．斉次関数に関する Euler の恒等式から $\partial_{\xi_d}^2 q(0,0,e_d)=0$ であるから (5.1.5) の 2 次形式項は η_d を含まないので $\partial_{\xi_d}^2 q_M\in S(M^{-1},G)$ となる．したがって再び Glaeser の不等式を適用すれば $\left|\partial_{\xi_d}q_M\right|\le CM^{-1/2}\sqrt{q_M}$ が得られる．次に (4.3.12) より $\partial_{\xi_1}^2 q(0,0,e_d)=0$ なので同じ議論を繰り返して $\left|\partial_{\xi_1}q_M\right|\le CM^{-1/2}\sqrt{q_M}$ を得る．$j\neq 1,d$ のときは $\partial_{\xi_j}^2 q_M\in S(1,G)$ より $|\partial_{\xi_j}q_M|\le C\sqrt{q_M}$ を得る．　□

補題 5.1.4. $\psi_M\in S(M^{-1},G)$ でさらに

$$\begin{cases}\psi_M(x,\xi)-M^{-1}\chi(M\xi_1\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\in S(M^{-2},G),\\ \partial_{x_j}\psi_M(x,\xi)\in S(M^{-1},G),\ \ \forall j,\\ \partial_{\xi_k}\psi_M(x,\xi)-\delta_{1k}\chi^{(1)}(M\xi_1\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},G)\end{cases}\qquad (a)$$

$$\begin{cases}\psi_M(x,\xi)-M^{-1}\chi(Mx_1)-cM^{-1}\chi(Mx_d)\in S(M^{-2},G),\\ \partial_{\xi_j}\psi_M(x,\xi)\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},G),\ \ \forall j,\\ \partial_{x_k}\psi_M-\delta_{1k}\chi^{(1)}(Mx_1)-c\,\delta_{dk}\chi^{(1)}(Mx_d)\in S(M^{-1},G).\end{cases}\qquad (b)$$

証明. (a) の場合を示す．$|\eta(\xi)+e_d|^2=\sum_{j=1}^{d-1}\eta_j^2+(\eta_d+1)^2=1+k$, $k\in S(M^{-1},G)$ に注意すると $1/|\eta(\xi)+e_d|=1+\tilde{k}$, $\tilde{k}\in S(M^{-1},G)$ がわかるので $\eta_1(\xi)/|\eta(\xi)+e_d|-\eta_1(\xi)\in$

$S(M^{-2},G)$ が従う．補題 5.1.2 より $\psi_M(x,\xi)-\eta_1(\xi)/|\eta(\xi)+e_d|\in S(M^{-2},G)$ なので最初の主張が得られる．2 番目の主張は (4.3.11) と補題 5.1.2 から明らかである．3 番目の主張は 1 番目の主張から直ちに従う．場合 (b) についても同様である．□

補題 5.1.2 より $\psi_M(x,\xi)\in S(M^{-1},G)$, $\ell_M\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma,G)$, $q_M\in S(M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma^2,G)$ である．次の 2 つの命題が条件 (4.3.10) を量的に表現したものとなっている．

命題 5.1.1. $\{\psi_M,q_M\}\in S(M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma,G)$．また $\big|\{q_M,\psi_M\}\big|\le CM^{-1/2}\sqrt{q_M}$.

証明. (a) の場合に示す．補題 5.1.3 の証明から $f=q$ のときの (5.1.5) の 2 次形式項は y_1 を含まない．したがって補題 5.1.2 から $\partial_{x_1}q_M\in S(M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma^2,G)$ が従う．従って補題 5.1.4 より最初の結論を得る．2 番目の主張は補題 5.1.3 と 補題 5.1.4 から従う．(b) の場合も同様である．□

命題 5.1.2. $\{\ell_M,\psi_M\}\in S(1,G)$ である．また $\sup\big|\{\ell_M,\psi_M\}\big|\le|\kappa|+CM^{-1}$ が成り立つ．ここで $\kappa=\partial_{x_1}\ell(0,e_d)$, (a) または $\kappa=-\partial_{\xi_1}\ell(0,e_d)$, (b) である．特に $|\kappa|<1$.

証明. Euler の斉次関数に関する恒等式より $\partial_{\xi_d}\ell(0,0,e_d)=0$ なので補題 5.1.2 より $\partial_{\xi_d}\ell_M\in S(M^{-1},G)$ となる．$|\alpha|=1$ のとき $\partial_x^\alpha\psi_M\in S(M^{-1},G)$, (a) および $\partial_\xi^\alpha\psi_M\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},G)$, (b) なので補題 5.1.4 から

$$\{\ell_M,\psi_M\}+\kappa\chi^{(1)}(Mx_1)\chi^{(1)}(M\xi_1\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\in S(M^{-1},G)$$

が直ちに従う．また $\chi^{(1)}(Mx_1)\chi^{(1)}(M\xi_1\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\in S(1,G)$ でその絶対値は 1 以下であり一方 (4.3.10) から $|\kappa|<1$ である．□

以後記号を簡単にするために M を省略してを ψ_M, ℓ_M, q_M を単に $\psi(x,\xi)$, $\ell(t,x,\xi)$, $q(t,x,\xi)$ と書くことにする．$|\eta(\xi)+e_d|\ge(1-CM^{-1})$ および (4.3.9) より $M_1>0$, $\underline{c}>0$ があって $M\ge M_1$ のとき次式が成り立つ.

$$q(t,x,\xi)\ge\underline{c}\,(t-\psi(x,\xi))^2\langle\xi\rangle_\gamma^2. \tag{5.1.6}$$

5.2　非負シンボルの局所化に関連する weight

この節では非負シンボル $0\le a(x,\xi)\in S(M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma^2,G)$ の扱いに有用な weight について考察する．次の $\bar g$ は admissible metric (定義 7.1.3, 補題 7.1.3) で本書全体を通じて利用する．

$$\bar g_z(w)=\langle\xi\rangle_\gamma|y|^2+\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|\eta|^2,\quad z=(x,\xi),\ w=(y,\eta)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d. \tag{5.2.7}$$

ここで $\langle\xi\rangle_\gamma=(\gamma^2+|\xi|^2)^{1/2}$ で $\gamma\geq 1$ は正のパラメーターで (5.1.1) の制限下で動くものとする．$a\in S(m,\bar{g})$ とは $C_{\alpha,\beta}$ が存在して

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right|\leq C_{\alpha,\beta}\,m(x,\xi)\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2},\quad \alpha,\beta\in\mathbb{N}^d$$

が成立すること (定義 7.2.1) であるから (5.1.1) より $M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\leq 1$ に注意すると $M^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|}\leq(M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{|\alpha+\beta|/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}$ より $S(m,G)\subset S(m,\bar{g})$ は明らかである．パラメーター $\lambda\geq 1$ を導入して

$$b(t,x,\xi)=\big(a(t,x,\xi)+\lambda\langle\xi\rangle_\gamma\big)^{1/2}\tag{5.2.8}$$

とおく．ここで λ は

$$\lambda M^2\leq\gamma,\qquad \lambda\geq 1\tag{5.2.9}$$

の制限の下で動くものとする．したがって $\lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\leq M^{-2}$ が成り立っている．以前に約束したようにこの節ではパラメーター λ, M, γ ((5.1.1), (5.2.9) の制限下で動く) によらない C が存在して $A\leq CB$ が成り立つとき $A\lesssim B$ と表す．

補題 5.2.1. $|\alpha+\beta|\geq 1$ のとき $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b^{\pm1}\in S(\lambda^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}b^{\pm1},\bar{g})$．特に $b^{\pm1}\in S(b^{\pm1},\bar{g})$.

証明. $b=b^{+1}$ の場合を考えよう．

$$\bar{a}=a(t,x,\xi)\langle\xi\rangle_\gamma^{-2},\quad \bar{b}=(\bar{a}+\lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{1/2}\tag{5.2.10}$$

とおくと $b=\langle\xi\rangle_\gamma\bar{b}$ である．$CM^{-1}\geq\bar{b}\geq\lambda^{1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}$ より $(\bar{b}\lambda^{-1/2})^k\geq\langle\xi\rangle_\gamma^{-k/2}$ $(k\geq 0)$ でこの評価は以下よく利用する．$0\leq\bar{a}\in S(M^{-2},G)$ より Glaeser の不等式を適用すると

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\bar{a}|\lesssim\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|}\sqrt{\bar{a}}\lesssim\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\sqrt{\bar{a}}\,\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2},\quad |\alpha+\beta|=1\tag{5.2.11}$$

が成立する．また $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|$ は

$$\lesssim\lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1-|\beta|}\lesssim\lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-3/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-(|\alpha+\beta|-1)/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\tag{5.2.12}$$

と評価される．これより $\sqrt{\bar{a}}\leq\bar{b}$ に注意すれば $|\alpha+\beta|=1$ のとき

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\bar{b}|\lesssim|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(\bar{a}+\lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})|/\bar{b}\lesssim\lambda^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\,\bar{b}\tag{5.2.13}$$

は明らかである．いま $1\leq|\alpha+\beta|\leq l$ のとき (5.2.13) が成立すると仮定する．$\bar{b}^2=\bar{a}+\lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}$ を微分すると $|\alpha+\beta|=l+1\geq 2$ として

$$\bar{b}\,\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\bar{b}=\sum_{1\leq|\alpha'+\beta'|\leq l}C_{\dots}\partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^{\beta'}\bar{b}\cdot\partial_x^{\alpha''}\partial_\xi^{\beta''}\bar{b}+\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\bar{a}+\lambda\,\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\tag{5.2.14}$$

を得る．右辺第 2 項は $\bar{a} \in S(M^{-2}, G)$ より

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}| &\lesssim M^{-2+|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|} \\
\lesssim \langle\xi\rangle_\gamma^{-1}(M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\alpha+\beta|-2)/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2} &\lesssim \bar{b}^2\lambda^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}
\end{aligned} \tag{5.2.15}
$$

と評価される．(5.2.14) の右辺第 3 項には (5.2.12) を利用すればよい．したがって (5.2.14) に帰納法の仮定を用いると (5.2.13) が $|\alpha+\beta| = l+1$ のときも成立することが分かる．b の評価は (5.2.13) から直ちに従う．$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b^{-1}$ の評価は $b^{-1}b = 1$ を微分すれば $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b$ の評価と帰納法から得られる．□

補題 5.2.2. $b^{\pm 1}$ は $\bar{g}$ admissible weight (定義 7.1.5) でさらに $b^{\pm 1} \in S(b^{\pm 1}, \bar{g})$.

証明. $b^{\pm 1} \in S(b^{\pm 1}, \bar{g})$ は補題 5.2.1 で示した．$\langle\xi\rangle_\gamma$ は $\bar{g}$ admissible weight である (補題 7.1.3) から $\bar{b}$ が $\bar{g}$ admissible weight であることを示せばよい．$|\alpha+\beta| = 1$ のとき (5.2.11) より $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{a}|/\bar{b} \lesssim \langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|}$ でまた $|\partial_\xi^\beta \lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}| \lesssim \lambda\langle\xi\rangle_\gamma^{-1-|\beta|} \lesssim \bar{b}^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|}$ であるから $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \bar{b}| \lesssim \langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|}$ である．$|\eta| \le c\,\langle\xi\rangle_\gamma$ とすると (7.1.15) より C が存在して

$$
\langle\xi+s\eta\rangle_\gamma/C \le \langle\xi\rangle_\gamma \le C\langle\xi+s\eta\rangle_\gamma, \quad |s| \le 1 \tag{5.2.16}
$$

が成立する．したがって有限増分の定理より

$$
|\bar{b}(z+w) - \bar{b}(z)| \le C(|y| + \langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|\eta|) \le C\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\bar{g}_z^{1/2}(w) \le C\bar{b}(z)\bar{g}_z^{1/2}(w)
$$

すなわち

$$
\bar{b}(z+w) \le C\bar{b}(z)(1+\bar{g}_z(w))^{1/2} \tag{5.2.17}
$$

が成り立つ．$|\eta| \ge c\langle\xi\rangle_\gamma$ のときは $\bar{g}_z(w) \ge c^2\langle\xi\rangle_\gamma$ であるから

$$
\bar{b}(z+w) \le C \le C\bar{b}(z)\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2} \le C'\bar{b}(z)(1+\bar{g}_z(w))^{1/2}
$$

よりこの場合も (5.2.17) が成り立ち $\bar{b}$ は $\bar{g}$ admissible weight である．b が $\bar{g}$ admissible weight なら b^{-1} もそうであることは補題 7.1.2 から従う．□

補題 5.2.3. $a \in S(b^2, \bar{g})$ で $|\alpha+\beta| = 1$ のとき $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S(b\langle\xi\rangle_\gamma^{1-|\beta|}, \bar{g})$.

証明. $\langle\xi\rangle_\gamma \le b^2$ より $\langle\xi\rangle_\gamma \in S(b^2, \bar{g})$ ゆえ $a \in S(b^2, \bar{g})$ は明らかである．つぎに一般に $\tilde{a} \in S(M^{-1-k}\langle\xi\rangle_\gamma^\ell, G)$ のとき $b \ge (\lambda\langle\xi\rangle_\gamma)^{1/2} \ge \langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}$ より

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{a}| &\lesssim M^{-1-k+|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_\gamma^{\ell-|\beta|} \lesssim M^{-k}\big(M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\big)^{(|\alpha+\beta|-1)/2} \\
\times\langle\xi\rangle_\gamma^{\ell-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2} &\lesssim M^{-k}b\langle\xi\rangle_\gamma^{\ell-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}, \quad |\alpha+\beta| \ge 1
\end{aligned} \tag{5.2.18}
$$

に注意する．$|\alpha+\beta| = 1$ のときは (5.2.11) より $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \le Cb\langle\xi\rangle_\gamma^{1-|\beta|}$ である．$|\alpha+\beta| \ge 2$ のときは上の注意を $\tilde{a} = \partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} a \in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{2-|\beta'|}, G)$, $|\alpha'+\beta'| = 1$ として適用すればよい．□

命題 5.2.1. M および γ によらない $\lambda_1 \geq 1$ が存在し，$\lambda \geq \lambda_1$ なる λ に対して $b\#\tilde{b} = \tilde{b}\#b = 1$ を満たす $\tilde{b} \in S(b^{-1}, \bar{g})$ が存在する．

証明. 補題 5.2.2 より $b^{\pm 1}$ は $\bar{g}$ admissible weight で補題 5.2.1 より $b^{\pm 1} \in S(b^{\pm 1}, \bar{g})$ でさらに $|\alpha + \beta| = 1$ のとき $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b^{\pm 1} \in S(\lambda^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2} b^{\pm 1}, \bar{g})$ である．したがって定理 7.3.1 より $b\#b^{-1} = 1 - r$, $r \in S(\lambda^{-1}, \bar{g})$ となる．これより λ_1 が存在し $\lambda \geq \lambda_1$ のとき定理 7.5.1 が適用できて

$$\tilde{r}(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} r^{\#j} \in S(1, \bar{g})$$

が成立する．ゆえに $b\#(b^{-1}\#\tilde{r}) = 1$ である．同様にして $\hat{r} \in S(1, \bar{g})$ が存在して $\hat{r}\#b^{-1}\#b = 1$ となる．$\hat{r}\#b^{-1}\#b\#(b^{-1}\#\tilde{r})\#b = 1$ より $(b^{-1}\#\tilde{r})\#b = 1$ でもある．いま $\tilde{b} = b^{-1}\#\tilde{r} \in S(b^{-1}, \bar{g})$ とおけばこれが求めるものである． □

補題 5.2.4. M および γ によらない $\lambda_2 \geq \lambda_1$ が存在し，$\lambda \geq \lambda_2$ のとき

$$(\mathrm{op}(a + \lambda\langle\xi\rangle_\gamma)v, v) = (\mathrm{op}(b^2)v, v) \geq \|\mathrm{op}(b)v\|^2/2, \quad v \in \mathcal{S}$$

が成立する．

証明. 補題 5.2.1 より $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b \in S(\lambda^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2} b, \bar{g})$, $|\alpha + \beta| = 2$ に注意すると定理 7.3.1 より $b\#b = b^2 + r$, $r \in S(\lambda^{-1}b^2, \bar{g})$ が従う．ここで $\lambda \geq \lambda_1$ とすると命題 5.2.1 の $\tilde{b} \in S(b^{-1}, \bar{g})$ が存在するので $r = b\#(\tilde{b}\#r\#\tilde{b})\#b$ と書くとき $\tilde{b}\#r\#\tilde{b} \in S(\lambda^{-1}, \bar{g})$ で定理 7.4.1 より λ によらない $C > 0$ があって $\|\mathrm{op}(\tilde{b}\#r\#\tilde{b})v\| \leq C\lambda^{-1}\|v\|^2$ が成立する．従って $|(\mathrm{op}(r)v, v)| \leq C\lambda^{-1}\|\mathrm{op}(b)v\|^2$ である．以上より

$$(\mathrm{op}(b^2)v, v) = \|\mathrm{op}(b)v\|^2 - (\mathrm{op}(r)v, v) \geq (1 - C\lambda^{-1})\|\mathrm{op}(b)v\|^2$$

が成立する．ゆえに $\lambda_2 \geq \lambda_1$ を $1 - C\lambda_2 \leq 1/2$ と選べばよい． □

つぎの不等式は強形 Gårding 不等式と呼ばれる．

系 5.2.1. $0 \leq a(x,\xi) \in S^2$ とすると $C > 0$ が存在して次が成り立つ．

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{op}(a)u, u) \geq -C\|\langle D\rangle^{1/2}u\|^2, \quad u \in \mathcal{S}.$$

証明. $M = 1$, $\gamma \geq \lambda_2$ を固定すると $a \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^2, G)$ であるから補題 5.2.4 を $\lambda = \lambda_2$ として適用すると

$$(\mathrm{op}(a)v, v) \geq \|\mathrm{op}((a + \lambda_2\langle\xi\rangle_\gamma)^{1/2})v\|^2/2 - \lambda_2\|\langle D\rangle_\gamma^{1/2}v\|^2 \geq -C\|\langle D\rangle^{1/2}v\|^2$$

を得る． □

5.3　局所化シンボルを持つ擬微分作用素の有界性, 可逆性

この節でもすべての定数はパラメーター M, γ によらない．局所座標系の変換 (a) と (b) に関係した次の metric を導入する．

$$
\begin{aligned}
g_\epsilon(y,\eta) = M^{-2\delta_{\epsilon a}}\langle\xi\rangle_\gamma|y|^2 + M^{-2\delta_{\epsilon b}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|\eta|^2, \quad \gamma \geq M^4 \geq 1,\\
\epsilon(\alpha,\beta) = |\alpha|\delta_{\epsilon a} + |\beta|\delta_{\epsilon b}.
\end{aligned}
\tag{5.3.19}
$$

ここで ϵ は $\epsilon = a$ または $\epsilon = b$ で $\epsilon = \epsilon'$ のとき $\delta_{\epsilon\epsilon'} = 1$ でそれ以外は $\delta_{\epsilon\epsilon'} = 0$ と約束する．g_ϵ は admissible metric で $\langle\xi\rangle_\gamma^s$, $s \in \mathbb{R}$ は g_ϵ admissible weight である (補題 7.1.3). $a(x,\xi) \in S(m, g_\epsilon)$ とは

$$
\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\, m(x,\xi) M^{-\epsilon(\alpha,\beta)}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d
$$

が成立することであるから $0 \leq \epsilon(\alpha,\beta) \leq |\alpha+\beta|$ に注意すると $M^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\beta|} \leq (M^4\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{|\alpha+\beta|/2} M^{-\epsilon(\alpha,\beta)}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}$ より $S(m,G) \subset S(m,g_\epsilon)$ は明らかである．(7.1.4) より $g_{\epsilon,z}/g_{\epsilon,z}^\sigma = M^{-2(\delta_{\epsilon a}+\delta_{\epsilon b})} = M^{-2}$ であるから

$$
g_\epsilon/g_\epsilon^\sigma \leq M^{-2}, \quad g_\epsilon \leq \bar{g} \tag{5.3.20}
$$

が成り立っている．$g_\epsilon \leq \bar{g}$ より m が g_ϵ admissible weight なら m は $\bar{g}$ admissible weight (定義 7.1.5) で $S(m,g_\epsilon) \subset S(m,\bar{g})$ である．この節では以下 g は (5.3.20) および (7.1.12) と (7.1.13) を満たす admissible metric とする．

補題 5.3.1. m を g admissible weight で $m \in S(m,g)$ とする．このとき $M_0 > 0$ と $k \in S(M^{-1},g)$ $(M > M_0)$ が存在して次を満たす.

$$
m\#m^{-1}\#(1+k) = 1, \;\; (1+k)\#m\#m^{-1} = 1, \;\; m^{-1}\#(1+k)\#m = 1.
$$

証明. 補題 7.1.2 より m^{-1} は g admissible weight で $m^{-1} \in S(m^{-1},g)$ であるから系 7.3.1 より $m\#m^{-1} = 1-r$, $r \in S(M^{-1},g) \subset S(M^{-1},\bar{g})$ と書ける．定理 7.5.1 より M_0 が存在し $M > M_0$ のとき $\sum_{\ell=0}^\infty r^{\#\ell}$ は $S(1,\bar{g})$ で収束する． $k = \sum_{\ell=1}^\infty r^{\#\ell} \in S(1,\bar{g})$ $(M > M_0)$ とおくと $(1-r)\#(1+k) = (1+k)\#(1-r) = 1$ である．よって最初の 2 式は示された．$k \in S(M^{-1},g)$ を示すことが残っているが任意の $\alpha \in \mathbb{N}^{2d}$ に対して

$$
\partial_z^\alpha k \in S(M^{-1}\prod g_z^{1/2}(t_i), \bar{g}), \quad \partial_z^\alpha = \prod \partial_z^{t_i}, \;\; |t_i| = 1, \;\; \alpha \in \mathbb{N}^{2d} \tag{5.3.21}
$$

が成立することを示せば十分である．(7.5.44) より $k \in S(M^{-1},\bar{g})$ であるから $|\alpha| = 0$ のときは成立する．$|\alpha| \leq l$ のとき (5.3.21) が成立するとして $|\alpha| = l+1$ のときを考え

よう．k は $k=r+r\#k$ を満たすので (7.3.27) より

$$\partial_z^\alpha k=\partial_z^\alpha r+\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha,|\alpha''|\le l}C_{\alpha',\alpha''}(\partial_z^{\alpha'}r)\#(\partial_z^{\alpha''}k)+r\#(\partial_z^\alpha k)$$

が成り立つ．これより

$$\partial_z^\alpha k=(1+k)\#(1-r)\#\big(\partial_z^\alpha r+\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha,|\alpha''|\le l}C_{\alpha',\alpha''}(\partial_z^{\alpha'}r)\#(\partial_z^{\alpha''}k)\big)$$

が従うので $1+k$, $1-r\in S(1,\bar g)$ に注意して定理 7.3.1 を適用すると仮定より右辺は $S(M^{-1}\prod g_z^{1/2}(t_i),\bar g)$, $(\partial_z^\alpha=\prod\partial_z^{t_i},\ |t_i|=1)$ に属す．以上より $|\alpha|=l+1$ のときも (5.3.21) が成立する．ゆえに帰納法よりすべての α に対し成立し $k\in S(M^{-1},g)$ がわかる．同様にして $(1+\tilde k)\#m^{-1}\#m=1$ $(M>M_0)$ を満たす $\tilde k\in S(M^{-1},g)$ が存在するのでこれより第 3 式が従う． □

補題 5.3.2. $m_i>0$, $i=1,2$ は g admissible weight で $m_i\in S(m_i,g)$ とする．$\bar m$ を $\bar g$ admissible weight で $a\in S(\bar m m_1m_2,\bar g)$ とすると $M_0>0$ と $\tilde a\in S(\bar m,\bar g)$ $(M>M_0)$ が存在して $a=m_1\#\tilde a\#m_2$ と書ける．$\bar m$ が g admissible weight で $a\in S(\bar m m_1m_2,g)$ とすると $\tilde a\in S(\bar m,g)$ は $(m_1m_2)^{-1}a+r$, $r\in S(M^{-1}\bar m,g)$ で与えられる．

証明. 補題 5.3.1 より $k,\tilde k\in S(M^{-1},g)$ $(M>M_0)$ で $m_1\#(1+k)\#m_1^{-1}=1$, $m_2^{-1}\#(1+\tilde k)\#m_2=1$ を満たすものがある．$\tilde a=(1+k)\#m_1^{-1}\#a\#m_2^{-1}\#(1+\tilde k)$ とおくとこの $\tilde a\in S(\bar m,\bar g)$ が求めるものである．$\bar m$ も g admissible weight で $a\in S(\bar m m_1m_2,g)$ ならば系 7.3.1 を適用して $\tilde a-(m_1m_2)^{-1}a\in S(M^{-1}\bar m,g)$ が従う． □

補題 5.3.3. $m_i>0$, $i=1,2$ は g admissible weight で $m_i\in S(m_i,g)$ とする．いま $\bar m$ を $\bar g$ admissible weight とし $a\in S(\bar m m_1m_2,\bar g)$ または $a\in S(\bar m m_1,\bar g)$ とすると M_0 と $\tilde a\in S(\bar m,\bar g)$ $(M>M_0)$ が存在しそれぞれ

$$\begin{gathered}\big|(\mathrm{op}(a)u,v)\big|\le\|\mathrm{op}(\tilde a)\mathrm{op}(m_1)u\|\|\mathrm{op}(m_2)v\|,\\ \|\mathrm{op}(a)u\|\le\|\mathrm{op}(\tilde a)\mathrm{op}(m_1)u\|\end{gathered}$$

が成立する．$\bar m>0$ も g admissible weight かつ $\bar m\in S(\bar m,g)$ で $a\in S(\bar m m_1m_2,g)$ または $a\in S(\bar m m_1,g)$ とする．このとき $\tilde a=(m_1m_2)^{-1}a\in S(\bar m,g)$ または $\tilde a=m_1^{-1}a\in S(\bar m,g)$ とおくとそれぞれ次が成立する．

$$\begin{gathered}|(\mathrm{op}(a)u,v)|\le\|\mathrm{op}(\tilde a)\mathrm{op}(m_1)u\|\|\mathrm{op}(m_2)v\|\\ +CM^{-1}\|\mathrm{op}(\bar m)\mathrm{op}(m_1)u\|\|\mathrm{op}(m_2)v\|,\\ \|\mathrm{op}(a)u\|\le\|\mathrm{op}(\tilde a)\mathrm{op}(m_1)u\|+CM^{-1}\|\mathrm{op}(\bar m)\mathrm{op}(m_1)u\|.\end{gathered}$$

証明. 最初の 2 つの主張は補題 5.3.2 から容易に従う．$\bar{m}$ を g admissible weight で $\bar{m} \in S(\bar{m}, g)$ とする．補題 5.3.2 より $r \in S(M^{-1}\bar{m}, g)$ があって $a = m_2\#(\tilde{a}+r)\#m_1$ と書けるので $\big|(\mathrm{op}(a)u, v)\big| \le \|\mathrm{op}(\tilde{a}+r)\mathrm{op}(m_1)u\|\|\mathrm{op}(m_2)v\|$ が従う．再び補題 5.3.2 より $r = \tilde{r}\#\bar{m}$, $\tilde{r} \in S(M^{-1}, g)$ と書くと定理 7.4.1 より $\|\mathrm{op}(\tilde{a}+r)v\| \le \|\mathrm{op}(\tilde{a})v\| + CM^{-1}\|\mathrm{op}(\bar{m})v\|$ であるから $v = \mathrm{op}(m_1)u$ として結論を得る．最後の主張はこの証明で $m_2 = 1$ とすればよい．　□

系 5.3.1. $a \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^s m_1 m_2, \bar{g})$ とし $s_1 + s_2 = s$ とする．このとき

$$|(\mathrm{op}(a)u, v)| \le C\|\langle D\rangle_\gamma^{s_1}\mathrm{op}(m_1)u\|\|\langle D\rangle_\gamma^{s_2}\mathrm{op}(m_2)v\|.$$

証明. $a = \langle\xi\rangle_\gamma^{s_2}\#\tilde{a}\#\langle\xi\rangle_\gamma^{s_1}$, $\tilde{a} = \langle\xi\rangle_\gamma^{-s_2}\#a\#\langle\xi\rangle_\gamma^{-s_1} \in S(m_1 m_2, \bar{g})$ と書いて $\tilde{a}$ に補題 5.3.3 を適用すると $|(\mathrm{op}(a)u, v)|$ は $C\|\mathrm{op}(m_1)\langle D\rangle_\gamma^{s_1}u\|\|\mathrm{op}(m_2)\langle D\rangle_\gamma^{s_2}v\|$ で評価され再び補題 5.3.3 よりさらに $C\|\langle D\rangle_\gamma^{s_1}\mathrm{op}(m_1)u\|\|\langle D\rangle_\gamma^{s_2}\mathrm{op}(m_2)v\|$ で評価される．　□

系 5.3.2. $m > 0$ を g admissible weight で $m \in S(m, g)$ とする．このとき $C > 0$ が存在し $(\mathrm{op}(m)u, u) \ge (1 - CM^{-1})\|\mathrm{op}(\sqrt{m})u\|^2$ が成立する．$a \in S(m, g)$ はある $c > 0$ について $a \ge cm$ を満たすとする．このとき $C > 0$ が存在し $C\|\mathrm{op}(a)u\| \ge \|\mathrm{op}(m)u\|$ および $C(\mathrm{op}(a)u, u) \ge \|\mathrm{op}(\sqrt{m})u\|^2$ が成り立つ．

証明. 補題 7.1.2 より $\sqrt{m}$ は g admissible weight で $\sqrt{m} \in S(\sqrt{m}, g)$ より $m \in S(\sqrt{m}\sqrt{m}, g)$ と考えて補題 5.3.2 を適用すると $m = \sqrt{m}\#(1+r)\#\sqrt{m}$, $r \in S(M^{-1}, g)$ と書けるから後は明らかである．次に $C_1 > 0$ があって $m/C_1 \le a \le C_1 m$ より a は g admissible weight で $m \in S(a, g)$ であるから補題 5.3.3 を適用 して $C\|\mathrm{op}(a)u\| \ge \|\mathrm{op}(m)u\|$ を得る．また $a \in S(a, g)$ でもあるから最初の主張より $C(\mathrm{op}(a)u, u) \ge \|\mathrm{op}(\sqrt{a})u\|^2$ が成り立つ．ここで $\sqrt{a} \in S(\sqrt{m}, g)$ より 2 番目の結果を $\sqrt{a}$ に適用すれば最後の主張が得られる．　□

補題 5.3.4. $m_i > 0$, $i = 1, 2$ は g admissible weight で $m_i \in S(m_i, g)$ とし，$w > 0$ は $\bar{g}$ admissible weight かつ $w \in S(w, \bar{g})$ でさらに $\tilde{w}\#w = w\#\tilde{w} = 1$ となる $\tilde{w} \in S(w^{-1}, \bar{g})$ が存在するとする．いま $\bar{m}$ を $\bar{g}$ admissible weight とし $a \in S(\bar{m}m_1m_2w, \bar{g})$ とすると M_0 と $\hat{a} \in S(\bar{m}, \bar{g})$ $(M > M_0)$ が存在し

$$\big|(\mathrm{op}(a)u, v)\big| \le \|\mathrm{op}(\hat{a})\mathrm{op}(m_1)u\|\|\mathrm{op}(w)\mathrm{op}(m_2)v\|,$$
$$\|\mathrm{op}(a)u\| \le \|\mathrm{op}(\hat{a})\mathrm{op}(m_2)\mathrm{op}(w)\mathrm{op}(m_1)u\|$$

が成立する．また $a \in S(m_1 m_2 w^2, \bar{g})$ のとき次が成り立つ．

$$\big|(\mathrm{op}(a)u, v)\big| \le C\|\mathrm{op}(w)\mathrm{op}(m_1)u\|\|\mathrm{op}(w)\mathrm{op}(m_2)v\|.$$

証明. 補題 5.3.2 より $\tilde{a} \in S(\bar{m}w, \bar{g})$ が存在し $a = m_2\#\tilde{a}\#m_1$ と書ける．従って $\tilde{w} \in S(w^{-1}, \bar{g})$ を用いて $\tilde{a} = w\#(\tilde{w}\#\tilde{a})$ と書けば $\hat{a} = \tilde{w}\#\tilde{a} \in S(\bar{m}, \bar{g})$ より最初の主張を得る．つぎに $m_2\#\tilde{a} = m_2\#\tilde{a}\#\tilde{w}\#w$ と書き $m_2\#(\tilde{a}\#\tilde{w}) \in S(\bar{m}m_2, \bar{g})$ に注意して再び補題 5.3.2 よりこれを $\hat{a}\#m_2$, $\hat{a} \in S(\bar{m}, \bar{g})$ と書けば 2 番目の評価を得る．最後の評価は 1 番目の評価を $\bar{m} = w$ として 2 番目の評価を $\bar{m} = 1$, $m_2 = 1$ として利用すればよい． □

系 5.3.3. $a \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^s m_1 m_2 w, \bar{g})$ あるいは $a \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^s m_1 m_2 w^2, \bar{g})$ で $s_1 + s_2 = s$ とする．このときそれぞれ次が成立する．

$$|(\mathrm{op}(a)u, v)| \le C\|\langle D\rangle_\gamma^{s_1}\mathrm{op}(w)\mathrm{op}(m_1)u\|\|\langle D\rangle_\gamma^{s_2}\mathrm{op}(m_2)v\|,$$
$$|(\mathrm{op}(a)u, v)| \le C\|\langle D\rangle_\gamma^{s_1}\mathrm{op}(w)\mathrm{op}(m_1)u\|\|\langle D\rangle_\gamma^{s_2}\mathrm{op}(w)\mathrm{op}(m_2)v\|.$$

証明. $a = \langle\xi\rangle_\gamma^{s_2}\#\tilde{a}\#\langle\xi\rangle_\gamma^{s_1}$ と書いて補題 5.3.4 を $\tilde{a} \in S(m_1 m_2 w, \bar{g})$ または $\tilde{a} \in S(m_1 m_2 w^2, \bar{g})$ に適用し系 5.3.1 の証明に倣えばよい． □

補題 5.3.5. $a \in S(1, G)$ はある定数 c について $a \ge c$ を満たすとする．このとき $C > 0$ が存在し次が成立する．

$$\big(\mathrm{op}(a)u, u\big) \ge (c - CM^{-1})\|u\|^2. \tag{5.3.22}$$

証明. $a - c$ を考えることにより $c = 0$ と仮定できる．$0 \le a \in S(1, G)$ より $|\partial_x^\alpha a| \le CM^2$, $|\partial_\xi^\beta a| \le CM^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-2}$ $(|\alpha| = |\beta| = 2)$ ゆえ Glaeser の不等式から $|\alpha + \beta| = 1$ のとき $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a| \le CM\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\sqrt{a} \le CM^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\sqrt{a}$ が従う．ゆえに $b(x, \xi) = (a(x, \xi) + M^{-1})^{1/2} \ge M^{-1/2}$ とおくと $|\alpha + \beta| = 1$ のとき

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b| \le CM^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\sqrt{a}/b \le CM^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}b$$

が成り立つ．これから出発して $b^2 = a + M^{-1}$ を微分することによって

$$|b\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b| \lesssim \sum_{0<|\alpha'+\beta'|<|\alpha+\beta|}|\partial_x^{\alpha'}\partial_\xi^{\beta'}b||\partial_x^{\alpha''}\partial_\xi^{\beta''}b| + |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a|$$

が従う．$M^{-1} \le b^2$ より $|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a| \lesssim M^{-|\alpha+\beta|+1}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}b^2$ に注意すると帰納法で

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b| \le C_{\alpha\beta}M^{-|\alpha+\beta|/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}b \tag{5.3.23}$$

が成立することを示すのは容易である．次に b が $\bar{g}$ admissible weight であることを示そう．それには補題 5.2.2 の証明 (の一部) を繰り返せばよい．$z = (x, \xi)$, $w = (y, \eta)$ と書くことにすると $|\eta| < \langle\xi\rangle_\gamma/2$ のときは有限増分の定理より

$$|b(z + w) - b(z)| \le CM^{-1/2}\bar{g}_z^{1/2}(w) \le C\,b(z)(1 + \bar{g}_z(w))^{1/2} \tag{5.3.24}$$

が成立する．つぎに $|\eta| \geq \langle\xi\rangle_\gamma/2$ とすると $\bar{g}_z(w) \geq \langle\xi\rangle_\gamma/4 \geq M^4/4$ より

$$|b(z+w)| \leq C \leq CM^{-1/2}M^{1/2} \leq C\,b(z)(1+\bar{g}_z(w))^{1/8} \tag{5.3.25}$$

が成立する．ゆえに b は $\bar{g}$ admissible weight で $b \in S(b,\bar{g})$ である．したがって (5.3.23) と定理 7.3.1 より $b\#b = a + M^{-1} - r$, $r \in S(M^{-2}b^2,\bar{g}) \subset S(M^{-2},\bar{g})$ である．定理 7.4.1 を $\mathrm{op}(r)$ に適用すると

$$(\mathrm{op}(a+M^{-1})u,u) = \|\mathrm{op}(b)u\|^2 + (\mathrm{op}(r)u,u) \geq -CM^{-2}\|u\|^2$$

が得られ証明が終わる．□

系 5.3.4. $a \in S(1,G)$ とすると $C>0$ が存在し次が成り立つ；

$$\|\mathrm{op}(a)u\| \leq \big(\sup|a| + CM^{-1/2}\big)\|u\|.$$

証明. $\|\mathrm{op}(a)u\|^2 = (\mathrm{op}(\bar{a}\#a)u,u)$ で定理 7.3.1 より $\bar{a}\#a = |a|^2 + r$, $r \in S(M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},\bar{g})$, $M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1} \leq M^{-2}$ であるから $(\mathrm{op}(|a|^2)u,u)$ を考えればよい．$(\sup|a|)^2 - |a|^2 \geq 0$ に補題 5.3.5 を適用すると

$$(\mathrm{op}(|a|^2)u,u) \leq ((\sup|a|)^2 + CM^{-1})\|u\|^2 \leq (\sup|a| + CM^{-1/2})^2\|u\|^2$$

が得られ，これより結論が従う．□

5.4　エネルギー評価のための weight

命題 4.3.1 で得た ψ に関係する weight の 1 つを

$$\omega(t,x,\xi) = ((t-\psi(x,\xi))^2 + \langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{1/2} \tag{5.4.26}$$

で定義する．$\psi \in S(M^{-1},G)$ なので (5.1.1) と (5.1.4) より $\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2} \leq \omega \leq CM^{-1}$ は明らか．つぎにエネルギー評価を導くための重要な weight ϕ を

$$\phi(t,x,\xi) = \omega + t - \psi, \quad \omega = \sqrt{(t-\psi)^2 + \langle\xi\rangle_\gamma^{-1}}$$

で定義する．最初に ϕ の粗い描像をみておく．ϕ の代わりに $\tilde{\phi} = \langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}\phi$ を考えると $t=\psi$ 上では $\tilde{\phi}=1$ で $t>\psi$ では $2(t-\psi)\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2} \leq \tilde{\phi} \leq 2(t-\psi)\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2} + 1$ である．他方 $t<\psi$ では $(2|t-\psi|\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}+1)^{-1} \leq \tilde{\phi} \leq \langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}/2|t-\psi|$ が成り立つ．すなわち時間 t が時刻 $\psi(x,\xi)$ より過去から $\psi(x,\xi)$ に至りさらに $\psi(x,\xi)$ より未来に進むとき，$\tilde{\phi}(t,x,\xi)$ は $\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}$ から $\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}$ へと連続的に変化していく．ここで (5.1.1), (5.1.4) および $\psi \in S(M^{-1},G)$ より次は明らかである．

$$CM^{-1} \geq \phi \geq \langle\xi\rangle_\gamma^{-1}/(\omega + |t-\psi|) \geq \langle\xi\rangle_\gamma^{-1}/(2\omega) \geq M\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}/C. \tag{5.4.27}$$

また ϕ が次の関係式を満たすことも容易に確かめられる．

$$\partial\phi/\partial t=\omega^{-1}\phi,\ \ \partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\phi=\frac{-\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\psi}{\omega}\phi+\frac{\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}}{2\omega}\quad(|\alpha+\beta|=1). \tag{5.4.28}$$

補題 5.4.1. $|\alpha+\beta|\ge 1$ のとき $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\psi\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(\alpha,\beta)}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2},g_\epsilon)$．ここで $\epsilon(\alpha,\beta)$ は (5.3.19) で定義したもの．

証明. 補題 5.1.4 より $\psi=\eta_1(\xi)+r$, (a) または $\psi=y_1(x)+cy_d(x)+r$, (b) である．ここで $r\in S(M^{-2},G)$．したがって $\nu=\beta'+\beta$, $|\beta|\ge 1$ のとき

$$|\partial_\xi^\nu\psi|\lesssim M^{-1-\delta_{\epsilon b}+|\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}\lesssim\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(0,\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|/2}(M^{2+2\delta_{\epsilon b}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\nu|-1)/2}$$

が成り立つ．$\mu=\alpha'+\alpha$, $|\alpha|\ge 1$ のときは

$$|\partial_x^\mu\psi|\lesssim M^{-1-\delta_{\epsilon a}+|\mu|}\lesssim\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(\mu,0)}\langle\xi\rangle_\gamma^{|\mu|/2}(M^{2+2\delta_{\epsilon a}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\mu|-1)/2}$$

と評価される．つぎに $\mu=\alpha'+\alpha$, $|\alpha|\ge 1$ かつ $\nu=\beta'+\beta$, $|\beta|\ge 1$ のときは $2|\mu+\nu|-\epsilon(\mu,\nu)\ge|\mu+\nu|$ に注意して

$$\begin{aligned}|\partial_x^\mu\partial_\xi^\nu\psi|&\lesssim M^{-2+|\mu+\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}\\&\lesssim\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(\mu,\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\mu|-|\nu|)/2}(M^4\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\mu+\nu|-1)/2}\end{aligned}$$

と評価される．ここで (5.1.1) より $M^{2+2\delta_{\epsilon\epsilon'}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\le M^4\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\le 1$ に注意すれば証明は明らかである． □

補題 5.4.2. $s\in\mathbb{R}$, $|\alpha+\beta|\ge 1$ のとき $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\omega^s\in S(\omega^{s-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2},g_\epsilon)$．特に $\omega^s\in S(\omega^s,g_\epsilon)$．

証明. 最初に $s=2$ の場合を示す．$\omega^2=(t-\psi)^2+\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}$ ゆえ $\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}\ge 1$ および $|t-\psi|\le\omega$ に注意すると補題 5.1.4 より $\nu=\beta'+\beta$, $|\beta|\ge 1$ として

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\nu\omega^2\right|&\lesssim\omega M^{-1-\delta_{\epsilon b}+|\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}+M^{-2-2\delta_{\epsilon b}+|\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}+\langle\xi\rangle_\gamma^{-1-|\nu|}\\&\lesssim\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(0,\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|/2}(M^{2+2\delta_{\epsilon b}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\nu|-1)/2}\\&+\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(0,\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|/2}(M^{2+2\delta_{\epsilon b}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\nu|-2)/2}+\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}\end{aligned}$$

と評価される．ここで右辺の第 2 項 $M^{-2-2\delta_{\epsilon b}+|\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}$ は $|\nu|=1$ のときは無いものと理解する．右辺最後の項は $\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}\le(M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{-|\nu|/2}M^{-\epsilon(0,\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|/2}$ を用いて評価する．$\mu=\alpha'+\alpha$, $|\alpha|\ge 1$ のときは

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\mu\omega^2\right|&\lesssim\omega M^{-1-\delta_{\epsilon a}+|\mu|}+M^{-2-2\delta_{\epsilon a}+|\mu|}\\&\lesssim\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(\mu,0)}\langle\xi\rangle_\gamma^{|\mu|/2}(M^{2+2\delta_{\epsilon a}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\mu|-1)/2}\\&+\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(\mu,0)}\langle\xi\rangle_\gamma^{|\mu|/2}(M^{2+2\delta_{\epsilon a}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\mu|-2)/2}\end{aligned}$$

と評価される．ここでも $|\mu|=1$ のときは右辺第 2 項の $M^{-2-2\delta_{\epsilon a}+|\mu|}$ は無いものとする．つぎに $\mu=\alpha'+\alpha$, $\nu=\beta'+\beta$, $|\alpha+\beta|\ge 1$, $|\mu|\ge 1$ かつ $|\nu|\ge 1$ とする．r を補題 5.4.1 の証明中のそれとするとき $\partial_x^\mu\partial_\xi^\nu\psi=\partial_x^\mu\partial_\xi^\nu r$ と $\partial_x^\mu\psi\partial_\xi^\nu\psi\in S(M^{-3+|\mu+\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|},G)$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\left|\partial_x^\mu\partial_\xi^\nu\omega^2\right|\lesssim|\omega\partial_x^\mu\partial_\xi^\nu r|+M^{-3+|\mu+\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}\\
&\lesssim\omega M^{-2+|\mu+\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\nu|}+M^{1-|\mu+\nu|}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}(M^4\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\mu+\nu|-2)/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-(|\mu|-|\nu|)/2}\\
&\lesssim\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(\mu,\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\mu|-|\nu|)/2}(M^4\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\mu+\nu|-1)/2}\\
&+\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}M^{-\epsilon(\alpha',\beta')}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha'|-|\beta'|)/2}(M^4\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})^{(|\mu+\nu|-2)/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}
\end{aligned}
$$

が成立する．ここで $1-|\mu+\nu|\le-\epsilon(\alpha',\beta')$ や $\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\le\omega\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}$ を利用した．したがって $s=2$ とき主張が成立していることが分かる．$\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\le\omega$ であるから $\omega^2\in S(\omega^2,g_\epsilon)$ は明らかである．一般の $s\in\mathbb{R}$ のときは $\omega^s=(\omega^2)^{s/2}$ と書いて ω^2 に対する結果を適用すれば $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\omega^s$ の評価が得られる．□

補題 5.4.3. $\phi\in S(\phi,g_\epsilon)$.

証明. $|\alpha+\beta|=1$ のとき (5.4.28) を用いて

$$
\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\phi=\frac{-\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\psi}{\omega}\phi+\frac{\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}}{2\omega}=\phi_{\alpha\beta}\phi+\psi_{\alpha\beta} \tag{5.4.29}
$$

とおく．補題 5.4.2 より $\omega^{-1}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\in S(\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1-|\beta|},g_\epsilon)$ であるから (5.4.27) および $\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\le M^{-1}$ より

$$
\begin{aligned}
\left|\partial_x^\mu\partial_\xi^\nu\big(\psi_{\alpha\beta}\big)\right|&\lesssim\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}M^{-\epsilon(\mu,\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha+\mu|-|\beta+\nu|)/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\\
&\lesssim\phi M^{-\epsilon(\alpha+\mu,\beta+\nu)}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha+\mu|-|\beta+\nu|)/2}
\end{aligned} \tag{5.4.30}
$$

が従う．他方 $\omega^{-1}\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2},g_\epsilon)$ に注意すると補題 5.4.1 から

$$
\phi_{\alpha\beta}\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2},g_\epsilon),\quad|\alpha+\beta|\ge 1 \tag{5.4.31}
$$

が従う．関係式 (5.4.29) および (5.4.30), (5.4.31) を利用すると $|\alpha+\beta|$ に関する帰納法で結論が得られる．□

命題 5.4.1. $\omega^s\in S(\omega^s,g_\epsilon)$ および $\phi^s\in S(\phi^s,g_\epsilon)$．さらに $|\alpha+\beta|\ge 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\omega^s&\in S(\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\omega^s,g_\epsilon),\\
\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\phi^s&\in S(\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\phi^s,g_\epsilon).
\end{aligned}
$$

証明. ω^s については補題 5.4.2 で示した．$\phi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}$ は (5.4.29) のそれとする．補題 5.4.1 より $|\alpha+\beta|\ge 1$ のとき $\phi_{\alpha\beta}\in S(\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2},g_\epsilon)$ である．一方 (5.4.30) と

(5.4.27) から $\psi_{\alpha\beta} \in S(\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\phi, g_\epsilon)$, $|\alpha+\beta| \ge 1$ を得る．補題 5.4.3 より $\phi \in S(\phi, g_\epsilon)$ なので (5.4.29) から ϕ^s に対する $s=1$ のときの主張が従う．ϕ^s については ϕ の主張から従う． □

命題 5.4.2. ω と ϕ は g_ϵ admissible weight (定義 7.1.5) である．

証明. 次を示せば十分である．

$$\omega(z+w) \le C\omega(z)(1+g_{\epsilon,z}(w)), \quad \phi(z+w) \le C\phi(z)(1+g_{\epsilon,z}(w))^2. \tag{5.4.32}$$

いま $|\eta| \ge \langle\xi\rangle_\gamma/2$ とすると $\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2} \le \omega \le CM^{-1}$ に注意して

$$g_{\epsilon,z}(w) \ge M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|\eta|^2 \ge M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma/4 \ge \big(M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}\big)\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}/4 \ge \langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}/4$$

を得る．ゆえに (5.4.27) に注意して

$$\begin{gathered}\omega(z+w) \le CM^{-1} \le CM^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}\omega(z) \le C\omega(z)(1+g_{\epsilon,z}(w)),\\ \phi(z+w) \le CM^{-1} \le CM^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma\phi(z) \le C\phi(z)(1+g_{\epsilon,z}(w))^2\end{gathered} \tag{5.4.33}$$

が成立する．つぎに $|\eta| < \langle\xi\rangle_\gamma/2$ と仮定する．$f = t-\psi$ および $h = \langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}$ とおくと $\omega^2 = f^2+h^2$ である．$|f(z+w)+f(z)|/|\omega(z+w)+\omega(z)|$ と $|h(z+w)+h(z)|/|\omega(z+w)+\omega(z)|$ は 2 以下ゆえ次が成立する．

$$\begin{aligned}|\omega(z+w)-\omega(z)| &= |\omega^2(z+w)-\omega^2(z)|/|\omega(z+w)+\omega(z)|\\ &\le 2|f(z+w)-f(z)|+2|h(z+w)-h(z)|.\end{aligned} \tag{5.4.34}$$

他方 $|f(z+w)-f(z)| = |\psi(z+w)-\psi(z)|$ ゆえ補題 5.4.1 と (5.2.16) より

$$\begin{aligned}|f(z+w)-f(z)| \le C(M^{-\delta_{\epsilon a}}|y| + M^{-\delta_{\epsilon b}}\langle\xi+s\eta\rangle_\gamma^{-1}|\eta|)\\ \le C\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}(M^{-\delta_{\epsilon a}}\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}|y| + M^{-\delta_{\epsilon b}}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}|\eta|) \le C\omega(z)g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)\end{aligned} \tag{5.4.35}$$

と評価できる．同様に $g_{\epsilon,z}^{1/2}(w) \ge M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}|\eta|$ に注意すると $|h(z+w)-h(z)| \le C\langle\xi\rangle_\gamma^{-3/2}|\eta| \le CM\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}g_{\epsilon,z}^{1/2}(w) \le C\omega(z)g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)$ を得る． ゆえに (5.4.34) より

$$|\omega(z+w)-\omega(z)| \le C\omega(z)g_{\epsilon,z}^{1/2}(w) \tag{5.4.36}$$

が成立する．(5.4.33) と合わせて ω は g_ϵ admissible weight である．次に ϕ について考える．$\phi = \omega + f$ より $\phi(z+w)-\phi(z)$ は次のように書ける．

$$\frac{(f(z+w)-f(z))(\phi(z+w)+\phi(z)) + h^2(z+w)-h^2(z)}{\omega(z+w)+\omega(z)}. \tag{5.4.37}$$

(5.4.35) より $|f(z+w)-f(z)| \le C\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2} g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)$ である．また $|h^2(z+w)-h^2(z)| \le CM\langle\xi\rangle_\gamma^{-3/2} g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)$ も容易である．これらの評価を (5.4.37) に代入すると

$$\begin{aligned}|\phi(z+w)-\phi(z)| \le C\Big(&\frac{\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}}{\omega(z+w)+\omega(z)}(\phi(z+w)+\phi(z)) \\ &+\frac{M\langle\xi\rangle_\gamma^{-3/2}}{\omega(z+w)+\omega(z)}\Big) g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)\end{aligned} \tag{5.4.38}$$

を得る．(5.4.27) より $\phi(z) \ge M\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}/C$ であるから

$$|\phi(z+w)-\phi(z)| \le C(\phi(z+w)+2\phi(z))\frac{\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}}{\omega(z+w)+\omega(z)}\, g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)$$

が従う．もし $C\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\, g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)/(\omega(z+w)+\omega(z)) < 1/3$ ならば $\big|\phi(z+w)/\phi(z)-1\big| \le (\phi(z+w)/\phi(z)+2)/3$ より

$$2\phi(z+w)/5 \le \phi(z) \le 4\,\phi(z+w) \tag{5.4.39}$$

が成立する．もし $C\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}\, g_{\epsilon,z}^{1/2}(w)/(\omega(z+w)+\omega(z)) \ge 1/3$ ならば $C^2 g_{\epsilon,z}(w) \ge \langle\xi\rangle_\gamma(\omega(z+w)+\omega(z))^2/9 \ge 2\langle\xi\rangle_\gamma\omega(z+w)\omega(z)/9$ であるから $\phi(z) \ge \langle\xi\rangle_\gamma^{-1}/(2\omega(z))$ に注意し，自明な不等式 $2\,\omega(z+w) \ge \phi(z+w)$ を利用すると

$$18C^2(1+g_{\epsilon,z}(w)) \ge \phi(z+w)/\phi(z)$$

が得られる．(5.4.33) と合わせて ϕ は g_ϵ admissible weight である．　□

5.5　エネルギー不等式

まず $\hat{P}(t,x,\tau,\xi)$ を次のように書きなおそう．

$$\begin{aligned}\hat{P}(t,x,\tau,\xi) = -\tau^2+\ell^2(t,x,\xi)+(q(t,x,\xi)+\lambda\langle\xi\rangle_\gamma) \\ +(a_1(t,x,\xi)-\lambda)\langle\xi\rangle_\gamma+a_0(t,x,\xi)\tau.\end{aligned}$$

ここで $a_j(t,x,\xi) \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^j, G)$ である．いま

$$b = (q(t,x,\xi)+\lambda\langle\xi\rangle_\gamma)^{1/2}$$

とおくと $0 \le q \in S(M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma^2, G)$ であったから第 5.2 節 より M, γ によらない $\bar\lambda$ が存在して $\lambda \ge \bar\lambda$ のとき命題 5.2.1 および補題 5.2.4 が成立するとしてよい．以下そのような $\lambda = \bar\lambda$ を一つ固定する．また $\bar\lambda \ge \underline{c}$ としてよく，このとき (5.1.6) より b は

$$\begin{aligned}b = \big(q+\bar\lambda\langle\xi\rangle_\gamma\big)^{1/2} &\ge \big(\underline{c}\,(t-\psi)^2\langle\xi\rangle_\gamma^2+\bar\lambda\langle\xi\rangle_\gamma\big)^{1/2} \\ &\ge \sqrt{\underline{c}}\;\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma\big((t-\psi)^2\omega^2+\omega^2\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\big)^{1/2} \\ &\ge \sqrt{\underline{c}}\;\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma\big(|t-\psi|^4+\langle\xi\rangle_\gamma^{-2}\big)^{1/2} \ge \sqrt{\underline{c}\,/2}\,\omega\langle\xi\rangle_\gamma\end{aligned} \tag{5.5.40}$$

を満たすことがわかる．さらに

補題 5.5.1. $k+|\alpha+\beta|=1$ のとき $\partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta q\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{1-|\beta|}b,\bar g)$ である．また $\{q,\psi\}\in S(M^{-1/2}b,\bar g)$ が成り立つ．

証明. 最初の主張は補題 5.2.3 から直ちに従う．2 番目の主張は 命題 5.1.1 と (5.2.18) から従う． □

次のようにおく．

$$
\begin{aligned}
&\hat P=\mathrm{op}(\hat P(t,x,\tau,\xi)),\quad L=\mathrm{op}(\ell),\\
&Q=\mathrm{op}(q+\bar\lambda\langle\xi\rangle_\gamma),\quad \sqrt{Q}=\mathrm{op}(b)=\mathrm{op}((q+\bar\lambda\langle\xi\rangle_\gamma)^{1/2}).
\end{aligned}
$$

以後 $\hat P$ は作用素を表し，そのシンボルを表すときは $\hat P(t,x,\tau,\xi)$ と書くので誤解の恐れはないと思う．$\ell\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma,G)$ より $|\alpha+\beta|=2$ のとき $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\ell\in S(M\langle\xi\rangle_\gamma^{1-|\beta|},g_\epsilon)$ ゆえ定理 7.3.1 より $\ell\#\ell-\ell^2\in S(M^2,g_\epsilon)$ が従い

$$
\mathrm{op}(\ell^2)=L^2+\mathrm{op}(r),\quad r\in S(M^2,g_\epsilon) \tag{5.5.41}
$$

と書ける．$M^2\le\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}$ に注意すると $\hat P$ は

$$
\hat P=-D_t^2+L^2+Q+B_0D_t+B_1,\ \ B_i=\mathrm{op}(\tilde a_i),\ \ \tilde a_i\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^i,g_\epsilon) \tag{5.5.42}
$$

と書ける．つぎに $\theta>0$ をパラメーターとして $\hat P_\theta=e^{-\theta t}\hat Pe^{\theta t}$ を考えると $(D_t-i\theta)=e^{-\theta t}D_te^{\theta t}$ より $\hat P_\theta$ は

$$
\hat P_\theta=-A^2+L^2+Q+B_0A+B_1,\quad A=D_t-i\theta \tag{5.5.43}
$$

となる．ここでエネルギー評価を導くときに用いる weight を定義しよう．

定義 5.5.1. $\Phi_n^{k\sharp}=\mathrm{op}(\omega^{-k/2}\phi^{-n})$, $\Psi_n^{k\sharp}=\mathrm{op}(\omega^{1-k/2}\langle\xi\rangle_\gamma\phi^{-n})$, $k=0,1,\dots$ とおく．$\Phi_n^{0\sharp}$, $\Phi_n^{1\sharp}$ はそれぞれ単に Φ_n, $\Phi_n^\sharp$ と書くものとする．$\Psi_n^{k\sharp}$ についても同様である．以下記号を簡単にするためにパラメーター n を省略して単に $\Phi^{k\sharp}$, $\Psi^{k\sharp}$ と書くが，これらはパラメーターとして n, M, γ を含んでいることに注意しよう．

この節を通じて小文字で表された定数 c, $\hat c$, $\bar c$, c_i などは n, M, γ, θ に依存しないものとし，大文字で表す定数 C は n には依存するが M, γ, θ には依存しない一般には行ごとに異なる定数を表すものとする．

補題 5.5.2. $K^*=K$ とすると

$$
\begin{aligned}
&2\mathsf{Im}(\Phi Ku,\Phi Au)=\partial_t(K\Phi u,\Phi u)+2\theta(K\Phi u,\Phi u)\\
&+2\mathsf{Im}([\Phi,K]u,\Phi Au)+2\mathsf{Im}(K\Phi u,[\Phi,A]u)-\mathsf{Re}((\partial_tK)\Phi u,\Phi u)
\end{aligned} \tag{5.5.44}
$$

が成立する．またつぎの等式が成立する．

$$
\begin{aligned}
2\mathsf{Im}(\Phi K^2u,\Phi Au) = \partial_t\|\Phi Ku\|^2 + 2\theta\|\Phi Ku\|^2 \\
+2\mathsf{Im}(\Phi[A,K]u,\Phi Ku) + 2\mathsf{Im}([A,\Phi]Ku,\Phi Ku) \\
+2\mathsf{Im}([\Phi,K]Au,\Phi Ku) + 2\mathsf{Im}(\Phi Au,[K,\Phi]Ku).
\end{aligned}
\tag{5.5.45}
$$

証明．最初の等式は

$$
(\Phi Ku,\Phi Au) = ([\Phi,K]u,\Phi Au) + (K\Phi u,[\Phi,A]u) + (K\Phi u,A\Phi u)
$$

と書いて $\partial_t = iA-\theta$ より $2\mathsf{Im}(K\Phi u,A\Phi u) = \partial_t(K\Phi u,\Phi u) + 2\theta(K\Phi u,\Phi u) - \mathsf{Re}((\partial_t K)\Phi u,\Phi u)$ に注意すればよい．次の等式は $(\Phi K^2u,\Phi Au)$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
(\Phi K^2u,\Phi Au) &= ([\Phi,K]Ku,\Phi Au) + (K\Phi Ku,\Phi Au) \\
&= ([\Phi,K]Ku,\Phi Au) + (\Phi Ku,[K,\Phi]Au) + (\Phi Ku,\Phi KAu) \\
&= ([\Phi,K]Ku,\Phi Au) + (\Phi Ku,[K,\Phi]Au) + (\Phi Ku,\Phi[K,A]u) + (\Phi Ku,\Phi AKu) \\
&= ([\Phi,K]Ku,\Phi Au) + (\Phi Ku,[K,\Phi]Au) + (\Phi Ku,\Phi[K,A]u) \\
&\quad +(\Phi Ku,[\Phi,A]Ku) + (\Phi Ku,A\Phi Ku)
\end{aligned}
$$

を得るが右辺の 5 項中 $(\Phi Ku,A\Phi Ku)$ 以外の 4 項は虚部の 2 倍を考えれば (5.5.45) の右辺の最後の 4 項に一致している．したがって $2\mathsf{Im}(\Phi Ku,A\Phi Ku) = \partial_t\|\Phi Ku\|^2 + 2\theta\|\Phi Ku\|^2$ を示せばよいがこれは明らかである． □

以下 $2\mathsf{Im}(\Phi\hat{P}_\theta u,\Phi Au)$ を評価してゆく．最初に $2\mathsf{Im}(\Phi L^2u,\Phi Au)$ を考察する．まず $2\mathsf{Im}([A,\Phi]Lu,\Phi Lu)$ を評価する．$\partial_t\phi = \omega^{-1}\phi$ であったから $[A,\Phi] = in\,\mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})$ で，したがって

$$
2\mathsf{Im}([A,\Phi]Lu,\Phi Lu) = 2n\mathsf{Re}(\mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})Lu,\mathrm{op}(\phi^{-n})Lu)
$$

である．$\phi^{-n}\#(\omega^{-1}\phi^{-n}) - \omega^{-1}\phi^{-2n} \in S(M^{-1}\omega^{-1}\phi^{-2n},g_\epsilon)$ であるから系 5.3.2 と補題 5.3.3 より

$$
2\mathsf{Im}([A,\Phi]Lu,\Phi Lu) \geq 2n(1-CM^{-1})\|\Phi^\sharp Lu\|^2 \tag{5.5.46}
$$

を得る．つぎに $2\mathsf{Im}(\Phi Au,[L,\Phi]Lu)$ を評価しよう．まず

$$
\begin{aligned}
\phi^{-n}\#(\ell\#\phi^{-n} - \phi^{-n}\#\ell) = -n\{\ell,\psi\}\omega^{-1}\phi^{-2n} + r_1 + r_2, \\
r_1 \in S(M^{-1}\omega^{-1}\phi^{-2n},g_\epsilon), \quad r_2 \in S(\phi^{-2n},g_\epsilon)
\end{aligned}
\tag{5.5.47}
$$

と書けることをみよう．$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\ell \in S(M^2\langle\xi\rangle_\gamma^{1-|\beta|},g_\epsilon)$, $|\alpha+\beta| = 3$ ゆえ定理 7.3.1 と補題 5.4.3 より $\ell\#\phi^{-n} - \phi^{-n}\#\ell + i\{\ell,\phi^{-n}\} \in S(\phi^{-n},g_\epsilon)$ である．一方 (5.4.28) より $\{\ell,\phi^{-n}\} = -in\,\omega^{-1}\{\ell,\psi\}\phi^{-n} + in\,\omega^{-1}\{\ell,\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\}\phi^{-n-1}$ で (5.4.27) より

$\omega^{-1}\{\ell,\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\}\phi^{-n-1}\in S(\phi^{-n},g_\epsilon)$ である．命題 5.1.2 より $\{\ell,\psi\}\in S(1,g_\epsilon)$ に注意すると系 7.3.1 より (5.5.47) が従う．(5.5.47) を考慮すると補題 5.3.3 より

$$\begin{aligned}\big|(\Phi Au,[L,\Phi]Lu)\big|&\le n\|\mathrm{op}(\{\ell,\psi\})\Phi^\sharp Au\|\|\Phi^\sharp Lu\|\\&+CM^{-1}\|\Phi^\sharp Au\|\|\Phi^\sharp Lu\|+C\|\Phi Au\|\|\Phi Lu\|\end{aligned}$$

と評価される．命題 5.1.2 と系 5.3.4 より $\|(\mathrm{op}(\{\ell,\psi\})v\|\le(|\kappa|+CM^{-1/2})\|v\|$ が成り立つので

$$|(\Phi Au,[L,\Phi]Lu)|\le n(|\kappa|+CM^{-1/2})\|\Phi^\sharp Au\|\|\Phi^\sharp Lu\|+C\|\Phi Au\|\|\Phi Lu\|$$

が成立する．$|([\Phi,L]Au,\Phi Lu)|$ も同様にして評価されるので結局

$$\begin{aligned}&2|(\Phi Au,[L,\Phi]Lu)|+2|([\Phi,L]Au,\Phi Lu)|\\&\le 2n(|\kappa|+CM^{-1/2})\big(\|\Phi^\sharp Au\|^2+\|\Phi^\sharp Lu\|^2\big)\\&\qquad+C\big(\|\Phi Au\|^2+\|\Phi Lu\|^2\big)\end{aligned}\tag{5.5.48}$$

を得る．次に $[A,L]=-i\,\mathrm{op}(\partial_t\ell)$ で $\partial_t\ell\in S(\langle\xi\rangle_\gamma,g_\epsilon)$ より $\phi^{-n}\#\phi^{-n}\#(\partial_t\ell)=(\partial_t\ell)\phi^{-2n}+r$, $r\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma\phi^{-2n},g_\epsilon)$ であるから補題 5.3.3 より

$$\begin{aligned}2|(\Phi[A,L]u,\Phi Lu)|&\le 2\|\mathrm{op}(\partial_t\ell\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\Psi^\sharp u\|\|\Phi^\sharp Lu\|\\+CM^{-1}\|\Psi^\sharp u\|\|\Phi^\sharp Lu\|&\le(c_0+CM^{-1})\big(\|\Psi^\sharp u\|^2+\|\Phi^\sharp Lu\|^2\big)\end{aligned}\tag{5.5.49}$$

が成り立つ．以上 (5.5.45), (5.5.46), (5.5.48) および (5.5.49) から次を得る．

補題 5.5.3. 次が成立する．

$$\begin{aligned}&2\mathsf{Im}(\Phi L^2u,\Phi Au)\ge\partial_t\|\Phi Lu\|^2+(2\theta-C)\|\Phi Lu\|^2\\&+2n(1-|\kappa|-c_0/2n-CM^{-1/2})\|\Phi^\sharp Lu\|^2-2n(|\kappa|+CM^{-1/2})\|\Phi^\sharp Au\|^2\\&-(c_0+CM^{-1/2})\|\Psi^\sharp u\|^2-C\|\Phi Au\|^2.\end{aligned}$$

次に $-2\mathsf{Im}(\Phi A^2u,\Phi Au)$ を考えよう．(5.5.44) で $K=I$ とし，(5.5.46) を $L=I$ として適用すると

$$\begin{aligned}-2\mathsf{Im}(\Phi Au,\Phi u)&=\partial_t\|\Phi u\|^2+2\theta\|\Phi u\|^2+2\mathsf{Im}([A,\Phi]u,\Phi u)\\&\ge\partial_t\|\Phi u\|^2+2\theta\|\Phi u\|^2+2n(1-CM^{-1})\|\Phi^\sharp u\|^2\end{aligned}\tag{5.5.50}$$

が成立する．同様の議論を Φ を $\Phi^{2\sharp}$ に置き換えて行うと

$$-2\mathsf{Im}(\Phi^{2\sharp}Au,\Phi^{2\sharp}u)\ge\partial_t\|\Phi^{2\sharp}u\|^2+2\theta\|\Phi^{2\sharp}u\|^2+2n(1-CM^{-1})\|\Phi^{3\sharp}u\|^2$$

を得る．補題 5.3.3 より

$$\begin{aligned}2|(\Phi^{2\sharp}Au,\Phi^{2\sharp}u)|&\le 2(1+CM^{-1})\|\Phi^\sharp Au\|\|\Phi^{3\sharp}u\|\\&\le n^{-1}\|\Phi^\sharp Au\|^2+n(1+CM^{-1})\|\Phi^{3\sharp}u\|^2\end{aligned}$$

が従うので

$$\|\Phi^\sharp Au\|^2 \geq n\partial_t\|\Phi^{2\sharp}u\|^2 + 2\theta n\|\Phi^{2\sharp}u\|^2 + n^2(1-CM^{-1})\|\Phi^{3\sharp}u\|^2 \tag{5.5.51}$$

が成立する．一方 (5.5.50) で u を Au で置き換えると

$$-2\mathsf{Im}(\Phi A^2u, \Phi Au) \geq \partial_t\|\Phi Au\|^2 + 2\theta\|\Phi Au\|^2 + 2n(1-CM^{-1})\|\Phi^\sharp Au\|^2$$

を得るが右辺の $2n(1-CM^{-1})\|\Phi^\sharp Au\|^2$ のうち $n\nu\|\Phi^\sharp Au\|^2$ $(0<\nu<2)$ を (5.5.51) の評価で置き換えて次の補題を得る．

補題 5.5.4. 任意の $0<\nu<2$ に対し次の評価が成立する．

$$\begin{aligned}-2\mathsf{Im}(\Phi A^2u, \Phi Au) \geq \partial_t\|\Phi Au\|^2 + 2\theta\|\Phi Au\|^2 \\ +2n(1-\nu/2-CM^{-1})\|\Phi^\sharp Au\|^2 \\ +\nu n^2\partial_t\|\Phi^{2\sharp}u\|^2 + 2\nu\theta n^2\|\Phi^{2\sharp}u\|^2 + \nu n^3(1-CM^{-1})\|\Phi^{3\sharp}u\|^2.\end{aligned} \tag{5.5.52}$$

最後に $\mathsf{Im}(\Phi Qu, \Phi Au)$ を評価する．まず $\mathsf{Im}([\Phi, Q]u, \Phi Au)$ を評価しよう．命題 5.4.1 と定理 7.3.1 より $\phi^{-n}\#(\phi^{-n}\#\langle\xi\rangle_\gamma - \langle\xi\rangle_\gamma\#\phi^{-n}) \in S(\omega^{-1}\phi^{-2n}, g_\epsilon)$ ゆえ補題 5.3.3 より

$$|([\Phi, \langle D\rangle_\gamma]u, \Phi Au)| \leq C\|\Phi^{2\sharp}u\|\|\Phi Au\| \leq C(\|\Phi^{2\sharp}u\|^2 + \|\Phi Au\|^2)$$

は明らかである．つぎに $\mathsf{Im}([\Phi, \mathrm{op}(q)]u, \Phi Au)$ を評価しよう．まず

$$\begin{aligned}\phi^{-n}\#q - q\#\phi^{-n} = -in\omega^{-1}\{\psi, q\}\phi^{-n} + r_1 + r_2, \\ r_1 \in S(b\phi^{-n}, \bar{g}), \quad r_2 \in S(M\omega^{-1}\phi^{-n}, g_\epsilon)\end{aligned} \tag{5.5.53}$$

と書けることを確かめよう．$|\alpha+\beta| = 3$ のとき $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta q \in S(M\langle\xi\rangle_\gamma^{2-|\beta|}, g_\epsilon)$ より命題 5.4.1 と定理 7.3.1 から $\phi^{-n}\#q - q\#\phi^{-n} = -i\{\phi^{-n}, q\} + r$, $r \in S(M\omega^{-1}\phi^{-n}, g_\epsilon)$ となる．一方 (5.4.28) から $\{\phi^{-n}, q\} = n\omega^{-1}\{\psi, q\}\phi^{-n} - n\omega^{-1}\{\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}, q\}\phi^{-n-1}/2$ であるが右辺第 2 項は補題 5.5.1 と (5.4.27) より $S(b\phi^{-n}, \bar{g})$ であるから (5.5.53) を得る．補題 5.5.1 より $\{\psi, q\} \in S(M^{-1/2}b, \bar{g})$ であるから (5.5.53) の右辺第 1 項は $S(M^{-1/2}\omega^{-1}b\phi^{-n}, \bar{g})$ となる．従って補題 5.3.4 と補題 5.3.3 より次を得る．

$$\begin{aligned}\big|([\Phi, Q]u, \Phi Au)\big| \leq CM^{-1/2}\big(\|\sqrt{Q}\,\Phi^\sharp u\|^2 + \|\Phi^\sharp Au\|^2\big) \\ +C\|\sqrt{Q}\,\Phi u\|^2 + CM\big(\|\Phi Au\|^2 + \|\Phi^{2\sharp}u\|^2\big).\end{aligned} \tag{5.5.54}$$

補題 5.5.5. 次が成立する．

$$\begin{aligned}2\mathsf{Im}(Q\Phi u, [\Phi, A]u) \geq (n - CM^{-1/2})\|\sqrt{Q}\,\Phi^\sharp u\|^2 \\ -CM^{-1/2}\|\Phi^{3\sharp}u\|^2 - C\|\sqrt{Q}\,\Phi u\|^2 - CM\|\Phi^{2\sharp}u\|^2.\end{aligned}$$

証明. まず $2\mathsf{Im}(Q\Phi u,[\Phi,A]u) = 2n\mathsf{Re}\big(Q\mathrm{op}(\phi^{-n})u,\mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})u\big)$ である．補題 5.3.2 を使って $\omega^{-1}\phi^{-n} = \omega^{-1/2}\#(1+k)\#(\omega^{-1/2}\phi^{-n})$ および $\omega^{-1/2}\#\phi^{-n} = (1+\tilde{k})\#(\omega^{-1/2}\phi^{-n})$, $k,\tilde{k}\in S(M^{-1},g_\epsilon)$ と書くと

$$\begin{aligned}\big(Q\mathrm{op}(\phi^{-n})u,\mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})u\big) &= \big(\mathrm{op}(1+\bar{k})Q\mathrm{op}(1+\tilde{k})\Phi^\sharp u,\Phi^\sharp u)\\ &+\big(\mathrm{op}(1+\bar{k})[\mathrm{op}(\omega^{-1/2}),Q]\Phi u,\Phi^\sharp u)\end{aligned}$$

と書け $[\mathrm{op}(\omega^{-1/2}),Q]$ は $\mathrm{op}(r_i)$ の和である．ここで

$$r_1\in S(M^{-1/2}\omega^{-3/2}b,\bar{g}),\ r_2\in S(\omega^{-1/2}b,\bar{g}),\ r_3\in S(M\omega^{-3/2},g_\epsilon). \tag{5.5.55}$$

実際 $\omega^{-1/2}\#\langle\xi\rangle_\gamma-\langle\xi\rangle_\gamma\#\omega^{-1/2}\in S(\omega^{-3/2},g_\epsilon)$ は命題 5.4.1 と定理 7.3.1 より明らか．同様にして $\omega^{-1/2}\#q-q\#\omega^{-1/2}+i\{\omega^{-1/2},q\}\in S(M\omega^{-3/2},g_\epsilon)$ が従う．つぎに

$$\{\omega^{-1/2},q\}=\omega^{-5/2}(t-\psi)\{\psi,q\}/2-\omega^{-5/2}\{\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},q\}/4 \tag{5.5.56}$$

であるが右辺第 1 項は補題 5.5.1 と $(t-\psi)\in S(\omega,g_\epsilon)$ より $S(M^{-1/2}\omega^{-3/2}b,\bar{g})$ であり右辺第 2 項は補題 5.5.1 と $\omega^{-2}\le\langle\xi\rangle_\gamma$ より $S(\omega^{-1/2}b,\bar{g})$ となる．ゆえに補題 5.3.4 より

$$\begin{aligned}\big|(\mathrm{op}(1+\bar{k})[\mathrm{op}(\omega^{-1/2}),Q]\Phi u,\Phi^\sharp u)\big| &\le CM^{-1/2}\big(\|\sqrt{Q}\,\Phi^\sharp u\|^2+\|\Phi^{3\sharp}u\|^2\big)\\ &+C\|\sqrt{Q}\,\Phi u\|^2+CM\|\Phi^{2\sharp}u\|^2\end{aligned}$$

を得る．次に $\big(\mathrm{op}(1+\bar{k})Q\mathrm{op}(1+\tilde{k})\Phi^\sharp u,\Phi^\sharp u\big)$ を評価する．$\bar{k}\#(q+\bar{\lambda}\langle\xi\rangle_\gamma)\in S(M^{-1}b^2,\bar{g})$ であるから補題 5.3.4 より $\big|(\mathrm{op}(\bar{k})Q\Phi^\sharp u,\Phi^\sharp u)\big|\le CM^{-1}\|\sqrt{Q}\,\Phi^\sharp u\|^2$ を得る．$\big|(Q\mathrm{op}(\tilde{k})\Phi^\sharp u,\Phi^\sharp u)\big|$ なども同様に評価できる．最後に $(Q\Phi^\sharp u,\Phi^\sharp u)$ に補題 5.2.4 を適用すればよい． □

補題 5.5.6. $c_1>0$ が存在して

$$|((\partial_t Q)\Phi u,\Phi u)|\le(c_1+CM^{-1/2})(\|\sqrt{Q}\,\Phi^\sharp u\|^2+\|\Psi^\sharp u\|^2) \tag{5.5.57}$$

が成立する．

証明. 補題 5.5.1, 5.3.2 より $\phi^{-n}\#\partial_t q\#\phi^{-n} = (\omega^{1/2}\langle\xi\rangle_\gamma\phi^{-n})\#r\#(\omega^{-1/2}\phi^{-n})$, $r\in S(b,g_\epsilon)$ と書くと $|((\partial_t Q)\Phi u,\Phi u)|\le\|\mathrm{op}(r)\Phi^\sharp u\|\|\Psi^\sharp u\|$ である．補題 5.3.2 より $k,\tilde{k}\in S(M^{-1},g_\epsilon)$ があって $(\omega^{-1/2}\phi^{-n})\#(1+k)\#(\omega^{1/2}\phi^n)=1$, $(\omega^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\phi^n)\#(1+\tilde{k})\#(\omega^{1/2}\langle\xi\rangle_\gamma\phi^{-n})=1$ と書けるので

$$r=(\omega^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\phi^n)\#(1+\tilde{k})\#\phi^{-n}\#(\partial_t q)\#\phi^{-n}\#(1+k)\#(\omega^{1/2}\phi^n)$$

である．系 7.3.1 より $\phi^{-n}\#(1+k)\#(\omega^{1/2}\phi^n)-\omega^{1/2}=l\in S(M^{-1}\omega^{1/2},g_\epsilon)$ と $(\omega^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\phi^n)\#(1+\tilde{k})\#\phi^{-n}-\omega^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}=\tilde{l}\in S(M^{-1}\omega^{-1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},g_\epsilon)$ ゆえ

$r=(\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\omega^{-1/2}+\tilde{l})\#(\partial_t q)\#(\omega^{1/2}+l)=(\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\omega^{-1/2})\#(\partial_t q)\#\omega^{1/2}+\tilde{r}$ と書け補題 5.5.1 より $\tilde{r}\in S(M^{-1}b,\bar{g})$．また $(\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\omega^{-1/2})\#(\partial_t q)\#\omega^{1/2}\in S(b,\bar{g})$ でこれは n によらない．故に補題 5.3.4 より $c_1>0$ があって $\|\mathrm{op}(r)v\|\le(c_1+CM^{-1})\|\sqrt{Q}\,v\|$ が成り立ち $v=\Phi^\sharp u$ として結論を得る． □

(5.5.44) で $K=Q$ と選ぶと (5.5.54) および補題 5.5.5, 5.5.6 から

$$\begin{aligned}2\mathsf{Im}(\Phi Qu,\Phi Au)\ge\partial_t(Q\Phi u,\Phi u)+(\theta-C)\|\sqrt{Q}\,\Phi u\|^2\\+(n-c_1-CM^{-1/2})\|\sqrt{Q}\,\Phi^\sharp u\|^2-(c_1+CM^{-1/2})\|\Psi^\sharp u\|^2\\-CM^{-1/2}\big(\|\Phi^\sharp Au\|^2+\|\Phi^{3\sharp}u\|^2\big)-CM\big(\|\Phi Au\|^2+\|\Phi^{2\sharp}u\|^2\big)\end{aligned}\tag{5.5.58}$$

が成立する．

つぎに $\omega^{1-k/2}\phi^{-n}\langle\xi\rangle_\gamma=(\langle\xi\rangle_\gamma\omega)(\omega^{-k/2}\phi^{-n})$ と書くと補題 5.3.3 より

$$(1-CM^{-1})\|\Psi^{k\sharp}u\|\le\|\mathrm{op}(\langle\xi\rangle_\gamma\omega)\Phi^{k\sharp}u\|\tag{5.5.59}$$

を得る．命題 5.2.1 で得た $\tilde{b}\in S(b^{-1},\bar{g})$ は (5.5.40) より $\tilde{b}\in S(\omega^{-1}\langle\xi\rangle_\gamma^{-1},\bar{g})$ である．したがって $\langle\xi\rangle_\gamma\omega=(\langle\xi\rangle_\gamma\omega)\#\tilde{b}\#b$ と書くと $(\langle\xi\rangle_\gamma\omega)\#\tilde{b}\in S(1,\bar{g})$ ゆえ定理 7.4.1 より $\hat{c}>0$ があって $\|\mathrm{op}(\langle\xi\rangle_\gamma\omega)v\|\le\hat{c}\|\sqrt{Q}\,v\|$ が成立する．そこで v を $\Phi^{k\sharp}u$ で置き換えると (5.5.59) よりつぎの補題を得る．

補題 5.5.7. $\hat{c}>0,c>0,\ C>0$ が存在して $k=0,1,2$ に対し次が成立する．

$$\begin{aligned}&c(1-CM^{-1})\|\langle D\rangle_\gamma^{1/2+k/4}\Phi u\|\\&\le(1-CM^{-1})\|\Psi^{k\sharp}u\|\le\hat{c}\|\sqrt{Q}\Phi^{k\sharp}u\|.\end{aligned}\tag{5.5.60}$$

証明. 左側の不等式を示す．$\phi^{-n}\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2+k/4}=(\omega^{1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{1/4})^{-2+k}(\omega^{1-k/2}\phi^{-n}\langle\xi\rangle_\gamma)$ と書くと $\omega^{1/2}\langle\xi\rangle_\gamma^{1/4}\ge 1$ であるから $k\le 2$ のとき補題 5.3.3 より $c>0$ があって $c\|\langle D\rangle_\gamma^{1/2+k/4}\Phi u\|\le(1+CM^{-1})\|\Psi^{k\sharp}u\|$ が成立する． □

(5.5.58) の右辺の $\|\Psi^\sharp u\|^2$ に (5.5.60) の評価式を適用してまとめると

補題 5.5.8. 次が成立する．

$$\begin{aligned}2\mathsf{Im}(\Phi Qu,\Phi Au)\ge\partial_t(Q\Phi u,\Phi u)+(\theta-C)\|\sqrt{Q}\Phi u\|^2\\+n(1-c_1(1+\hat{c})/n-CM^{-1/2})\|\sqrt{Q}\Phi^\sharp u\|^2\\-CM^{-1/2}\big(\|\Phi^\sharp Au\|^2+\|\Phi^{3\sharp}u\|^2\big)-CM\big(\|\Phi Au\|^2+\|\Phi^{2\sharp}u\|^2\big).\end{aligned}$$

最後に低階の項 B_0A+B_1 を評価する．$\tilde{a}_j\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^j,g_\epsilon)$ ゆえ補題 5.3.3 から

$$\begin{aligned}2\big|(\Phi B_1u,\Phi Au)\big|\le 2\|\mathrm{op}(\tilde{a}_1\langle\xi\rangle_\gamma^{-1})\Phi^\sharp Au\|\|\Psi^\sharp u\|\\+CM^{-1}\|\Phi^\sharp Au\|\|\Psi^\sharp u\|\le(\bar{c}+CM^{-1})(\|\Phi^\sharp Au\|^2+\|\Psi^\sharp u\|^2)\end{aligned}\tag{5.5.61}$$

が成立する．また $2|(\Phi B_0 Au, \Phi Au)| \le C\|\Phi Au\|^2$ も同様である．したがって補題 5.5.3, 5.5.4, 5.5.8 と低階の評価から次を得る．

命題 5.5.1. 次が成立する．

$$
\begin{gathered}
2\mathsf{Im}(\Phi\hat{P}_\theta u, \Phi Au) \ge \partial_t\big\{\|\Phi Lu\|^2 + \|\Phi Au\|^2 + (Q\Phi u, \Phi u) \\
+\nu n^2\|\Phi^{2\sharp}u\|^2\big\} + (\theta - CM)\big(\|\Phi Lu\|^2 + \|\Phi Au\|^2 + \|\sqrt{Q}\,\Phi u\|^2\big) \\
+2n(1-|\kappa|-\nu/2-(c_0+\bar{c})/2n - CM^{-1/2})\big(\|\Phi^\sharp Au\|^2 + \|\Phi^\sharp Lu\|^2\big) \\
+n(1-\hat{c}(c_0+\bar{c})/n - c_1(1+\hat{c})/n - CM^{-1/2})\|\sqrt{Q}\,\Phi^\sharp u\|^2 \\
+(2\nu\theta n^2 - CM)\|\Phi^{2\sharp}u\|^2 + (\nu n^3 - CM^{-1/2})\|\Phi^{3\sharp}u\|^2.
\end{gathered}
$$

補題 5.5.9. $n \ge 1$ とする．$C>0$ が存在して次が成立する．

$$
\|\Phi u\| \le C\|\langle D\rangle_\gamma^n u\|, \quad \|u\| \le C\|\Phi u\|, \quad \|\langle D\rangle_\gamma u\| \le C\|\sqrt{Q}\,\Phi u\|.
$$

証明. 1 番目の不等式は (5.4.27) より $\phi^{-n} \le C\omega^n\langle\xi\rangle_\gamma^n \le C'\langle\xi\rangle_\gamma^n$ から $\phi^{-n} \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^n, g_\epsilon)$ ゆえ補題 5.3.3 から明らかである．つぎに $\phi \le 2\omega$ から $\phi^{-n} \ge (2\omega)^{-n} \ge C > 0$ より $1 \in S(\phi^{-n}, g_\epsilon)$ であるから 2 番目の不等式を得る．3 番目の不等式は $\omega\phi^{-n}\langle\xi\rangle_\gamma \ge C\omega^{1-n}\langle\xi\rangle_\gamma \ge C'\langle\xi\rangle_\gamma$ より補題 5.5.7 から従う． □

さて命題 5.5.1 において $1-|\kappa|-\nu/2>0$ となる $\nu>0$ を 1 つ選んで固定する．次に n を

$$
1-|\kappa|-\nu/2-(c_0+\bar{c})/2n > 0,\ 1-\hat{c}(c_0+\bar{c})/n - c_1(1+\hat{c})/n > 0 \tag{5.5.62}
$$

を満たすように選んで固定する．このとき，そのような n より大なる任意の n について上の条件が満たされることを注意しておく．次にそのように選んだ n に対して M を本章の計算が正当化されるように，すなわち第 5.3 節の補題と系が

$$
m,\ m_i = \omega^k\langle\xi\rangle_\gamma^s\phi^l, \quad |k| \le 2,\ |s| \le 1,\ |l| \le n \tag{5.5.63}
$$

に対して成立するように，さらに命題 5.5.1 の右辺最後の 4 項の係数，および補題 5.5.7 の不等式の係数が正になるように M を選びそれを固定する．このとき，このように選んだ M より大なる任意の M についてこの性質が成り立つことは自明である．最後に γ を $\gamma \ge M^4$ かつ $\gamma \ge \bar{\lambda}M^2$ を満たすように選んでそれを固定する．θ はまだ固定せず動かすものとする．M と γ を固定すると正定数 C, C_s が存在して $\underline{g}$ で $\gamma=1$ としたものを g_0 と書くと

$$
\langle\xi\rangle^s/C_s \le \langle\xi\rangle_\gamma^s \le C_s\langle\xi\rangle^s, \quad g_0/C \le G \le Cg_0
$$

が成り立つ．したがって $S(\langle\xi\rangle_\gamma^s, G) = S(\langle\xi\rangle^s, g_0) = S^s$ である．特に $\|\langle D\rangle_\gamma^s\cdot\|$ と $\|\langle D\rangle^s\cdot\|$ は同値である．また M を固定すると (5.1.4) より t の動く範囲も決まる．以下

記号を簡略化して $\langle\xi\rangle_\gamma$ を $\langle\xi\rangle$ と書くことにする．このように n, M, γ を選んで固定し補題 5.5.7 に注意すると次を得る．

命題 5.5.2. 正定数 $c>0$, $c^*>0$, $\delta_0>0$, $\theta_0>0$, が存在して $|t|\le\delta_0$, $\theta\ge\theta_0$ のとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}2\mathsf{Im}(\varPhi\hat{P}_\theta u,\varPhi Au)&\ge\partial_t\big\{\|\varPhi Au\|^2+\|\varPhi Lu\|^2+(Q\varPhi u,\varPhi u)+c^*\|\varPhi^{2\sharp}u\|^2\big\}\\&\quad+c\,\theta\big(\|\varPhi Au\|^2+\|\varPhi Lu\|^2+\|\sqrt{Q}\varPhi u\|^2+\|\langle D\rangle^{1/2}\varPhi u\|^2\big)\\&\quad+c\big(\|\varPhi^\sharp Au\|^2+\|\varPhi^\sharp Lu\|^2+\|\sqrt{Q}\varPhi^\sharp u\|+\|\langle D\rangle^{3/4}\varPhi u\|^2\big).\end{aligned}$$

定義 5.5.2. 次のようにおく．

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}^2(u)&=\|\varPhi Au\|^2+\|\varPhi Lu\|^2+(Q\varPhi u,\varPhi u)+c^*\|\varPhi^{2\sharp}u\|^2,\\\tilde{\mathcal{E}}_\sharp^2(u)&=\|\varPhi^\sharp Au\|^2+\|\varPhi^\sharp Lu\|^2+\|\varPhi^\sharp\sqrt{Q}u\|^2+\|\langle D\rangle^{3/4}\varPhi u\|^2.\end{aligned}$$

また $\tilde{\mathcal{E}}^2(u)$ と $\tilde{\mathcal{E}}_\sharp^2(u)$ において A を D_t で置き換えたものをそれぞれ $\mathcal{E}^2(u)$ と $\mathcal{E}_\sharp^2(u)$ で表すことにする．

以下でこのエネルギー不等式を利用する際により使い易いように

$$L^\dagger=\mathrm{op}(b_1)=\mathrm{op}((\ell^2+\bar\lambda\langle\xi\rangle_\gamma)^{1/2}),\quad b_1=(\ell^2+\bar\lambda\langle\xi\rangle_\gamma)^{1/2}$$

を導入する．$\ell^2\in S(M^{-2}\langle\xi\rangle_\gamma^2,G)$ であるから第 5.2 節より $\bar\lambda$ は命題 5.2.1 および補題 5.2.4 が成立するように選べているとしてよい．

補題 5.5.10. $C>0$ が存在して

$$\begin{aligned}\|\varPhi Au\|^2+\|\varPhi L^\dagger u\|^2+\|\varPhi\sqrt{Q}u\|^2+\|\langle D\rangle^{1/2}\varPhi u\|^2&\le C\tilde{\mathcal{E}}^2(u)\\&\le C'(\|\varPhi Au\|^2+\|\varPhi Lu\|^2+\|\varPhi\sqrt{Q}u\|^2+\|\langle D\rangle^{1/2}\varPhi u\|^2),\\\|\varPhi^\sharp Au\|^2+\|\varPhi^\sharp L^\dagger u\|^2+\|\varPhi^\sharp\sqrt{Q}u\|^2+\|\langle D\rangle^{3/4}\varPhi u\|^2&\le C\tilde{\mathcal{E}}_\sharp^2(u).\end{aligned}$$

証明. 補題 5.3.4 より $\|\sqrt{Q}\varPhi u\|/C\le\|\varPhi\sqrt{Q}u\|\le C\|\sqrt{Q}\varPhi u\|$, $C\|\sqrt{Q}\varPhi u\|^2\ge(Q\varPhi u,\varPhi u)$ が従う．また補題 5.2.4, 5.5.7 より $(Q\varPhi u,\varPhi u)\ge\|\sqrt{Q}\varPhi u\|^2/2\ge\|\langle D\rangle^{1/2}\varPhi u\|/C$ を得る．同様に $\|\varPhi L^\dagger u\|^2\le C(\mathrm{op}(b_1^2)\varPhi u,\varPhi u)\le C'(\|L\varPhi u\|^2+\|\langle D\rangle^{1/2}\varPhi u\|^2)$ が成り立つ．さらに命題 5.4.1 と定理 7.3.1 より $\|L\varPhi u\|\le C(\|\varPhi Lu\|+\|\langle D\rangle^{1/2}\varPhi u\|)$ を得るのであとは $\omega^{-1}\phi^{-n}\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}\phi^{-n},g_\epsilon)$ に注意すればよい．もう一つの主張の証明も同様である． □

以上のことから命題 5.5.2 はつぎのように述べることができる．

命題 5.5.3. 正定数 $c>0$, $c^*>0$, $\delta_0>0$, $\theta_0>0$, が存在して $|t|\le\delta_0$, $\theta\ge\theta_0$ のとき $2\mathsf{Im}(\varPhi\hat{P}_\theta u,\varPhi Au)\ge\partial_t\tilde{\mathcal{E}}^2(u)+c\,\theta\tilde{\mathcal{E}}^2(u)+c\,\tilde{\mathcal{E}}_\sharp^2(u)$ が成り立つ．

5.6　高次のエネルギー評価

以下この節では $n,\ M,\ \gamma$ は固定されているとする．$n,\ M,\ \gamma$ の選び方で注意したように第 5.3 節の補題と系が (5.5.63) の m, m_i に対して成立する．以下簡単のために次のようにも書くことにする．

$$\tilde{\mathcal{E}}(\langle D\rangle^s u) = \tilde{\mathcal{E}}_s(u), \quad \tilde{\mathcal{E}}_\sharp(\langle D\rangle^s u) = \tilde{\mathcal{E}}_{\sharp s}(u).$$

補題 5.6.1. $C_s > 0$ が存在して次が成立する．

$$\|\Phi A u\|_s^2 + \|\Phi L^\dagger u\|_s^2 + \|\Phi\sqrt{Q}u\|_s^2 + \|\Phi u\|_{s+1/2}^2 \le C_s \tilde{\mathcal{E}}_s^2(u),$$
$$\|\Phi^\sharp A u\|_s^2 + \|\Phi^\sharp L^\dagger u\|_s^2 + \|\Phi^\sharp\sqrt{Q}u\|_s^2 + \|\Phi u\|_{s+3/4}^2 \le C_s \tilde{\mathcal{E}}_{\sharp s}^2(u).$$

証明. 証明は補題 5.5.10 および系 5.3.1，5.3.3 より従う．　□

この節では $\langle D\rangle^s u,\ s \in \mathbb{R}$ を評価する．まず $\hat{P}_\theta$ を

$$\hat{P}_\theta = -A^2 + H + B_0' A + B_1', \quad H = \mathrm{op}(h) = \mathrm{op}(\ell^2 + q) \tag{5.6.64}$$

と書こう．ここで $B_i' = \mathrm{op}(\tilde{a}_i'),\ \tilde{a}_i' \in S^i$ である．$\langle D\rangle^s \hat{P}_\theta = \hat{P}_\theta \langle D\rangle^s + [\langle D\rangle^s, \hat{P}]$ に注意し $|(\Phi[\langle D\rangle^s, \hat{P}]u, \Phi A\langle D\rangle^s u)|$ を評価する．定理 7.3.1 と補題 5.2.3 より

$$\langle\xi\rangle^s \# h - h \# \langle\xi\rangle^s = r + \tilde{r}, \ \ r \in S(\langle\xi\rangle^s b, \bar{g}) + S(\langle\xi\rangle^s b_1, \bar{g}), \ \ \tilde{r} \in S^s \tag{5.6.65}$$

と書ける．従って系 5.3.1, 5.3.3 から

$$\big|(\Phi[\langle D\rangle^s, H]u, \Phi A\langle D\rangle^s u)\big| \le C\|\Phi A u\|_s(\|\Phi L^\dagger u\|_s + \|\Phi\sqrt{Q}u\|_s) \tag{5.6.66}$$

が得られる．低階から生ずる $\langle D\rangle^s$ との交換子も同様に系 5.3.1 より

$$\begin{aligned} |(\Phi[\langle D\rangle^s, B_0']Au, \Phi A\langle D\rangle^s u)| &\le C\|\Phi A u\|_s^2, \\ |(\Phi[\langle D\rangle^s, B_1']u, \Phi A\langle D\rangle^s u)| &\le C\|\Phi u\|_s \|\Phi A u\|_s \end{aligned} \tag{5.6.67}$$

と評価される．

命題 5.6.1. 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し $c_s, \theta_s > 0$ が存在し $|t| \le \delta_0,\ \theta \ge \theta_s$ のとき

$$2\mathsf{Im}(\Phi\langle D\rangle^s \hat{P}_\theta u, \Phi A\langle D\rangle^s u) \ge \partial_t \tilde{\mathcal{E}}_s^2(u) + c_s\theta\tilde{\mathcal{E}}_s^2(u) + c_s\tilde{\mathcal{E}}_{\sharp s}^2(u)$$

が成り立つ．

証明. $2\mathrm{Im}(\varPhi\langle D\rangle^s\hat{P}_\theta u, \varPhi A\langle D\rangle^s u)$ を

$$2\mathrm{Im}(\varPhi\hat{P}_\theta\langle D\rangle^s u, \varPhi A\langle D\rangle^s u) + 2\mathrm{Im}(\varPhi[\langle D\rangle^s, \hat{P}_\theta]u, \varPhi A\langle D\rangle^s u)$$

と書き第 1 項に命題 5.5.2 を適用する．(5.6.66), (5.6.67) より θ を大きく選べば $|(\varPhi[\langle D\rangle^s, \hat{P}]u, \varPhi A\langle D\rangle^s u)|$ は $\theta\tilde{\mathcal{E}}_s^2(u)$ に吸収される． □

命題 5.6.2. $|\tau| \le \delta_0$ とする．任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $C_s, C_s' > 0$ が存在し

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{s+1-j} &\le C_s\Big(\mathcal{E}_s(u(t)) + \int_\tau^t \mathcal{E}_{\sharp s}(u(t'))dt'\Big)\\ &\le C_s'\Big(\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(\tau)\|_{s+n+1-j} + \int_\tau^t \|\hat{P}u(t')\|_{n+s}dt'\Big)\end{aligned} \tag{5.6.68}$$

が任意の $u \in \cap_{j=0}^2 C^j([\tau, \delta_0]; H^{s+n+2-j})$ について成立する．

証明. u を $e^{-\theta t}u$ で置き換え $Ae^{-\theta t} = e^{-\theta t}D_t$, $\hat{P}_\theta e^{-\theta t} = e^{-\theta t}\hat{P}$ に注意すると命題 5.6.1 から

$$2e^{-2\theta t}\|\varPhi\langle D\rangle^s\hat{P}u\|\|\varPhi\langle D\rangle^s D_t u\| \ge \partial_t\big\{e^{-2\theta t}\mathcal{E}_s^2(u(t))\big\} + c_s e^{-2\theta t}\mathcal{E}_{\sharp s}^2(u(t))$$

が得られる．τ から t $(-\delta_0 \le \tau < t \le \delta_0)$ まで積分して

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s^2(u(t)) + \int_\tau^t \mathcal{E}_{\sharp s}^2(u(t'))dt' &\le C_s\mathcal{E}_s^2(u(\tau))\\ &+C_s\int_\tau^t \|\varPhi\langle D\rangle^s\hat{P}u(t')\|\|\varPhi\langle D\rangle^s D_t u(t')\|dt'\end{aligned}$$

が従う．Schwarz の不等式より

$$\Big(\mathcal{E}_s(u) + \int_\tau^t \mathcal{E}_{\sharp s}(u)dt'\Big)^2 \le 2\mathcal{E}_s^2(u) + 4\delta_0\int_\tau^t \mathcal{E}_{\sharp s}^2(u)dt'$$

であるから $K = \sup_{\tau\le t'\le t}\big\{\mathcal{E}_s(u(t')) + \int_\tau^{t'}\mathcal{E}_{\sharp s}(u(t_1))dt_1\big\}$ とおいて第 3.1 節と同様に議論すると $\sup_{\tau\le t'\le t}\|\varPhi\langle D\rangle^s D_t u(t')\| \le K$ や補題 5.5.9 に注意して

$$\mathcal{E}_s(u(t)) + \int_\tau^t \mathcal{E}_{\sharp s}(u(t'))dt' \le C_s'\Big(\mathcal{E}_s(u(\tau)) + \int_\tau^t \|\hat{P}u(t')\|_{n+s}dt'\Big)$$

が得られる．補題 5.5.9, 5.6.1 より $C = C_s$ があって

$$\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{s+1-j}/C \le \mathcal{E}_s(u(t)) \le C\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{s+n+1-j} \tag{5.6.69}$$

が成り立つのでこれより証明は明らかである． □

ここで $\hat{P}$ の随伴作用素 $\hat{P}^* = \mathrm{op}(\overline{\hat{P}(t,x,\tau,\xi)})$ を考えよう．$\overline{\hat{P}(t,x,\tau,\xi)}$ は $\hat{P}(t,x,\tau,\xi)$ で $a_j(t,x,\xi)$ が $\overline{a_j(t,x,\xi)}$ に置き換わっただけであるから扱いは全く同じである． n を $-n$, θ を $-\theta$ に置き換えて同様の議論を繰り返すと

$$\begin{aligned}&2e^{2\theta t}\|\varPhi_{-n}\langle D\rangle^s\hat{P}^*u\|\|\varPhi_{-n}\langle D\rangle^s D_t u\|\\&\geq -\partial_t\big\{e^{2\theta t}(\mathcal{E}_s^*)^2(u)\big\}+c_s e^{2\theta t}(\mathcal{E}_{\sharp s}^*)^2(u)\end{aligned}\tag{5.6.70}$$

が成立する．ただし

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}_s^*)^2(u)&=\|\varPhi_{-n}\langle D\rangle^s D_t u\|^2+\|\varPhi_{-n}L\langle D\rangle^s u\|^2\\&+(Q\varPhi_{-n}\langle D\rangle^s u,\varPhi_{-n}\langle D\rangle^s u)+c^*\|\varPhi_{-n}^{2\sharp}\langle D\rangle^s u\|^2,\\(\mathcal{E}_{\sharp s}^*)^2(u)&=\|\varPhi_{-n}^{\sharp}D_t u\|_s^2+\|\varPhi_{-n}^{\sharp}Lu\|_s^2+\|\varPhi_{-n}^{\sharp}\sqrt{Q}u\|_s^2+\|\varPhi_{-n}u\|_{s+3/4}^2\end{aligned}$$

で $\varPhi_{-n}^{k\sharp}=\mathrm{op}(\omega^{-k/2}\phi^n)$, $\varPhi_{-n}^{0\sharp}=\varPhi_{-n}$ である．$\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}\leq C\phi\leq C'$ より

$$\|\langle D\rangle^{-n}u\|/C\leq\|\varPhi_{-n}u\|\leq C\|u\|\tag{5.6.71}$$

が分かる．また補題 5.5.7 の証明を繰り返すと $C\|\varPhi_{-n}\sqrt{Q}u\|\geq\|\mathrm{op}(\omega\phi^n\langle\xi\rangle)u\|$ が従い (5.4.27) より $\langle\xi\rangle^{-n}\leq(2\omega\phi)^n\leq C\omega\phi^n$ なので

$$\|\langle D\rangle^{-n+1}u\|\leq C\|\varPhi_{-n}\sqrt{Q}u\|,\quad n\geq 1\tag{5.6.72}$$

が得られる．(5.6.70) を $[t,\tau]$ 上で積分して命題 5.6.2 の証明を繰り返すと

命題 5.6.3. $|\tau|\leq\delta_0$ とする．任意の $s\in\mathbb{R}$ に対して $C_s, C_s'>0$ が存在し

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{s+1-n-j}&\leq C_s\Big(\mathcal{E}_s^*(u(t))+\int_t^\tau\mathcal{E}_{\sharp s}^*(u(t'))dt'\Big)\\&\leq C_s'\Big(\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(\tau)\|_{s+1-j}+\int_t^\tau\|\hat{P}^*u(t')\|_s dt'\Big)\end{aligned}\tag{5.6.73}$$

が任意の $u\in\cap_{j=0}^2 C^j([-\delta_0,\tau];H^{s+2-j})$ に対して成立する．

第 6 章

解の局所存在と一意性

第 5 章で得られたエネルギー不等式を基に局所化された作用素に対して有限伝播な解作用素の存在を示し，これを用いて初期値問題の局所解の存在と一意性を示す.

6.1　局所存在定理

最初に $\hat{P}$ に対する初期値問題の解の存在と一意性について調べる.

定理 6.1.1. $n > 0$ を (5.5.62) を満たす正数とするとき次のような $\delta_0 > 0$ が存在する. $|\tau| < \delta_0$, $s \in \mathbb{R}$ とすると任意の $f \in L^1((\tau, \delta_0); H^{s+n})$ および任意の $\phi_j \in H^{s+n+1-j}$ $(j = 0, 1)$ に対して初期値問題

$$\begin{cases} \hat{P}u = f, \quad \tau < t < \delta_0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ D_t^j u(\tau, x) = \phi_j(x), \ \ j = 0, 1, \quad x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{6.1.1}$$

の一意的な解 $u \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau, \delta_0]; H^{s+1-j})$ が存在する. この $u(t)$ は (5.6.68) を満たす.

証明. 定理 3.1.1 の証明を繰り返せばよい. 一意性は (5.6.68) から従う. u の存在を示そう. $\{\hat{P}^* v; v \in C_0^\infty(\{(t, x); t < \delta_0\})\}$ 上の反線形形式

$$\mathcal{L} : \hat{P}^* \mapsto i(\phi_0, D_t v(\tau)) + i(\phi_1 - B_0(\tau)\phi_0, v(\tau)) + \int_\tau^{\delta_0} (f, v) dt$$

を考える. ここで $B_0 = \mathrm{op}(\tilde{a}_0)$ は (5.5.42) で定義したものである. (5.6.73) より $\big| i(\phi_0, D_t v(\tau)) + i(\phi_1 - B_0(\tau)\phi_0, v(\tau)) \big|$ は

$$\begin{aligned} C(\|\phi_0\|_{s+n+1} + \|\phi_1\|_{s+n})(\|v(\tau)\|_{-s-n} + \|D_t v(\tau)\|_{-s-n-1}) \\ \le C \sum_{j=0}^1 \|\phi_j\|_{s+n+1-j} \int_\tau^{\delta_0} \|\hat{P}^* v(t)\|_{-s-1} dt \end{aligned}$$

で評価され $\left|\int_\tau^{\delta_0}(f,v)dt\right|$ は

$$\left|\int_\tau^{\delta_0}(f,v)dt\right| \le \sup_{\tau\le t\le\delta_0}\|v(t)\|_{-s-n}\int_\tau^{\delta_0}\|f(t)\|_{s+n}dt$$
$$\le C\int_\tau^{\delta_0}\|\hat{P}^*v(t)\|_{-s-1}dt\int_\tau^{\delta_0}\|f(t)\|_{s+n}dt$$

と評価される．定理 3.1.1 の証明を繰り返すと $u\in L^\infty([\tau,\delta_0];H^{s+1})$ が存在して

$$i(\phi_0,D_tv(\tau))+i(\phi_1-B_0(\tau)\phi_0,v(\tau))+\int_\tau^{\delta_0}(f,v)dt=\int_\tau^{\delta_0}(u,\hat{P}^*v)dt \tag{6.1.2}$$

が任意の $v\in C_0^\infty(\{(t,x);t<\delta_0\})$ について成立する．v を $C_0^\infty(\{(t,x);\tau<t<\delta_0\})$ に制限することによって u は超関数の意味で $\hat{P}u=f$ を $(\tau,\delta_0)\times\mathbb{R}^d$ で満たすことがわかる．これより $D_t^ju(t)\in L^2([\tau,\delta_0];H^{s+1-j})$, $j=0,1,2$ が従う．念のためにこの証明は後で与えることにする．従って $u\in\cap_{j=0}^1C^j([\tau,\delta_0];H^{s-j})$ となり (6.1.2) において $v(\tau),D_tv(\tau)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は任意に選べるので $D_t^ju(\tau)=\phi_j$, $j=0,1$ が成り立つ．いま $\phi_{j\nu}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f_\nu\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+d})$ を

$$\|\phi_j-\phi_{j\nu}\|_{s+n+1-j}\to 0,\ \int_\tau^T\|f-f_\nu\|_{s+n}dt\to 0\quad(\nu\to\infty)$$

となるように選ぶと $\hat{P}u_\nu=f_\nu$ の解 $u_\nu(t)\in\cap_{j=0}^2C^j([\tau,\delta_0];H^{s+n+2-j})$ で $D_t^ju_\nu(\tau)=\phi_{j\nu}$ を満たすものがある．(5.6.68) より $\nu\to\infty$ のとき u_ν は $\cap_{j=0}^1C^j([\tau,\delta_0];H^{s+1-j})$ の Cauchy 列となりその極限が求める解である．証明より極限の u が (5.6.68) を満たすことは明らかである． □

補題 6.1.1. $u\in L^2([\tau,\delta_0];H^s)$, $f\in L^2([\tau,\delta_0];H^{s-2})$ が $\hat{P}u=f$ を $(\tau,\delta_0)\times\mathbb{R}^d$ で満たしているとする．このとき $D_t^ju\in L^2([\tau,\delta_0];H^{s-j})$, $j=0,1,2$ である．

証明. $m,s\in\mathbb{R}$ に対して $H_{(m,s)}=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d});\langle D_t,D\rangle^m\langle D\rangle^su\in L^2(\mathbb{R}^{1+d})\}$ とする．ここで $\langle\tau,\xi\rangle=(1+\tau^2+|\xi|^2)^{1/2}$ で $H_{(m,s)}$ にはノルム $\|u\|_{(m,s)}=\|\langle D_t,D\rangle^m\langle D\rangle^su\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})}$ を与えるものとする．定義から

$$H_{(m_1,s_1)}\subset H_{(m_2,s_2)}\Longleftrightarrow m_2\le m_1\ \text{かつ}\ m_2+s_2\le m_1+s_1 \tag{6.1.3}$$

は明らかである．いま $X=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+d};t>0\}$ とおき関数空間 $H_{(m,s)}^+$ を $u=U\big|_X$ となる $U\in H_{(m,s)}$ が存在する u の全体として定義し，ノルムを

$$\|u\|_{H_{(m,s)}^+}=\inf\left\{\|U\|_{(m,s)};U\big|_X=u,U\in H_{(m,s)}\right\}$$

で与える．明らかに $\|u\|_{H_{(0,s)}^+}$ は $\left(\int_0^\infty\|u(t,\cdot)\|_s^2dt\right)^{1/2}$ に一致する．また定義から $H_{(m,s)}^+$ についても (6.1.3) が成り立つことは明らかである．$u\in H_{(m,s)}^+$ とすると定義から列

$\{U_k\}$, $U_k \in H_{(m,s)}$ で $U_k\big|_X = u$ かつ $\lim_{k\to\infty} \|U_k\|_{(m,s)} = \|u\|_{H^+_{(m,s)}}$ となるものが選べるが $H_{(m,s)}$ は Hilbert 空間であるから適当な部分列を考えれば U_k はある $U \in H_{(m,s)}$ に弱収束しているとしてよく，したがって $\|U\|_{(m,s)} \le \liminf_{k\to\infty} \|U_k\|_{(m,s)}$ である．また $U\big|_X = u$ は明らかであるから

$$U\big|_X = u, \quad \|U\|_{(m,s)} = \|u\|_{H^+_{(m,s)}}$$

を満たす $U \in H_{(m,s)}$ が存在する．ここで次の補題を準備する．

補題 6.1.2. $m \in \mathbb{N}$ とするとき $u \in H^+_{(m,s)}$ であるためには $u \in H^+_{(m-1,s+1)}$ かつ $D_t u \in H^+_{(m-1,s)}$ であることが必要十分であり，このとき

$$\|u\|^2_{H^+_{(m,s)}}/2 \le \|D_t u\|^2_{H^+_{(m-1,s)}} + \|u\|^2_{H^+_{(m-1,s+1)}} \le \|u\|^2_{H^+_{(m,s)}}$$

が成り立つ．

証明. 補題 6.1.1 の証明に必要な十分条件の方だけ示す．$V \in H_{(m-1,s+1)}$, $W \in H_{(m-1,s)}$ を X でそれぞれ u, $D_t u$ に一致し $\|V\|_{(m-1,s+1)} = \|u\|_{H^+_{(m-1,s+1)}}$, $\|W\|_{(m-1,s)} = \|D_t u\|_{H^+_{(m-1,s)}}$ を満たすものとする．$v = W + i\langle D\rangle V \in H_{(m-1,s)}$ とおく．$\Lambda(\tau,\xi) = (\tau + i\langle\xi\rangle)^{-1}$ とするとき $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})$ が $t > 0$ で $u = 0$ なら $\mathrm{op}(\Lambda)u$ も $t > 0$ で 0 である．実際 $\hat{u}(\tau,\xi)$ を u の Fourier-Laplace 変換とするとき $\Lambda(\tau,\xi)\hat{u}(\tau,\xi)$ の $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ への正則拡張を評価すればよい．$t > 0$ では $v = (D_t + i\langle D\rangle)V$ であるから上で確かめたように $t > 0$ で $\mathrm{op}(\Lambda)v = \mathrm{op}(\Lambda)(D_t + i\langle D\rangle)V = V$ が従う．$\mathrm{op}(\Lambda)v \in H_{(m,s)}$ であるから $u \in H^+_{(m,s)}$ を得る．また $\|u\|^2_{H^+_{(m,s)}} \le \|\mathrm{op}(\Lambda)v\|^2_{(m,s)} = \|v\|^2_{(m-1,s)} \le 2(\|W\|^2_{(m-1,s)} + \|V\|^2_{(m-1,s+1)})$ であるから左側の不等式を得る． □

補題 6.1.1 の証明に戻る；$\tau = 0$ としてよい．$\chi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ を $t \le \delta_0/2$ では $\chi = 1$ で $t \ge \delta_0$ では 0 とする．補題 6.1.2 を $m = 0$ として適用する．$\hat{P}\chi u = [\hat{P},\chi]u + \chi f$ と書くとき $\chi u \in H^+_{(0,s)}$, $\chi f \in H^+_{(0,s-2)}$, $[\hat{P},\chi]u \in H^+_{(-1,s)}$ は明らかであり，(6.1.3) から $\langle D\rangle^2 \chi u \in H^+_{(0,s-2)} \subset H^+_{(-1,s-1)}$ などが従うことに注意すると $D_t^2 \chi u \in H^+_{(-1,s-1)}$ がわかる．$D_t \chi u \in H^+_{(-1,s)}$ であるから補題 6.1.2 より $D_t \chi u \in H^+_{(0,s-1)} = L^2((0,\infty); H^{s-1})$ が従いこれより $\chi D_t u \in L^2((0,\infty); H^{s-1})$ を得る．$\chi D_t^2 u \in L^2((0,\infty); H^{s-2})$ は $\chi \hat{P} u = \chi f$ より明らかである．$(1-\chi)u$ に対して同様の議論を繰り返すと $(1-\chi)D_t^j u \in L^2((-\infty,\delta_0); H^{s-j})$, $j = 0,1,2$ が得られるので結論が従う． □

$\hat{P}^*$ に対する初期値問題の解の存在についても同様の議論を繰り返せばよい．

定理 6.1.2. $|\tau| < \delta_0$, $s \in \mathbb{R}$ とする．任意の $f \in L^1((-\delta_0,\tau);H^{s+n})$ および任意の $\phi_j \in H^{s+n+1-j}$ $(j=0,1)$ に対して初期値問題

$$\begin{cases} \hat{P}^*u = f, \quad -\delta_0 < t < \tau, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ D_t^j u(\tau,x) = \phi_j(x), \ \ j=0,1, \quad x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{6.1.4}$$

の一意的な解 $u \in \cap_{j=0}^1 C^j([-\delta_0,\tau];H^{s+1-j})$ が存在する．この $u(t)$ は (5.6.73) を満たす.

第 3.2 節と同様に初期値問題 (6.1.1) で $\phi_0=\phi_1=0$ のときの解作用素

$$\hat{G} : L^1((\tau,\delta_0);H^{s+n}) \ni f(t) \mapsto u(t) \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau,\delta_0];H^{s+1-j})$$

を考える．このとき $(\tau,\delta_0)\times\mathbb{R}^d$ で $\hat{P}\hat{G}f=f$ でありまた

$$\sum_{j=0}^1 \|D_t^j \hat{G}f(t)\|_{s+1-j} \le C_s \int_\tau^t \|f(t_1)\|_{n+s}dt_1, \quad \tau \le t \le \delta_0 \tag{6.1.5}$$

が成立している.

命題 6.1.1. $\hat{G}$ は有限伝播である．すなわち $\hat{G}$ は定義 3.2.3 で $m=2$ としたときの条件を満たす.

この証明は次節で与えることにする.

定義 6.1.1. P_i $(i=1,2)$ を

$$-D_t^2 + \sum_{j=0}^1 \mathrm{op}(a_j)D_t^j, \quad a_j(t,x,\xi) \in C^\infty((-T,T);S^{2-j}) \tag{6.1.6}$$

の形をした 2 階の微分作用素 (t に関して微分, x に関して擬微分作用素) とする．$\eta \in \mathbb{R}^d$, $|\eta| \neq 0$ に対し $(0,\eta)$ の適当な錐近傍 W と $\delta > 0$ が存在して

$$P_1 - P_2 = \sum_{j=0}^1 \mathrm{op}(c_j)D_t^j, \quad c_j(t,x,\xi) \in C^\infty([-\delta,\delta];S^{2-j}\cap S^{-\infty}(W))$$

と表されるとき $P_1 \equiv P_2$ at $(0,\eta)$ と書く.

補題 6.1.3. $p=0$ の危点 $(0,0,\tau,\xi)$ はすべて実効的双曲型であるとする．このとき任意の $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^d$ に対して $P_\eta \equiv P$ at $(0,\eta)$ となる (6.1.6) の形をした P_η が存在しこの P_η は有限伝播な解作用素を持つ.

証明. $p(0,0,\tau,\eta)=0$ が重根を持つとする．このとき重根は $\tau=0$ で $(0,0,0,\eta)$ は危点であるから仮定より実効的双曲型である．命題 4.3.1 で $\bar{\xi}=\eta$ としたときの局所座標変換

で $\mathbb{R}^d$ の微分同相に拡張したものを $x \mapsto \kappa(x)$ で表し $(Tu)(t,x) = u(t,\kappa(x))$ とする．$\hat{P}$ を第 5.1 節で定義した $(0,e_d)$ の周りに局所化された作用素とし $P_\eta = T\hat{P}T^{-1}$ とおくと $(0,e_d)$ のある近傍 (5.1.3) で $(y(x),\eta(\xi)) = (x,\xi)$ であったから

$$P \equiv P_\eta \quad \text{at} \quad (0,\eta)$$

は明らかである．第 5 章のエネルギー不等式を基にして定理 6.1.1 で $\hat{P}$ に対する解作用素 $\hat{G}$ の存在を示したがこれは命題 6.1.1 より有限伝播である．$G_\eta = T\hat{G}T^{-1}$ とおくと $P_\eta G_\eta = I$ は明らかでありさらに G_η も有限伝播である．これを確かめるには (3.2.20) と同様に考えればよい．U_1 を閉錐集合，U_2 をコンパクト錐集合で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ とする．$(\kappa^{-1})^*U_i$, $i=1,2$ はそれぞれ閉錐集合，コンパクト錐集合で $(\kappa^{-1})^*U_1 \cap (\kappa^{-1})^*U_2 = \emptyset$ であるから開錐集合 V_i とコンパクト錐集合 W_i を $(\kappa^{-1})^*U_2 \Subset V_2 \Subset W_2 \Subset V_1 \Subset W_1$ かつ $W_1 \cap (\kappa^{-1})^*U_1 = \emptyset$ を満たすように選びさらに $\phi_i \in S^0$ を $\phi_1 = 1$ on W_1^c, $\operatorname{supp}\phi_1 \subset V_1^c$ また $\phi_2 = 1$ on V_2, $\operatorname{supp}\phi_2 \subset W_2$ であるように選ぶ．任意の $h_i \in S^0$, $\operatorname{supp} h_i \subset U_i$ に対して $\mathrm{op}(h_2)G_\eta\mathrm{op}(h_1)$ を

$$\begin{aligned}&\mathrm{op}(h_2)T\mathrm{op}(\phi_2)\hat{G}\mathrm{op}(\phi_1)T^{-1}\mathrm{op}(h_1) + \mathrm{op}(h_2)T\hat{G}\mathrm{op}(\phi_1^c)T^{-1}\mathrm{op}(h_1)\\&+\mathrm{op}(h_2)T\mathrm{op}(\phi_2^c)\hat{G}\mathrm{op}(\phi_1)T^{-1}\mathrm{op}(h_1), \quad \phi_i^c = 1-\phi_i\end{aligned}$$

と分解する．$\operatorname{supp}\phi_1^c \subset W_1$, $W_1 \cap (\kappa^{-1})^*U_1 = \emptyset$ であるから $\mathrm{op}(\phi_1^c)T^{-1}\mathrm{op}(h_1)$ には命題 2.3.3 が適用できる．同様に $\operatorname{supp}\phi_2^c \subset V_2^c$, $U_2 \cap \kappa^*V_2^c = \emptyset$ であるから $\mathrm{op}(h_2)T\mathrm{op}(\phi_2^c)$ にも命題 2.3.3 が適用できる．他方 $W_2 \cap V_1^c = \emptyset$ より $\mathrm{op}(\phi_2)\hat{G}\mathrm{op}(\phi_1)$ の評価には $\hat{G}$ の有限伝播性を用いればよい．

次に $p(0,0,\tau,\eta) = 0$ が単純根を持つ場合を考える．このときは $(0,\eta)$ の錐近傍 U および $\delta > 0$ と ξ について斉次 1 次で実数値をとる $\lambda_i(t,x,\xi) \in C^\infty((-\delta,\delta)\times U)$ で $\inf_{(-\delta,\delta)\times U} |\lambda_1(t,x,\xi) - \lambda_2(t,x,\xi)|/|\xi| > 0$ を満たすものが存在し

$$p(t,x,\tau,\xi) = -\big(\tau + \lambda_1(t,x,\xi)\big)\big(\tau + \lambda_2(t,x,\xi)\big) \tag{6.1.7}$$

と書ける．定理 2.2.1 を考慮すると

$$P(t,x,\tau,\xi) = -\big(\tau + \lambda_1 + \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{1j}\big)\#\big(\tau + \lambda_2 + \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{2j}\big)$$

を形式的に満たす ξ について斉次 $-j$ 次の $\lambda_{ij} \in C^\infty((-\delta,\delta)\times U)$, $j = 0,1,\dots$ が一意的に決まる．$V \Subset U$ を $(0,\eta)$ の錐近傍とし $\chi \in S^0$ を $V \cap \{|\xi| \geq 1\}$ では $\chi = 1$ で $\operatorname{supp}\chi \subset U \cap \{|\xi| \geq 1/2\}$ を満たすものとするとき命題 2.2.1 (の後の注意) より $\tilde{\lambda}_i \sim \chi\lambda_i + \sum_{j=0}^{\infty}\chi\lambda_{ij}$ となる $\tilde{\lambda}_i \in S^1$ が存在する．$P_i = D_t + \mathrm{op}(\tilde{\lambda}_i)$ とおくと

$$P \equiv P_1P_2 \quad \text{at} \quad (0,\eta)$$

は明らかである．第 3 章で証明したように各 P_i には有限伝播な解作用素 G_i が存在し，G_2G_1 も有限伝播である．したがって $P_\eta = P_1P_2$ が求めるもので $G_\eta = G_2G_1$ がその解作用素である． $\square$

定理 6.1.3. $p = 0$ の危点 $(0,0,\tau,\xi)$ はすべて実効的双曲型であるとする．このとき正数 $\delta > 0$, $n > 0$ および $x = 0$ の近傍 Ω が存在し，任意の $|\tau| < \delta$ と任意の $f \in L^1((\tau,\delta); H^{s+n})$ に対して $(\tau,\delta)\times\Omega$ で $Pu = f$ を満たす $u \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau,\delta]; H^{s+1-j})$ で

$$\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j u(t)\|_{s+1-j} \le C_s \int_\tau^t \|f(t')\|_{n+s} dt', \quad \tau \le t \le \delta \tag{6.1.8}$$

を満たすものが存在する．

証明. 補題 6.1.3 より任意の $|\eta| = 1$ に対して $(0,\eta)$ の錐近傍 W_η，正数 $\delta_\eta > 0$，2 階微分作用素 P_η とその有限伝播な解作用素 G_η が存在し，解作用素は $n = n_\eta$ として (6.1.5) を満たし，P_η は

$$P - P_\eta = R_\eta = \sum_{j=0}^{1} \mathrm{op}(c_{\eta,j}) D_t^j, \;\; c_{\eta,j} \in S^{2-j} \cap S^{-\infty}(W_\eta), \;\; |t| \le \delta_\eta \tag{6.1.9}$$

を満たす．$\{|\eta| = 1\}$ はコンパクトであるから有限個の η_i と $x = 0$ の近傍 Ω が存在して $\cup_i W_{\eta_i} \supset \Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ が成り立つ． このとき $n = \max_i n_{\eta_i}$ とおくと G_{η_i} はこの n に対して (6.1.5) を満たすことに注意する．開錐集合からなる $\Omega \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ の開被覆 $\{U_i\}$, $\{V_i\}$ で $U_i \Subset V_i \Subset W_{\eta_i}$ となるものおよびこの開被覆 $\{U_i\}$ に付随する単位分解 $\{\alpha_i(x,\xi)\}$, $\alpha_i \in S^0$ を選ぶ．このとき $\sum_i \alpha_i(x,\xi) = \alpha(x)$ とおくと $\alpha(x)$ は $x = 0$ の近傍で 1 である．また $\alpha(x)$ の support はコンパクトとしてよい．G を

$$G = \sum_i G_{\eta_i} \mathrm{op}(\alpha_i)$$

で定義すると (6.1.9) より

$$PGf = \sum_i \big(P_{\eta_i} + R_{\eta_i}\big) G_{\eta_i} \mathrm{op}(\alpha_i) f = \big(\alpha(x) - \tilde{R}\big) f \tag{6.1.10}$$

である．ここで $\tilde{R} = -\sum_i R_{\eta_i} G_{\eta_i} \mathrm{op}(\alpha_i)$ である．いま $\beta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $x = 0$ の近傍では 1 で $\mathrm{supp}\,\beta \Subset \{\alpha = 1\}$ を満たすものとすると $\beta(\alpha - \tilde{R}) = \beta(I - \alpha\tilde{R})$ であることに注意し $R = \alpha\tilde{R}$ とおく． このとき $\delta_1 > 0$, $\delta' > 0$ が存在して

$$\|Rf(t)\|_{\tilde{s}} \le C_{\tilde{s}} \int_\tau^t \|f(t')\|_{\tilde{s}} dt', \quad \tau \le t \le \tau + \delta', \;\; |\tau| \le \delta_1 \tag{6.1.11}$$

が成立する．実際 $\chi_i \in S^0$ を $\operatorname{supp}\chi_i \subset W_{\eta_i}$ かつ V_i 上で $\chi_i = 1$ となるものとし $\tilde{\alpha} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $x=0$ の近傍で 1 かつ $\operatorname{supp}\alpha \Subset \{\tilde{\alpha}=1\}$ と選んで

$$\begin{aligned}\alpha R_{\eta_i} G_{\eta_i} \mathrm{op}(\alpha_i) = \alpha R_{\eta_i}(1-\tilde{\alpha}) G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)\\ +\alpha R_{\eta_i}\tilde{\alpha}(\mathrm{op}(\chi_i)+\mathrm{op}(1-\chi_i))G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)\end{aligned}$$

と書く．ここで $\alpha(1-\tilde{\alpha}) = 0$ でありまた $\tilde{\alpha}\#\chi_i = \kappa_i + r_i$, $\operatorname{supp}\kappa_i \subset W_{\eta_i}$, $\kappa_i \in S^0$, $r_i \in S^{-n}$ および $\tilde{\alpha}\#(1-\chi_i) = \tilde{\kappa}_i + \tilde{r}_i$, $\operatorname{supp}\tilde{\kappa}_i \subset V_i^c \cap \operatorname{supp}\tilde{\alpha}$, $\tilde{\kappa}_i \in S^0$, $\tilde{r}_i \in S^{-n}$ と書くと $\|\alpha R_{\eta_i}(1-\tilde{\alpha})G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)f\|_{\tilde{s}}$, $\|\alpha R_{\eta_i}\mathrm{op}(\kappa_i + r_i)G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)f\|_{\tilde{s}}$ および $\|\alpha R_{\eta_i}\mathrm{op}(\tilde{r}_i)G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)f\|$ が

$$C\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)f\|_{\tilde{s}-n+1-j} \le C'\int_\tau^t \|f(t')\|_{\tilde{s}}dt'$$

で評価されることは明らかである．残る $\|\alpha R_{\eta_i}\mathrm{op}(\tilde{\kappa}_i)G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)f\|_{\tilde{s}}$ は

$$C\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j \mathrm{op}(\tilde{\kappa}_i)G_{\eta_i}\mathrm{op}(\alpha_i)f\|_{\tilde{s}+2-j}$$

と評価されるが $(V_i^c \cap \operatorname{supp}\tilde{\alpha})\cap U_i = \emptyset$ であるから G_{η_i} の有限伝播性を利用すればよい．

次に (6.1.11) に $e^{-\theta t}$ $(\theta > 0)$ を乗じて τ $(|\tau| \le \delta_1)$ から t まで積分すると

$$\int_\tau^t e^{-\theta t'}\|Rf(t')\|_{\tilde{s}}dt' \le \frac{C_{\tilde{s}}}{\theta}\int_\tau^t e^{-\theta t'}\|f(t')\|_{\tilde{s}}dt', \quad \tau \le t \le \tau+\delta'$$

が任意の $f \in L^1((\tau,\tau+\delta');H^{\tilde{s}})$ に対して成り立つ．$C_{\tilde{s}}/\theta < 1/2$ と $\theta = \theta_s$ を選ぶと $Sf = \sum_{l=0}^\infty R^l f$ は $e^{-\theta t}$ を weight として $L^1((\tau,\tau+\delta');H^{\tilde{s}})$ で収束し

$$\int_\tau^t e^{-\theta t'}\|Sf(t')\|_{\tilde{s}}dt' \le 2\int_\tau^t e^{-\theta t'}\|f(t')\|_{\tilde{s}}dt' \tag{6.1.12}$$

が成立する．$\beta PGSf = \beta(I-R)Sf = \beta f$ であるから $\{\beta(x)=1\}$ 上で $P\big(GSf\big) = f$ が成り立つ． また $f \in L^1((\tau,\tau+\delta');H^{s+n})$ とすると G の定義より $u = GSf \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau,\tau+\delta'];H^{s+1-j})$ であり (6.1.5) および (6.1.12) で $\tilde{s} = s+n$ と選んで

$$\begin{aligned}e^{-\theta t}\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{s+1-j} &\le C\int_\tau^t e^{-\theta t'}\|Sf(t')\|_{s+n}dt'\\ &\le 2C\int_\tau^t e^{-\theta t'}\|f(t')\|_{s+n}dt'\end{aligned}$$

が成立する．これより (6.1.8) が従う． □

6.2 有限伝播性

この節では命題 6.1.1 を証明する．これには第 3.2 節で行った証明を繰り返えせばよいが基になるエネルギー不等式が命題 5.6.2 の weight 付きの不等式なのでその分各段階での評価が少し面倒になる．この節でも $\hat{P}_\theta$ を (5.6.64) の形に書く．

定義 6.2.1. $f(t,x,\xi) \in C^\infty((-T,T);S^0)$ がある $\delta_1 > 0$, $0 < \kappa < 1$ について

$$\partial_t f \geq \delta_1, \quad 4\kappa(\partial_t f)^2 h \geq \{h, f\}^2 \tag{6.2.13}$$

を満たすとき f は ($\hat{P}$ に対して) 空間的であるという．

f を空間的とするとき $\bar{f}$, $\bar{f}_1$, m, w_δ, F^δ, F_1^δ などは 第 3.2 節で定義したものと同じとする．この節でもいちいち断らないが考察はすべて $0 < \delta$ について一様である．評価の過程を見やすくするために次の定義を導入する．

定義 6.2.2. $S_i(t,\cdot)$, $i = 1, 2$ を $C^2((-T,T);H^{s+n+1})$ 上の実数値の汎関数とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して δ によらない定数 $C_\epsilon = C_\epsilon(s) > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}\big|S_1(t,u(t)) - S_2(t,u(t))\big| \leq C_\epsilon\big(\tilde{\mathcal{E}}^2_{\sharp(s-1/4)}(u) + \tilde{\mathcal{E}}^2_s(F^\delta u)\big)\\ +\epsilon\|\varPhi A F_1^\delta u(t)\|_s^2, \quad u(t) \in C^2((-T,T);H^{s+n+1})\end{aligned}$$

が成立するとき $S_1 \overset{s}{\sim} S_2$ と書く．また $S_1(t,u(t)) - S_2(t,u(t))$ が上式の右辺で評価されるとき $S_1 \overset{s}{\lesssim} S_2$ あるいは $S_2 \overset{s}{\gtrsim} S_1$ と表す．

以下，定数 c, C は δ には依らないが一般には s に依存し，行ごとに変わり得るものとする．$(\varPhi\langle D\rangle^s[F^\delta, \hat{P}_\theta]u, \varPhi\langle D\rangle^s A F^\delta u)$ を考える．まず次のことに注意する．

補題 6.2.1. $r_i \in S(\langle\xi\rangle^{l_i}\phi^{-n_i}, \bar{g})$ $(i = 1,2,3,4)$ は $\partial_t r_i \in S(\langle\xi\rangle^{l_i+1/2}\phi^{-n_i}, \bar{g})$ を満たすとし $R_j = \mathrm{op}(r_j)$ とおく．

$$\begin{aligned}\Sigma_{i=1}^2 l_i = 2s+1,\ \ \Sigma_{i=1}^2 n_i = 2n \ \text{ のとき } (R_1 u, R_2 u) \overset{s}{\sim} 0,\\ \Sigma_{i=1}^3 l_i = 2s+1/4,\ \ \Sigma_{i=1}^3 n_i = 2n \ \text{ のとき } (R_1 u, R_2 A R_3 u) \overset{s}{\sim} 0,\\ \Sigma_{i=1}^4 l_i = 2s-1/2,\ \ \Sigma_{i=1}^4 n_i = 2n \ \text{ のとき } (R_1 A R_2 u, R_3 A R_4 u) \overset{s}{\sim} 0.\end{aligned}$$

証明. $\bar{r}_2 \# r_1 \in S(\langle\xi\rangle^{2s+1}\phi^{-2n}, \bar{g})$ ゆえ系 5.3.1 を適用すると $|(R_1 u, R_2 u)| \leq C\|\varPhi u\|^2_{s+1/2}$ は明らかである．つぎに $AR_3 = R_3 A - \mathrm{op}(i\partial_t r_3)$ と書くと同様にして $|(R_1 u, R_2 R_3 A u)| \leq C\|\varPhi u\|_{s+1/2}\|\varPhi A u\|_{s-1/4}$ を得る．AR_3 を $\mathrm{op}(\partial_t r_3)$ で置き換えたものには 1 番目の主張を適用すればよい．最後の主張の証明も同様である． □

$(\Phi\langle D\rangle^s[F^\delta, H]u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$ を考える．$(w_\delta \bar{f})\#h - h\#(w_\delta \bar{f}) - i\{h, w_\delta \bar{f}\} \in S^0$ であるから補題 6.2.1 より

$$(\Phi\langle D\rangle^s[F^\delta, H]u, \Phi A\langle D\rangle^s F^\delta u) \overset{s}{\sim} (\Phi\langle D\rangle^s \mathrm{op}(i\{h, w_\delta \bar{f}\})u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$$

である．$\{h, w_\delta \bar{f}\} = \{h, \bar{f}\}w_\delta + \{h, w_\delta\}\bar{f}$ と 2 項に分けると $w_\delta \bar{f} - m\#(w_\delta \bar{f}_1) \in S^{-1}$ でまた $\{h, \bar{f}\}w_\delta \in S^1$ ゆえ $(\Phi\langle D\rangle^s \mathrm{op}(i\{h, \bar{f}\}w_\delta)u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$ は補題 6.2.1 から

$$\overset{s}{\sim} (\Phi\langle D\rangle^s \mathrm{op}(i\{h, \bar{f}\}w_\delta)u, \Phi \mathrm{op}(m)\langle D\rangle^s AF_1^\delta u) \tag{6.2.14}$$

となる．$r = \langle\xi\rangle^s\#\phi^{-n}\#\phi^{-n}\#m - m\#\langle\xi\rangle^s\#\phi^{-n}\#\phi^{-n}$ とおくと定理 7.3.1 より $r \in S(\langle\xi\rangle^{s-1/2}\phi^{-2n}, \bar{g})$ でまた $\{h, \bar{f}\}w_\delta \in S^1$ であるから系 5.3.1 より任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned}|(\mathrm{op}(i\{h, \bar{f}\}w_\delta)u, \mathrm{op}(r)\langle D\rangle^s AF_1^\delta u)| &\le C\|\Phi u\|_{s+1/2}\|\Phi AF_1^\delta u\|_s \\ &\le \epsilon\|\Phi AF_1^\delta u\|_s^2 + C_\epsilon\|\Phi u\|_{s+1/2}^2\end{aligned} \tag{6.2.15}$$

と評価され (6.2.14) $\overset{s}{\sim}$ $(\Phi\langle D\rangle^s \mathrm{op}(m)\mathrm{op}(i\{h, \bar{f}\}w_\delta)u, \Phi\langle D\rangle^s AF_1^\delta u)$ である．ところで $\{h, \bar{f}\} = -\{h, f\}f^{-2}\bar{f} = -f^{-1}(\partial_t f)^{-1/2}\{h, f\}\bar{f}_1$ に注意すると $m\#(\{h, \bar{f}\}w_\delta) + \big(\{h, f\}/\partial_t f\big)\#(w_\delta \bar{f}_1) \in S^0$ ゆえ (6.2.14) は

$$\overset{s}{\sim} -i(\Phi\langle D\rangle^s \mathrm{op}(\{h, f\}/\partial_t f)F_1^\delta u, \Phi\langle D\rangle^s AF_1^\delta u).$$

さらに $\phi^{-n}\#\langle\xi\rangle^s\#(\{h, f\}/\partial_t f) - (\{h, f\}/\partial_t f)\#\phi^{-n}\#\langle\xi\rangle^s \in S(\langle\xi\rangle^{s+1/2}\phi^{-n}, \bar{g})$ より (6.2.15) と同様にして $\overset{s}{\sim} -i(\mathrm{op}(\{h, f\}/\partial_t f)\Phi\langle D\rangle^s F_1^\delta u, \Phi\langle D\rangle^s AF_1^\delta u)$.

$\{h, w_\delta\}\bar{f}$ については $k = \{h, w_\delta\}w_\delta^{-1} \in S^1$ とおくと $\{h, w_\delta\}\bar{f} - k\#(w_\delta \bar{f}) \in S^0$ より $(\Phi\langle D\rangle^s \mathrm{op}(i\{h, w_\delta\}\bar{f})u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u) \overset{s}{\sim} (\Phi\langle D\rangle^s \mathrm{op}(ik)F^\delta u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$ である．$\phi^{-n}\#\langle\xi\rangle^s\#k - k\#\phi^{-n}\#\langle\xi\rangle^s \in S(\langle\xi\rangle^{s+1/2}\phi^{-n}, \bar{g})$ よりさらに

$$\overset{s}{\sim} (\mathrm{op}(ik)\Phi\langle D\rangle^s F^\delta u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$$

となる．補題 5.2.3 より $k = \{h, w_\delta\}w_\delta^{-1} \in S(b, \bar{g}) + S(b_1, \bar{g})$ であるから系 5.3.3 より $(\mathrm{op}(\{q, w_\delta\}w_\delta^{-1})\Phi\langle D\rangle^s F^\delta u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u) \overset{s}{\sim} 0$ が従う．以上をまとめると

補題 6.2.2. 次が成り立つ．

$$(\Phi\langle D\rangle^s[F^\delta, H]u, \Phi A\langle D\rangle^s F^\delta u) \overset{s}{\sim} -i(\mathrm{op}(\{h, f\}/\partial_t f)\Phi\langle D\rangle^s F_1^\delta u, \Phi\langle D\rangle^s AF_1^\delta u).$$

次に $(\Phi\langle D\rangle^s[A^2, F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$ を考察しよう．これを

$$(\Phi\langle D\rangle^s[A, F^\delta]Au, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u) + (\Phi\langle D\rangle^s A[A, F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u) \tag{6.2.16}$$

と書いて $(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]Au, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$ に $[A,F^\delta] = \mathrm{op}(if^{-2}(\partial_t f)w_\delta \bar{f}) \in S^0$ および $m\#(f^{-2}(\partial_t f)w_\delta \bar{f}) - w_\delta \bar{f}_1 \in S^{-1}$ に注意してこれまでの議論を適用すると (あるいは (6.2.16) のもう一方に適用しても同じ結果を得る)

$$(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]Au, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u) \overset{s}{\sim} i\|\Phi\langle D\rangle^s AF_1^\delta u\|^2 \tag{6.2.17}$$

を得る．もう一方の $(\Phi\langle D\rangle^s A[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)$ は別の取り扱いをする．

補題 6.2.3. 次が成立する．

$$\begin{gathered}\mathsf{Im}(\Phi\langle D\rangle^s A[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av) = -\partial_t \mathsf{Re}(\Phi\langle D\rangle^s [A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av)\\ +\mathsf{Im}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s A^2 v) - n\mathsf{Re}(\mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av)\\ -n\mathsf{Re}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})\langle D\rangle^s Av) - 2\theta\mathsf{Re}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av).\end{gathered}$$

証明. $D_t(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av)$ を計算すると $\partial_t\phi = \omega^{-1}\phi$ より

$$\begin{gathered}D_t(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av) = in(\mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av)\\ +(\Phi\langle D\rangle^s A[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av) + in(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \mathrm{op}(\omega^{-1}\phi^{-n})\langle D\rangle^s Av)\\ -(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s A^2 v) + 2i\theta(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s Av)\end{gathered}$$

となる．両辺の虚部を考えれば結論を得る． □

$A^2F^\delta = F^\delta A^2 + A[A,F^\delta] + [A,F^\delta]A$ と書き $\omega^{-1}\phi^{-n} \in S(\langle\xi\rangle^{1/2}\phi^{-n}, \bar{g})$ に注意して補題 6.2.3 で $v = F^\delta u$ としたものに補題 6.2.1 を適用すると

$$\begin{gathered}\mathsf{Im}(\Phi\langle D\rangle^s A[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u) \overset{s}{\sim} -\partial_t\mathsf{Re}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)\\ +\mathsf{Im}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s F^\delta A^2 u)\end{gathered}$$

が得られる．ここで A^2 を $A^2 = -\hat{P}_\theta + H + B_0'A + B_1'$ で置き換えると $B_i' = \mathrm{op}(\tilde{a}_i')$, $\tilde{a}_i' \in S^i$ であったから補題 6.2.1 より左辺はさらに

$$\begin{gathered}\overset{s}{\sim} -\partial_t\mathsf{Re}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u) - \mathsf{Im}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s F^\delta \hat{P}_\theta u)\\ +\mathsf{Im}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s F^\delta Hu)\end{gathered}$$

である．上式の第 3 項を整理しよう．

補題 6.2.4. $(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s F^\delta Hu) \overset{s}{\sim} i(H\Phi\langle D\rangle^s F_1^\delta u, \Phi\langle D\rangle^s F_1^\delta u)$.

証明. $h \in S^2$ より 左辺 $\overset{s}{\sim}$ $(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi H\langle D\rangle^s F^\delta u)$ は明らか．補題 5.2.3 より $\{\phi^{-n}, h\} \in S(\langle\xi\rangle^{1/2}\phi^{-n}b, \bar{g}) + S(\langle\xi\rangle^{1/2}\phi^{-n}b_1, \bar{g})$ であるから系 5.3.3, 5.3.1 を用いて $|(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \mathrm{op}(\{\phi^{-n}, h\})\langle D\rangle^s F^\delta u)|$ は $C\|\Phi u\|_{s+1/2}\tilde{\mathcal{E}}_s(F^\delta u)$ で評価される．従って 左辺 $\overset{s}{\sim}$ $(H\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u, \Phi\langle D\rangle^s F^\delta u)$ を得る．これは補

題 6.2.1 から $\overset{s}{\sim}$ $(H\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\mathrm{op}(m)\langle D\rangle^sF_1^\delta u)$ である．ここで $\mathrm{op}(m)$ を $[A,F^\delta]$ の前まで移動させるときに現れる項はすべて $S(b^2\langle\xi\rangle^{2s-1/2}\phi^{-2n},\bar g)$ または $S(b_1^2\langle\xi\rangle^{2s-1/2}\phi^{-2n},\bar g)$ であるから系 5.3.3 より $C\tilde{\mathcal{E}}^2_{s-1/4}(u)$ で評価される．最後に $(H\varPhi\langle D\rangle^s\mathrm{op}(m)[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u)$ にこれまでと同様の議論を適用して結論が得られる． □

(6.2.17) と合わせてまとめると

補題 6.2.5. 次が成立する．

$$\begin{aligned}\mathsf{Im}(\varPhi\langle D\rangle^s[A^2,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sAF^\delta u)&\overset{s}{\sim}-\partial_t\mathsf{Re}(\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sAF^\delta u)\\&-\mathsf{Im}(\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sF^\delta\hat P_\theta u)+\|\varPhi\langle D\rangle^sAF_1^\delta u\|^2\\&+\mathsf{Re}\,(H\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u,\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u).\end{aligned}$$

さて κ を定義 6.2.1 の正数とする．補題 6.2.2 より

$$\begin{aligned}&\big|(\varPhi\langle D\rangle^s[F^\delta,H]u,\varPhi A\langle D\rangle^sF^\delta u)\big|\\&\overset{s}{\lesssim}\kappa\|\varPhi\langle D\rangle^sAF_1^\delta u\|^2+4^{-1}\kappa^{-1}\|\mathrm{op}(\{h,f\}/\partial_tf)\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u\|^2\end{aligned}$$

と評価され，さらに $(\{h,f\}/\partial_tf)\#(\{h,f\}/\partial_tf)-(\{h,f\}/\partial_tf)^2\in S^0$ ゆえ右辺第 2 項は $\overset{s}{\lesssim}$ $4^{-1}\kappa^{-1}(\mathrm{op}((\{h,f\}/\partial_tf)^2)\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u,\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u)$ と評価される．(6.2.13) より $h-4^{-1}\kappa^{-1}(\{h,f\}/\partial_tf)^2\geq 0$ なので系 5.2.1 を適用すると

$$4^{-1}\kappa^{-1}\|\mathrm{op}(\{h,f\}/\partial_tf)\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u\|^2\overset{s}{\lesssim}\mathsf{Re}\,(H\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u,\varPhi\langle D\rangle^sF_1^\delta u)$$

が従う．よって補題 6.2.5 より $\mathsf{Im}(\varPhi\langle D\rangle^s[F^\delta,\hat P_\theta]u,\varPhi\langle D\rangle^sAF^\delta u)$ は

$$\begin{aligned}&\overset{s}{\gtrsim}-\partial_t\mathsf{Re}(\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sAF^\delta u)\\&-\mathsf{Im}(\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sF^\delta\hat P_\theta u)+(1-\kappa)\|\varPhi AF_1^\delta u\|_s^2\end{aligned}\tag{6.2.18}$$

と評価される．命題 5.6.1 および (6.2.18) より $c>0$, $C>0$ が存在して

$$\begin{aligned}&2\mathsf{Im}(\varPhi\langle D\rangle^sF^\delta\hat P_\theta u,\varPhi A\langle D\rangle^sF^\delta u)\\&\geq\partial_t\tilde{\mathcal{E}}^2_s(F^\delta u)+c\,\theta\tilde{\mathcal{E}}^2_s(F^\delta u)+c\,\tilde{\mathcal{E}}^2_{\sharp s}(F^\delta u)\\&-2\partial_t\mathsf{Re}(\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sAF^\delta u)\\&-2\mathsf{Im}(\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sF^\delta\hat P_\theta u)-C_\epsilon\big(\tilde{\mathcal{E}}^2_{\sharp(s-1/4)}(u)+\tilde{\mathcal{E}}^2_s(F^\delta u)\big)\\&+(2(1-\kappa)-\epsilon)\|\varPhi AF_1^\delta u\|_s^2\end{aligned}$$

が成立する．したがって $\epsilon>0$ と θ を $\epsilon\leq 2(1-\kappa)$ および $c\theta\geq C_\epsilon$ と選んで

$$\begin{aligned}&C\|\varPhi\langle D\rangle^sF^\delta\hat P_\theta u\|\big(\|\varPhi A\langle D\rangle^sF^\delta u\|+\|\varPhi\langle D\rangle^su\|\big)+C\tilde{\mathcal{E}}^2_{\sharp(s-1/4)}(u)\\&\geq\partial_t\tilde{\mathcal{E}}^2_s(F^\delta u)+c\,\tilde{\mathcal{E}}^2_{\sharp s}(F^\delta u)-2\partial_t\mathsf{Re}(\varPhi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\varPhi\langle D\rangle^sAF^\delta u)\end{aligned}\tag{6.2.19}$$

が成り立つ．いまある l があって $\lim_{t\downarrow\tau}\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{l+1-j}=0$ が成り立つとしよう．このとき $\mathcal{E}_s(u(t))\le C\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{n+s+1-j}$ に注意して $w_\delta=\langle\delta\xi\rangle^{-\ell}$ の ℓ を $\ell\ge n+s-l$ と選べば任意の $\delta>0$ に対して

$$\lim_{t\downarrow\tau}\mathcal{E}_s(F^\delta u(t))=0,\quad \lim_{t\downarrow\tau}(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u(t),\Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u(t))=0$$

が成立する．$|(\Phi\langle D\rangle^s[A,F^\delta]u,\Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u)|\le C\tilde{\mathcal{E}}^2_{s-1/4}(u)$ であるから (6.2.19) の両辺を τ から t $(|t|\le\delta_0)$ まで積分すると

$$\begin{aligned}C\int_\tau^t &\|F^\delta\hat{P}_\theta u(t_1)\|_{n+s}\big(\|\Phi\langle D\rangle^s AF^\delta u(t_1)\|+\|\Phi\langle D\rangle^s u(t_1)\|\big)dt_1\\ &+C\int_\tau^t\tilde{\mathcal{E}}^2_{\sharp(s-1/4)}(u(t_1))dt_1+C\tilde{\mathcal{E}}^2_{s-1/4}(u(t))\\ &\ge\tilde{\mathcal{E}}^2_s(F^\delta u(t))+c\int_\tau^t\tilde{\mathcal{E}}^2_{\sharp s}(F^\delta u(t_1))dt_1\end{aligned}$$

が成立する．ここで u を $e^{-\theta t}u$ $(\theta=\theta_s)$ で置き換えると $\tilde{\mathcal{E}}_s(\cdot)$ を $\mathcal{E}_s(\cdot)$ に $\tilde{\mathcal{E}}_{\sharp s}(\cdot)$ を $\mathcal{E}_{\sharp s}(\cdot)$ に，また $\hat{P}_\theta$ を $\hat{P}$ に置き換えて上の評価が成立する．つぎに

$$\mathcal{N}_s^2(u;t)=\sup_{\tau\le t'\le t}\Big\{\mathcal{E}_s^2(u(t'))+\int_\tau^{t'}\mathcal{E}^2_{\sharp s}(u(t_1))dt_1\Big\}\tag{6.2.20}$$

とおくと $\|\Phi\langle D\rangle^s D_tF^\delta u\|+\|\Phi\langle D\rangle^s u\|\le C\big(\mathcal{E}_s^{1/2}(F^\delta u)+\mathcal{E}^{1/2}_{s-1/4}(u)\big)$ は明らかゆえ

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_s^2(F^\delta u;t)\le C\Big\{&\mathcal{N}^2_{s-1/4}(u;t)+\big(\mathcal{N}_s(F^\delta u;t)+\mathcal{N}_{s-1/4}(u;t)\big)\\ &\times\int_\tau^t\|F^\delta\hat{P}u(t_1)\|_{n+s}dt_1\Big\}\end{aligned}$$

が成り立ちこれから

$$\mathcal{N}_s(F^\delta u;t)\le C\Big(\mathcal{N}_{s-1/4}(u;t)+\int_\tau^t\|F^\delta\hat{P}u(t_1)\|_{n+s}dt_1\Big)$$

が従う．ここで $\delta\downarrow 0$ とすると $F=\mathrm{op}(\bar{f})$ としてつぎの補題を得る．

補題 6.2.6. f は空間的とし $F=\mathrm{op}(\bar{f})$ とする．$u\in\cap_{j=0}^{1}C^j([\tau,\delta_0];H^{l+1-j})$ は $\lim_{t\downarrow\tau}\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j u(t)\|_{l+1-j}=0$ を満たすとする．このとき $\mathcal{N}_{s-1/4}(u;t)<+\infty$, $\tau\le t\le\delta_0$ かつ $F\hat{P}u\in L^1([\tau,\delta_0];H^{n+s})$ ならば $\mathcal{N}_s(Fu;t)<+\infty$, $\tau_1\le t\le\delta_0$ である．また

$$\mathcal{N}_s(Fu;t)\le C\Big(\mathcal{N}_{s-1/4}(u;t)+\int_\tau^t\|F\hat{P}u(t_1)\|_{n+s}dt_1\Big)\tag{6.2.21}$$

が成立する．

$d_\epsilon(x,\xi;w)$, $f_\epsilon(t,x,\xi;w)$ は第 3.2 節で定義したものとする．$\ell\in S(M^{-1}\langle\xi\rangle,G)$ より M, ϵ によらない $C>0$ があって $\{\ell^2,\nu d_\epsilon\}^2\le 4\ell^2\nu^2\{\ell,d_\epsilon\}^2\le C\nu^2\ell^2$ が成立する．また $0\le q\in G(M^{-2}\langle\xi\rangle^2,G)$ であったから Glaeser の不等式より $\{q,\nu d_\epsilon\}^2\le C\nu^2 q$ が成り立つ．よって $\nu_0>0$ が存在して $0<\nu\le\nu_0$ のとき f_ϵ は任意の $\epsilon>0$ に対し空間的である．第 3.2 節と同様に $F_\epsilon=\mathrm{op}(\bar f_\epsilon)$ とおく．

命題 6.2.1. $u\in\cap_{j=0}^1 C^j([\tau,\delta_0];H^{l+1-j})$, $\lim_{t\downarrow\tau}\sum_{j=0}^1\|D_t^j u(t)\|_{l+1-j}=0$ および $\hat Pu\in L^1([\tau,\delta_0];H^{l'})$ がある $l,l'\in\mathbb{R}$ について成立しているとする．いまある $\epsilon_0>0$, $s_0\in\mathbb{R}$ に対して $F_{\epsilon_0}\hat Pu\in L^1([\tau,\delta_0];H^{s_0+n})$ とすると任意の $0<\epsilon<\epsilon_0$ および任意の $s\le s_0-1/4$ に対して $F_\epsilon u\in\cap_{j=0}^1 C^j([\tau,\delta_0];H^{s+1-j})$ であり，さらに

$$\sum_{j=0}^1\|D_t^jF_\epsilon u(t)\|_{s+1-j}\le C\int_\tau^t\|F_{\epsilon_0}\hat Pu\|_{n+s_0}dt_1+C\Big(R_l(u;t)+\int_\tau^t\|\hat Pu\|_{l'}dt_1\Big)$$

が成立する．ここで R_l は

$$R_l(u;t)=\sup_{\tau\le t'\le t}\sum_{j=0}^1\Big(\|D_t^ju(t')\|_{l+1-j}+\int_\tau^{t'}\|D_t^ju(t_1)\|_{l+1-j}dt_1\Big).$$

証明．命題 3.2.1 の証明を繰り返せばよい．まず $\epsilon<\epsilon_j<\epsilon_0$ を単調減少で $j\to\infty$ のとき $\epsilon_j\downarrow\epsilon$ となるように選ぶ．ここでも $F_j=F_{\epsilon_j}$, $f_j=f_{\epsilon_j}$ と書き j に関する帰納法で $l+j/4\le s_0$ なる j に対して

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{l+j/4}(F_ju;t)\le CR_l(u;t)\\&+C\int_\tau^t\big\{\|F_0\hat Pu(t_1)\|_{n+s_0}+\|\hat Pu(t_1)\|_{l'}\big\}dt_1\end{aligned}\tag{6.2.22}$$

が成立することを示す．$g_j\in S^0$ は命題 3.2.1 の証明と同じものとする．命題 3.2.1 の証明と同様にして $\|F_{j+1}\hat P\mathrm{op}(g_j)u\|_{l+n+(j+1)/4}$ は

$$C\big\{\|F_0\hat Pu\|_{l+n+(j+1)/4}+\sum_{j=0}^1\|D_t^ju\|_{l+1-j}+\|\hat Pu\|_{l'}\big\}$$

で評価されるので補題 6.2.6 を $s=l+(j+1)/4\le s_0$, $F=F_{j+1}$, $u=\mathrm{op}(g_j)u$ として適用すると

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}_{l+(j+1)/4}(F_{j+1}\mathrm{op}(g_j)u;t)\le C\mathcal{N}_{l+j/4}(\mathrm{op}(g_j)u;t)\\&+C\int_\tau^t\big\{\|F_0\hat Pu(t_1)\|_{n+s_0}dt_1+\|\hat Pu(t_1)\|_{l'}\big\}dt_1+CR_l(u;t)\end{aligned}\tag{6.2.23}$$

を得る．同様に $\mathcal{N}_{l+j/4}(\mathrm{op}(g_j)u;t)\le C\big\{\mathcal{N}_{l+j/4}(F_ju;t)+R_l(u;t)\big\}$ と評価される．また $\mathcal{N}_{l+(j+1)/4}(F_{j+1}u;t)\le C\big\{\mathcal{N}_{l+(j+1)/4}(F_{j+1}\mathrm{op}(g_j)u;t)+R_l(u;t)\big\}$ も同様である．従っ

て $\mathcal{N}_{l+j/4}(\mathrm{op}(g_j)u;t)$ の評価に帰納法の仮定を使うと (6.2.22) が $l+j/4 \le s_0$ をみたす最大の $j=j_0$ について成立することがわかる．$\epsilon < \epsilon_{j_0}$ より $k \in S^0$ があって $\bar{f}_\epsilon - k\#\bar{f}_{j_0} \in S^{-\infty}$ と書けることに注意して結論を得る． □

命題 6.1.1 の証明： $\nu > 0$, $\epsilon > 0$ を命題 3.2.2 のそれとしその証明を繰り返せばよい．命題 6.2.1 を $u = \hat{G}\mathrm{op}(h_1)f \in \cap_{j=0}^1 C^j([\tau,\delta_0]; H^{l_2-n+1-j})$, $F_{\epsilon_0} = F_{i,2\epsilon}$, $F_\epsilon = F_{i,\epsilon}$, $l = l_2 - n$, $l' = l_2$ として適用すると

$$\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j F_{i,\epsilon}\hat{G}\mathrm{op}(h_1)f\|_{s+1-j} \le C\int_\tau^t \big\{\|F_{i,2\epsilon}\mathrm{op}(h_1)f\|_p + \|\mathrm{op}(h_1)f\|_{l_2}\big\}dt_1 + R_{l_2-n}(\hat{G}\mathrm{op}(h_1)f;t)$$

が任意の $p, s \in \mathbb{R}$, $s \le p - n - 1/4$ について成立する．また (6.1.5) から $R_{l_2-n}(\hat{G}\mathrm{op}(h_1)f;t) \le C\int_\tau^t \|\mathrm{op}(h_1)f\|_{l_2}dt_1$ であるから $s = l_1 - 1$ と選んで

$$\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j F_{i,\epsilon}\hat{G}\mathrm{op}(h_1)f\|_{l_1-j} \le C\int_\tau^t \|f\|_{l_2}dt_1$$

を得る．また命題 3.2.2 の証明と同じく

$$\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j \mathrm{op}(h_2)v\|_{l_1-j} \le C\sum_{j=0}^{1}\sum_i \|D_t^j F_{i,\epsilon}v\|_{l_1-j} + C\sum_{j=0}^{1}\|D_t^j v\|_{l_2-n+1-j}$$

が成立するので $v = \hat{G}\mathrm{op}(h_1)f$ として命題 6.1.1 が証明された． □

初期値問題 (6.1.4) で $\phi_0 = \phi_1 = 0$ のときの解作用素

$$\hat{G}^* : L^1((-\delta_0,\tau) : H^{s+n}) \ni f(t) \mapsto u(t) \in \cap_{j=0}^1 C^j([-\delta_0,\tau]; H^{s+1-j})$$

についても $\hat{G}$ に対する議論を繰り返すことによって $\hat{G}^*$ が有限伝播であることがわかる．したがって P に対する局所解の存在定理の証明と同様にして次が得られる．

定理 6.2.1. $p = 0$ の危点 $(0,0,\tau,\xi)$ はすべて実効的双曲型であるとする．このとき $\delta > 0$, $n > 0$ および $x = 0$ の近傍 Ω が存在し，任意の $|\tau| < \delta$ と任意の $f \in L^1((-\delta,\tau); H^{s+n})$ に対して $(-\delta,\tau)\times\Omega$ で $P^*u = f$ を満たす $u \in \cap_{j=0}^1 C^j([-\delta,\tau]; H^{s+1-j})$ で

$$\sum_{j=0}^{1} \|D_t^j u(t)\|_{s+1-j} \le C_s\int_t^\tau \|f(t')\|_{n+s}dt', \quad -\delta \le t \le \tau$$

を満たすものが存在する．

6.3　解の局所一意性

この節では 2 階の微分作用素

$$P = \mathrm{op}\Big(-\tau^2 + \sum_{j+|\alpha|\le 2, j<2} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha\tau^j\Big) \tag{6.3.24}$$

を考える．ここで $a_{j,\alpha}(t,x)$ は $(t,x)=(0,0)\in\mathbb{R}^{1+d}$ の近傍で C^∞ とする．P の主シンボルは

$$p(t,x,\tau,\xi) = -\tau^2 + \sum_{j+|\alpha|=2, j<2} a_{j,\alpha}(t,x)\xi^\alpha\tau^j$$

である．最初に，p のある危点が実効的双曲型である，という事実は t 座標も含めた一般の局所座標系の変換に不変であることをみておく．そのために t を x_0, τ を ξ_0 と書き $x=(x_0,x_1,\ldots,x_d)=(x_0,x')$, $\xi=(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_d)=(\xi_0,\xi')$ と表すことにする．$y=\kappa(x)$, $\kappa(0)=0$ を局所座標系 x の変換とする．微分作用素 P を座標系 y で考えるとその主シンボル $\tilde{p}(y,\eta)$ は $p(\kappa^{-1}(y), {}^t\kappa'(x)\eta)$ で与えられる．このとき

補題 6.3.1. $(0,\bar{\xi})$ を p の実効的双曲型特性点とすると $(0,\bar{\eta})$, $\bar{\xi}={}^t\kappa'(0)\bar{\eta}$ は $\tilde{p}$ の実効的双曲型特性点である．

証明. $\kappa^{-1}(y)=\lambda(y)$ と書く．$\tilde{p}(\epsilon y,\bar{\eta}+\epsilon\eta)=p(\lambda(\epsilon y), {}^t\kappa'(\lambda(\epsilon y))(\bar{\eta}+\epsilon\eta))$ を考えよう．$\bar{\xi}={}^t\kappa'(0)\bar{\eta}$ より

$${}^t\kappa'(\lambda(\epsilon y))(\bar{\eta}+\epsilon\eta) = \bar{\xi} + \epsilon(Cy + {}^t\kappa'(0)\eta) + O(\epsilon^2) \quad (\epsilon\to 0)$$

である．ここで $C=(c_{ij})$ は $d+1$ 次正方行列で $\kappa(x)=(\kappa_0(x),\kappa_1(x),\ldots,\kappa_d(x))$ とするとき

$$c_{ij} = \sum_{0\le k,\ell\le d} \big(\partial^2\kappa_\ell(0)/\partial x_k\partial x_i\big)\big(\partial\lambda_k(0)/\partial y_j\big)\bar{\eta}_\ell$$

で与えられる．従って Q を p の Hesse 行列から定まる 2 次形式とするとき

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\epsilon y,\bar{\eta}+\epsilon\eta) &= p(\epsilon\lambda'(0)y + O(\epsilon^2), \bar{\xi} + \epsilon(Cy + {}^t\kappa'(0)\eta) + O(\epsilon^2))\\ &= \epsilon^2 Q(\lambda'(0)y, Cy + {}^t\kappa'(0)\eta) + O(\epsilon^3) \quad (\epsilon\to 0)\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $(0,\bar{\eta})$ での $\tilde{p}$ の Hesse 行列を $\tilde{Q}$ とすると

$$\tilde{Q} = {}^tKQK, \quad K = \begin{pmatrix}\lambda'(0) & O\\ C & {}^t\kappa'(0)\end{pmatrix}$$

となる．つぎに $K\sigma\,{}^tK=\sigma$, すなわち ${}^tK$ はシンプレクティック行列であることに注意する．これを確かめるには $\lambda'(0)\kappa'(0)=I$ であるから $C\kappa'(0)$ が対称行列であることをいえ

ばよいがこれは容易である．したがって $\sigma\tilde{Q} = \sigma^t KQK = K^{-1}(\sigma Q)K$ となって $\sigma\tilde{Q}$ と σQ は相似となりその固有値は一致する． □

次に Holmgren 変換と呼ばれるつぎの局所座標系の変換を考えよう．

$$y_0 = x_0 + \epsilon\sum_{j=1}^{d} x_j^2, \quad y_j = x_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, d. \tag{6.3.25}$$

ここで $\epsilon > 0$ は正の小さな定数である．

$$\tilde{p}(y, \eta) = p(y_0 - \epsilon|y'|^2, y', \eta_0, \eta' + 2\epsilon\eta_0 y') \tag{6.3.26}$$

は容易に確かめられる．このとき

補題 6.3.2. Ω を $\mathbb{R}^{1+d}$ の原点の近傍とし，特性方程式 $p(x, \xi_0, \xi') = 0$ の ξ_0 に関する根は任意の $x \in \Omega$, 任意の $\xi' \in \mathbb{R}^d$ に対して実であるとする．このとき $r > 0$ と $\epsilon_0 > 0$ が存在して，任意の $|\epsilon| \le \epsilon_0$ について $\tilde{p}(y, \eta_0, \eta') = 0$ の η_0 に関する根は任意の $|y| \le r$, 任意の $\eta' \in \mathbb{R}^d$ に対して実である．

証明. $r > 0$ を $\{|y| \le r\}$ が変換 (6.3.25) による Ω の像に含まれるように 1 つ選ぶ．$q(s, \tau, \eta', y, \epsilon) = p(y_0 - \epsilon|y'|^2, y', \tau + s, \eta' + 2\epsilon s y')$ とおく．q は s の高々 2 次の多項式で s^2 の係数を $a(y, \epsilon)$ とすると $a(y, 0) = -1$ であるから $\epsilon_0 > 0$ が存在して $|\epsilon| \le \epsilon_0$, $|y| \le r$ なら $1/2 \le |a(y, \epsilon)| \le 3/2$ としてよい．故にこのとき $q(s, \tau, \eta', y, \epsilon) = 0$ の s に関する根は $(\tau, \eta', y, \epsilon) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^d \times \{|y| \le r\} \times \{|\epsilon| \le \epsilon_0\} = \mathcal{U}$ に関して連続である．次に $\mathsf{Im}\tau \le 0$, $\mathsf{Im}s < 0$, $(\tau, \eta', y, \epsilon) \in \mathcal{U}$ のとき $q \ne 0$ を示そう．そうでないとすると $\mathsf{Im}\hat{\tau} \le 0$, $\mathsf{Im}\hat{s} < 0$ で $q(\hat{s}, \hat{\tau}, \hat{\eta}', \hat{y}, \hat{\epsilon}) = 0$ となる $(\hat{\tau}, \hat{\eta}', \hat{y}, \hat{\epsilon}) \in \mathcal{U}$ が存在する．s に関する根は $(\tau, \eta', y, \epsilon)$ に関して連続であったから必要なら $\hat{\tau}$ を少し動かして $\mathsf{Im}\hat{\tau} < 0$ と仮定できる．

$$F(\theta) = \min_{q(s, \hat{\tau}, \theta\hat{\eta}', \theta\hat{y}, \theta\hat{\epsilon}) = 0} \mathsf{Im}\, s, \quad 0 \le \theta \le 1$$

とおこう．$(\hat{\tau}, \hat{\eta}', \hat{y}, \hat{\epsilon})$ の選び方から $F(1) < 0$ である．一方 $q(s, \hat{\tau}, 0, 0, 0) = -(s + \hat{\tau})^2 = 0$ より $\mathsf{Im}s = -\mathsf{Im}\hat{\tau} > 0$ なので $F(0) > 0$ である．$F(\theta)$ は θ に関して連続であるから $0 < \hat{\theta} < 1$ があって $F(\hat{\theta}) = 0$ となり $q(s, \hat{\tau}, \hat{\theta}\hat{\eta}', \hat{\theta}\hat{y}, \hat{\theta}\hat{\epsilon}) = 0$ となる実の s が存在する．一方 $\mathsf{Im}\hat{\tau} < 0$ であったから p の特性根が実であることに反する．同じ議論を繰り返すと $\mathsf{Im}\tau \ge 0$, $\mathsf{Im}s > 0$, $(\tau, \eta', y, \epsilon) \in \mathcal{U}$ のとき $q \ne 0$ が従う．以上のことから $\tau = 0$ と選ぶと $|y| \le r$, $|\epsilon| \le \epsilon_0$ のとき

$$\tilde{p}(y, s, \eta') = q(s, 0, \eta', y', \epsilon) = 0 \Longrightarrow \mathsf{Im}s = 0$$

となり主張が示された． □

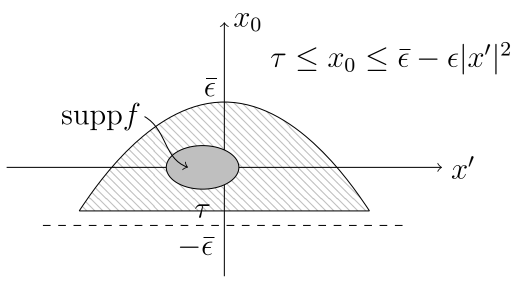
補題 6.3.3. $\mathbb{R}^{1+d}$ の原点の近傍 Ω と正数 $\bar{\epsilon}>0$, $\epsilon>0$ を適当に選ぶと $\mathrm{supp}f\subset\{x;x_0\le\bar{\epsilon}-\epsilon|x'|^2\}$ を満たす任意の $f(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $\mathrm{supp}\,v\subset\{x;x_0\le\bar{\epsilon}-\epsilon|x'|^2\}$ で Ω で $P^*v=f$ を満たす $v(x)\in C^2(\Omega)$ が存在する.

証明. 局所座標系の変換 (6.3.25) を行い $g(y)=f(x)$ と表すと $\tilde{\Omega}=\{y;(y_0-\epsilon|y'|^2,y')\in\Omega\}$ とおくとき $g(y)\in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$ で $y_0\ge\bar{\epsilon}$ では $g(y)=0$ である．$P^*=\mathrm{op}(p+\bar{P}_1+\bar{P}_0)$ であるから P^* を局所座標系 y で表すと $P^*=\mathrm{op}(\tilde{p}+P_1'+P_0'')$ となる．補題 6.3.1 より $\tilde{p}(0,\eta)=0$ の危点はすべて実効的双曲型であり，補題 6.3.2 より ϵ を小さく選べば $\tilde{p}=0$ の特性根はすべて実である．したがって Ω を十分小さく選べば $\tilde{\Omega}$ も十分小さくよって定理 6.2.1 を適用できる．$\bar{\epsilon}>0$ を $\{x;-\bar{\epsilon}\le x_0\le\bar{\epsilon}-\epsilon|x'|^2\}\Subset\Omega$ となるように選んでおく．定理 6.2.1 より $P^*w=g$ を満たす $w(y)\in C^2(\tilde{\Omega})$ で $y_0\ge\bar{\epsilon}$ では $w=0$ となるものが存在するが $v(x)=w(y)$ と局所座標系 x で表すと $P^*v=f$ で v の support が $\{x;x_0\le\bar{\epsilon}-\epsilon|x'|^2\}$ に含まれるのは明らかである．□

最後に初期値問題の解の局所一意性を示そう．今 $u(x)$ は原点の近傍 Ω で C^2 級で $\Omega\cap\{x_0>\tau\}$ で $Pu=0$ を，$\Omega\cap\{x_0=\tau\}$ で $D_0^ju(\tau,x')=0$, $j=0,1$ を満たすとする $(|\tau|\le\bar{\epsilon})$．ここで $\mathrm{supp}f\subset\{x;x_0\le\bar{\epsilon}-\epsilon|x'|^2\}$ をみたす $f\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して補題 6.3.3 の $v(x)$ をとってくると

$$0=\int_\tau^{\bar{\epsilon}}\int_{\mathbb{R}^d}Pu\cdot vdx_0dx'=\int_\tau^{\bar{\epsilon}}\int_{\mathbb{R}^d}u\cdot P^*vdx_0dx'=\int_\tau^{\bar{\epsilon}}\int_{\mathbb{R}^d}u\cdot fdx_0dx'$$

が成立する．この f は任意に選べるので $\{x;\tau<x_0<\bar{\epsilon}-\epsilon|x'|^2\}$ で $u=0$ が従う．



記号を $x_0=t$, $(x_0,x')=(t,x)$ に戻して定理として述べておくと

定理 6.3.1. $p=0$ の危点 $(0,0,\tau,\xi)$ はすべて実効的双曲型であるとする．このとき原点の近傍 ω と正数 $\epsilon>0$ が存在し，$|\tau|\le\epsilon$ とするとき $u\in C^2(\omega)$ が

$$\begin{cases}Pu=0, & \omega\cap\{t>\tau\},\\ D_t^ju(\tau,x)=0, \quad j=0,1, & x\in\omega\cap\{t=\tau\}\end{cases}$$

を満たすなら $\omega\cap\{t>\tau\}$ で $u=0$ である．

第 7 章

擬微分作用素

本書で用いた擬微分作用素の合成則，L^2 有界性定理および可逆性に関する結果を証明する．この章では $\mathbb{R}^d$ の代わりに $\mathbb{R}^n$ で考える．

7.1 Metric と weight

本書では Beals-Fefferman metric と呼ばれる

$$g_{(x,\xi)}(y,\eta) = |y|^2/\phi(x,\xi)^2 + |\eta|^2/\psi(x,\xi)^2 \tag{7.1.1}$$

の形をした $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の metric を用いる．ここで $\phi(x,\xi)$, $\psi(x,\xi)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ 上の正値関数で正のパラメーター γ, M を含む．記述を簡単にするためにパラメーターを省略して書き，また $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ の点を $z = (x,\xi)$, $w = (y,\eta)$ などとも表すことにする．以後，定数と言えば「すべてのパラメーターによらない定数」という意味であるが「パラメーターによらない」という文言は省略する．第 5 章と同様に定数 $C > 0$ が存在して $A \le B$ のとき $A \lesssim B$ と書き $A_1 \lesssim A_2$ かつ $A_2 \lesssim A_1$ のとき $A_1 \approx A_2$ と書くことにする．つぎに Weyl-Hörmander calculus で用いる metric や weight についていくつかの要請を Hörmander [7] にしたがって定義の形で述べる．

定義 7.1.1. 正数 c, C が存在して

$$g_z(w-z) \le c \Longrightarrow g_z(t)/C \le g_w(t) \le C g_z(t), \quad t, z, w \in \mathbb{R}^{2n} \tag{7.1.2}$$

が成立するとき g は slowly varying という．

$g = \phi^{-2}(z)|y|^2 + \psi^{-2}(z)|\eta|^2$ が slowly varying であるためには $c > 0$, $C > 0$ が存在して $g_z(w-z) < c$ のとき

$$1/C \le \phi(z)/\phi(w),\ \psi(z)/\psi(w) \le C \tag{7.1.3}$$

が成立することである．これは g の局所的性質を制限するものであり，大域的な振る舞いを制限するために第 4.1 節で用いた $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック形式 σ に関する g_z の双対 metric

$$g_z^\sigma(w) = \sup_{0\neq v\in\mathbb{R}^{2n}} \big|\sigma(w,v)\big|^2/g_z(v), \quad z,w\in\mathbb{R}^{2n}$$

を考える．(7.1.1) の g については

$$\begin{aligned} g_z^\sigma(y,\eta) &= \sup_{0\neq(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\langle\eta,t_1\rangle - \langle y,t_2\rangle|^2}{\phi^{-2}(z)|t_1|^2+\psi^{-2}(z)|t_2|^2} \\ &= \sup_{0\neq(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\langle\eta,\phi(z)s_1\rangle - \langle y,\psi(z)s_2\rangle|^2}{|s_1|^2+|s_2|^2} = \psi(z)^2|y|^2+\phi^2(z)|\eta|^2 \end{aligned}$$

となり次が従う．

$$g_z^\sigma(w) = \psi(z)^2\phi(z)^2 g_z(w), \quad g_z/g_z^\sigma = \psi^{-2}(z)\phi^{-2}(z). \tag{7.1.4}$$

定義 7.1.2. g が slowly varying でさらに適当な定数 $C>0, N>0$ について

$$g_z^\sigma(v) \leq C g_w^\sigma(v)(1+g_w^\sigma(w-z))^N, \quad z,w,v\in\mathbb{R}^{2n} \tag{7.1.5}$$

を満たすとき g を σ temperate であるという．

g_z^σ の定義から (7.1.5) は次と同値である．

$$g_w(v) \leq C g_z(v)(1+g_w^\sigma(w-z))^N, \quad z,w,v\in\mathbb{R}^{2n}. \tag{7.1.6}$$

(7.1.1) の g が (7.1.5) を満たすための条件は $C>0$, $N>0$ が存在して

$$\phi(z)/\phi(w)+\psi(z)/\psi(w) \leq C(1+g_w^\sigma(z-w))^N \tag{7.1.7}$$

の成り立つことである．(7.1.5) で $v=w-z$ とすると

$$g_z^\sigma(w-z) \leq C(1+g_w^\sigma(w-z))^{N+1}, \quad z,w\in\mathbb{R}^{2n} \tag{7.1.8}$$

が成り立つがこれは z,w に関して対称である．

定義 7.1.3. g が σ temperate で $g_z\leq g_z^\sigma$ を満たすとき g を admissible metric と呼ぶ.

定義 7.1.4. g を σ temperate な metric とし m を $\mathbb{R}^{2n}$ 上の正値関数とする．正数 c, C が存在して

$$g_z(w-z) < c \Longrightarrow m(z)/C \leq m(w) \leq Cm(z), \tag{7.1.9}$$

$$m(w) \leq Cm(z)\big(1+g_w^\sigma(w-z)\big)^N, \quad w,z\in\mathbb{R}^{2n} \tag{7.1.10}$$

が成り立つとき m を σ,g temperate という．

(7.1.10) は (7.1.8) より $C' > 0, N' > 0$ が存在して

$$m(w) \le C' m(z)\big(1 + g_z^\sigma(w-z)\big)^{N'}, \quad w, z \in \mathbb{R}^{2n}$$

の成立することと同値である．Weyl-Hörmander calculus では σ, g temperate な正値関数 m を weight として扱うが本書ではこれよりも強い条件を課したものを weight として採用する．

定義 7.1.5. g は admissible metric で m は正値関数とする．適当な $C > 0$, $N > 0$ があって

$$m(w) \le C m(z)\big(1 + \max\{g_w(w-z), g_z(w-z)\}\big)^N, \quad w, z \in \mathbb{R}^{2n} \tag{7.1.11}$$

が成立するとき m を g admissible weight と呼ぶ.

定義から明らかなように $m > 0$ が g admissible weight なら m は任意の admissible metric $\tilde{g} \ge g$ に対し $\tilde{g}$ admissible weight である.

補題 7.1.1. g を admissible metric, m を g admissible weight とする．このとき m は σ, g temperate である.

証明. $g_z(w-z) < c$ なら (7.1.2) と (7.1.11) より $m(w) \le C'(1 + cC)m(z)$ が成り立つ．また $\max\{g_w(w-z), g_z(w-z)\}$ は w, z に関して対称であるから (7.1.9) が従う．$\max\{g_w(w-z), g_z(w-z)\} \le \max\{g_w^\sigma(w-z), g_z^\sigma(w-z)\}$ は $g_z \le g_z^\sigma$ より明らかであるから (7.1.8) を考慮すれば (7.1.10) が得られる. □

補題 7.1.2. $m > 0$ を g admissible weight とすると任意の $s \in \mathbb{R}$ について m^s も g admissible weight である．m_i $(i = 1, 2)$ が g admissible weight なら $m_1 m_2$ も g admissible weight である.

証明. 定義から容易にわかるように正値関数 m が g admissible weight なら $m^{-1} = 1/m$ も g admissible weight である．これより m^s は g admissible weight が従う．積の場合も明らか. □

本書では $0 < \delta < 1$, $c > 0$ が存在して ϕ, ψ が

$$\langle\xi\rangle_\gamma^{-\delta} \lesssim \phi \lesssim 1, \quad \psi \lesssim \langle\xi\rangle_\gamma, \tag{7.1.12}$$

$$|\xi - \eta|/\langle\xi\rangle_\gamma < c \Longrightarrow \phi(z) \approx \phi(w), \ \ \psi(z) \approx \psi(w) \tag{7.1.13}$$

を満たすような admissible metric $g = \phi^{-2}(z)|y|^2 + \psi^{-2}(z)|\eta|^2$ を考える．また考察の便宜上次の metric も考える.

$$\underline{g}(y, \eta) = |y|^2 + \langle\xi\rangle_\gamma^{-2}|\eta|^2, \quad \gamma \ge 1. \tag{7.1.14}$$

補題 7.1.3. metric $\underline{g}$, g_ϵ, $\bar{g}$ は (7.1.12) と (7.1.13) を満たす admissible metric である．また $\langle\xi\rangle_\gamma^s$ は任意の $s\in\mathbb{R}$ について $\underline{g}$, g_ϵ, $\bar{g}$ admissible weight である．

証明. (7.1.12) は明らかに $\delta=1/2$ として成立する．次に $|\xi-\eta|<c\langle\xi\rangle_\gamma$ のとき $\langle\eta\rangle_\gamma\ge(\gamma+|\eta|)/\sqrt{2}\ge(\gamma+|\xi|-|\xi-\eta|)/\sqrt{2}\ge(1-c)\langle\xi\rangle_\gamma/\sqrt{2}$ および $\langle\eta\rangle_\gamma\le(\gamma+|\eta|)\le(\gamma+|\xi|+|\xi-\eta|)\le\sqrt{2}(1+c)\langle\xi\rangle_\gamma$ が成り立つので

$$|\xi-\eta|<c\langle\xi\rangle_\gamma\Longrightarrow(1-c)\langle\xi\rangle_\gamma/\sqrt{2}\le\langle\eta\rangle_\gamma\le\sqrt{2}(1+c)\langle\xi\rangle_\gamma \tag{7.1.15}$$

を得る．これより (7.1.13) は明らか．いま g を $\underline{g}$, g_ϵ, $\bar{g}$ のいずれかとする．$g_z(z-w)<c^2$ とすると $|\xi-\eta|<c\psi(z)\le c\langle\xi\rangle_\gamma$ であるから (7.1.13), (7.1.3) より g は slowly varying である．次に $\langle\eta\rangle_\gamma\le\langle\xi\rangle_\gamma/2\sqrt{2}$ なら $|\xi-\eta|\ge(\gamma+|\xi|)-(\gamma+|\eta|)\ge\langle\xi\rangle_\gamma-\sqrt{2}\langle\eta\rangle_\gamma\ge\langle\xi\rangle_\gamma/2$ ゆえ $c>0$ があって $|\xi-\eta|\ge c\langle\xi\rangle_\gamma^{1-\delta}\langle\eta\rangle_\gamma^{\delta}$，他方 $\langle\eta\rangle_\gamma\ge2\sqrt{2}\langle\xi\rangle_\gamma$ なら $|\xi-\eta|\ge\langle\eta\rangle_\gamma/2$ より $|\xi-\eta|\ge c\langle\eta\rangle_\gamma^{1-\delta}\langle\eta\rangle_\gamma^{\delta}$ に注意する．これらより C が存在して

$$\langle\xi\rangle_\gamma/\langle\eta\rangle_\gamma+\langle\eta\rangle_\gamma/\langle\xi\rangle_\gamma\le C\big(1+\langle\eta\rangle_\gamma^{-\delta}|\xi-\eta|\big)^{1/(1-\delta)},\quad \xi,\eta\in\mathbb{R}^n \tag{7.1.16}$$

が成立する．$g_w^\sigma(z-w)\ge\phi^2(w)|\xi-\eta|^2\ge\langle\eta\rangle_\gamma^{-2\delta}|\xi-\eta|^2/C$ であるから (7.1.7) より g は σ temperate である．一方 $\phi\psi\ge1$ は明らかであるから $g_z\le g_z^\sigma$ は (7.1.4) から従う．

次の主張は $\underline{g}\le g_\epsilon\le\bar{g}$ より $\langle\xi\rangle_\gamma$ が $\underline{g}$ admissible weight であることを確かめればよいが有限増分の定理より

$$|\langle\xi+\eta\rangle_\gamma-\langle\xi\rangle_\gamma|\le C|\eta|\le C\langle\xi\rangle_\gamma(\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|\eta|)\le C\langle\xi\rangle_\gamma\underline{g}_z^{1/2}(w) \tag{7.1.17}$$

ゆえ $\langle\xi+\eta\rangle_\gamma\le C\langle\xi\rangle_\gamma(1+\underline{g}_z(w))^{1/2}$ が成り立つので明らかである． □

7.2　シンボルクラスと擬微分作用素

定義 7.2.1. $g_z(w)=\phi^{-2}(z)|y|^2+\psi^{-2}(z)|\eta|^2$ を admissible metric, $m(z)$ を正値関数とする．任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $C_k>0$ が存在して

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^{2n},|\alpha+\beta|\le k}\big|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(z)\big|\phi^{|\beta|}(z)\psi^{|\alpha|}(z)/m(z)\le C_k \tag{7.2.18}$$

を満たす $a\in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ の全体を $S(m,g)$ で表す．左辺を $|a|_{S(m,g)}^{(k)}$ とおくとこれは $S(m,g)$ にセミノルムを定義する．$z=(x,\xi)$, $\mu=(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}$ と書くと (7.2.18) はつぎのように書いてもよい．

$$\sup_{|\mu|\le k}\big|\partial_z^\mu a(z)\big|\le C_k m(z)\prod_i g_z^{1/2}(t_i),\quad \partial_z^\mu=\prod_i\partial_z^{t_i},\ |t_i|=1,\ t_i\in\mathbb{N}^{2n}.$$

補題 7.2.1. $a_i \in S(m_i, g)$, $i=1,2$ なら $a_1a_2 \in S(m_1m_2, g)$ である．また $a \in S(m,g)$ かつ $1/|a| < C/m$ ならば $1/a \in S(1/m, g)$ である．

証明. 証明には Leibniz の公式を適用すればよい．2 番目の主張は $b = 1/a$ として $ba = 1$ に Leibniz の公式を適用し帰納法を用いれば容易に示される． □

シンボル $a(x,\xi) \in S(m,g)$ が与えられたとき，それを擬微分作用素として実現する（量子化ともいう）にはいくつかの方法がある．

定義 7.2.2. g は (7.1.12), (7.1.13) を満たす admissible metric で，m は g admissible weight とする．$a \in S(m,g)$ に対して $0 \le t \le 1$ として振動積分

$$\begin{aligned}\mathrm{op}^t(a)u(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\xi}a((1-t)x+ty,\xi)u(y)dyd\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{-iy\xi}a(x+ty,\xi)u(x+y)dyd\xi, \quad u \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

で擬微分作用素 $\mathrm{op}^t(a)$ を定義する．この $\mathrm{op}^t(a)$ をシンボル $a(x,\xi)$ の t-量子化という．特に $t = 1/2$ のときは $\mathrm{op}^{1/2}(a)$ を a の Weyl 量子化といい，1/2 を略して単に $\mathrm{op}(a)$ とかく．

g が (7.1.12), (7.1.13) を満たす admissible metric で m が g admissible weight なら $a \in S(m,g)$ は適当な $m_i \in \mathbb{R}$ について (2.1.1) を満たすことが容易に確かめられる．本書では特に断らなければ常に Weyl 量子化を使う．$a(x,\xi) = a(x)$ ならば

$$\mathrm{op}(a)u(x) = a(x)u(x) \tag{7.2.19}$$

である．実際 (2.1.3) より $(2\pi)^{-n}\int e^{-iy\xi}d\xi = \delta(y)$ に注意すると

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\xi}a\Big(\frac{x+y}{2}\Big)u(y)dyd\xi &= (2\pi)^{-n}\int e^{-iy\xi}a\Big(x+\frac{y}{2}\Big)u(x+y)dyd\xi\\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{-iy\xi}d\xi\int a\Big(x+\frac{y}{2}\Big)u(x+y)dy = a(x)u(x)\end{aligned}$$

である．また $a(x,\xi) = a(\xi)$ のときは

$$\mathrm{op}(a)u(x) = a(D)u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}a(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

となる．u, $v \in \mathcal{S}$ に対して半双線形形式 $(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}dx$ を考えると

$$\begin{aligned}\int \big(\mathrm{op}(a)u\big)(x)\overline{v(x)}dx &= \int \overline{v(x)}dx\int e^{i(x-y)\xi}a\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)u(y)dyd\xi\\ &= \int u(y)dy\overline{\int e^{i(y-x)\xi}\bar{a}\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)v(x)dxd\xi}\end{aligned}$$

であるから次のことが従う．

命題 7.2.1. $a \in S(m,g)$ とすると

$$(\mathrm{op}(a)u, v) = (u, \mathrm{op}(\bar{a})v), \quad u, v \in \mathcal{S}$$

が成立する．すなわち $\mathrm{op}(a)^* = \mathrm{op}(\bar{a})$ である．

7.3　擬微分作用素の合成則

この節では g を (7.1.12), (7.1.13) を満たす admissible metric とし, m_i を g admissible weight とするとき $a \in S(m_1, g)$, $b \in S(m_2, g)$ に対して $\mathrm{op}(a)$ と $\mathrm{op}(b)$ の合成則 (定理 7.3.1, 系 7.3.1) を証明する．まず $a(x,\xi)$, $b(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ として $\mathrm{op}(a)\mathrm{op}(b) = \mathrm{op}(c)$ となる $c(x,\xi)$ を求める．$\mathrm{op}(a)\mathrm{op}(b) = \mathrm{op}(c)$ より

$$(2\pi)^{-2n}\int e^{i(x-y)\eta+i(y-z)\zeta}a((x+y)/2,\eta)b((y+z)/2,\zeta)u(z)dzd\zeta dyd\eta$$

がすべての $u(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ について

$$(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-z)\theta}c((x+z)/2,\theta)u(z)dzd\theta$$

に等しいので $\int e^{i(x-z)\theta}c((x+z)/2,\theta)d\theta$ は

$$(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\eta+i(y-z)\zeta}a((x+y)/2,\eta)b((y+z)/2,\zeta)d\zeta dyd\eta$$

に等しい．$x+z = 2\tilde{x}$, $z-x = 2\tilde{z}$, $y = \tilde{y}$ とおきさらに $\eta+\zeta = 2\tilde{\eta}$, $\eta-\zeta = 2\tilde{\zeta}$ と変数変換すると $\int e^{-2i\tilde{z}\theta}c(\tilde{x},\theta)d\theta$ は

$$\pi^{-n}\int e^{2i(\tilde{x}-\tilde{y})\tilde{\zeta}-2i\tilde{z}\tilde{\eta}}a((\tilde{x}-\tilde{z}+\tilde{y})/2,\tilde{\eta}+\tilde{\zeta})b((\tilde{x}+\tilde{z}+\tilde{y})/2,\tilde{\eta}-\tilde{\zeta})d\tilde{y}d\tilde{\zeta}d\tilde{\eta}$$

に等しい．ところで $\int e^{-2i\tilde{z}\theta}c(\tilde{x},\theta)d\theta$ は $(\mathcal{F}c)(2\tilde{z})$ であるから Fourier の反転公式より

$$\begin{aligned}c(\tilde{x},\theta) = \pi^{-2n}&\int e^{2i(\tilde{x}-\tilde{y})\tilde{\zeta}-2i\tilde{z}(\tilde{\eta}-\theta)}a((\tilde{x}-\tilde{z}+\tilde{y})/2,\tilde{\eta}+\tilde{\zeta})\\ &\times b((\tilde{x}+\tilde{z}+\tilde{y})/2,\tilde{\eta}-\tilde{\zeta})d\tilde{y}d\tilde{\zeta}d\tilde{\eta}d\tilde{z}\end{aligned}$$

が従う．$\tilde{\eta} \to \tilde{\eta}+\theta$, $\tilde{y} \to \tilde{y}+\tilde{x}$ と平行移動すると右辺は

$$\begin{aligned}\pi^{-2n}&\int e^{-2i\tilde{y}\tilde{\zeta}-2i\tilde{z}\tilde{\eta}}a(\tilde{x}+(\tilde{y}-\tilde{z})/2,\tilde{\eta}+\tilde{\zeta}+\theta)\\ &\times b(\tilde{x}+(\tilde{z}+\tilde{y})/2,\tilde{\eta}-\tilde{\zeta}+\theta)d\tilde{y}d\tilde{\zeta}d\tilde{\eta}d\tilde{z}\end{aligned}$$

に等しい．最後に $\tilde{\eta}+\tilde{\zeta}=\eta$, $\tilde{\eta}-\tilde{\zeta}=\zeta$, $\tilde{y}-\tilde{z}=2y$, $\tilde{y}+\tilde{z}=2z$ と変数変換して $\tilde{y}\tilde{\zeta}+\tilde{z}\tilde{\eta}=z\eta-y\zeta$ に注意すると

$$c(\tilde{x},\theta)=\pi^{-2n}\int e^{-2i(z\eta-y\zeta)}a(\tilde{x}+y,\theta+\eta)b(\tilde{x}+z,\theta+\zeta)dyd\zeta d\eta dz$$

を得る．記号を簡単にするため $X=(x,\xi)$, $Y=(y,\eta)$, $Z=(z,\zeta)$ と書くと

$$c(X)=\pi^{-2n}\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}a(X+Y)b(X+Z)dYdZ$$

と書ける．

補題 7.3.1. g は (7.1.12), (7.1.13) を満たす admissible metric とする．また m_1, m_2 を g admissible weight とし $a\in S(m_1,g)$, $b\in S(m_2,g)$ とする．このとき振動積分で定義される

$$R(X;a,b;\theta)=\pi^{-2n}\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}a(X+\theta Y)b(X+Z)dYdZ \tag{7.3.20}$$

は θ $(|\theta|\le 1)$ に一様に $S(m_1m_2,g)$ に属す．

証明. 証明では $\Theta=(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{2n}$, $\partial_X^\Theta=\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta$ などと書くことにする．

$$G(X)=\begin{pmatrix}\phi(X)I & O\\ O & \psi(X)I\end{pmatrix},\quad I \text{ は } n \text{ 次単位行列}$$

とおくと $g_X(t)=\langle G^{-1}(X)t,G^{-1}(X)t\rangle$ および $g_X^\sigma(t)=\langle G(X)\sigma t,G(X)\sigma t\rangle$, $t\in\mathbb{R}^{2n}$ と表せる．$\chi(s)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を $0\le\chi(s)\le 1$ で $|s|\le 1/2$ で 1, $|s|\ge 2$ で 0 とし次のようにおく．

$$\chi(\xi,\eta)=\chi(\langle\eta\rangle/c\langle\xi\rangle_\gamma),\quad \chi^c(\xi,\eta)=1-\chi(\xi,\eta).$$

補題 7.3.2. $|\alpha+\beta|\ge 1$ のとき

$$\left|\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\chi(\xi,\eta)\right|,\quad \left|\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\chi^c(\xi,\eta)\right|\lesssim\psi(X)^{-|\alpha+\beta|}.$$

証明. まず

$$\begin{aligned}\left|\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\chi(\xi,\eta)\right|&\lesssim\sum\left|\chi^{(k)}(\langle\eta\rangle/c\langle\xi\rangle_\gamma)\partial_\xi^{\alpha^1}\partial_\eta^{\beta^1}(\langle\eta\rangle/c\langle\xi\rangle_\gamma)\cdots\partial_\xi^{\alpha^k}\partial_\eta^{\beta^k}(\langle\eta\rangle/c\langle\xi\rangle_\gamma)\right|\\&\lesssim\sum\left|\chi^{(k)}(\langle\eta\rangle/c\langle\xi\rangle_\gamma)\right|(\langle\eta\rangle/c\langle\xi\rangle_\gamma)^k\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\alpha|}\langle\eta\rangle^{-|\beta|}\lesssim\langle\xi\rangle_\gamma^{-|\alpha|}\langle\eta\rangle^{-|\beta|}\end{aligned}$$

に注意する．$\chi^{(k)}(\langle\eta\rangle/c\langle\xi\rangle_\gamma)\neq 0$, $k\ge 1$ なら $\langle\eta\rangle\approx\langle\xi\rangle_\gamma$ であるから (7.1.12) に注意すればよい． □

次に (7.3.20) を考える．積分の前の π^{-2n} は評価には関係ないので

$$R(X;a,b;\theta)=\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}a(X+\theta Y)b(X+Z)dYdZ \tag{7.3.21}$$

とおく．$1=\chi(\xi,\eta)+\chi(\xi,\zeta)\chi^c(\xi,\eta)+\chi^c(\xi,\eta)\chi^c(\xi,\zeta)$ と書いて

$$\begin{aligned}R(X;a,b;\theta)&=\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}a(X+\theta Y)b(X+Z)\chi(\xi,\eta)dYdZ\\&+\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}a(X+\theta Y)b(X+Z)\chi(\xi,\zeta)\chi^c(\xi,\eta)dYdZ\\&+\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}a(X+\theta Y)b(X+Z)\chi^c(\xi,\eta)\chi^c(\xi,\zeta)dYdZ=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}\end{aligned}$$

とおく．ここで $\sigma(Y,Z)=\langle\sigma Y,Z\rangle$ であった．つぎに

$$\begin{aligned}L&=1+4^{-1}g_X^\sigma(\sigma D_Y),\quad \Phi=1+g_X^\sigma(Z),\\ M&=1+4^{-1}g_X(\sigma D_Z),\quad \Psi=1+g_X(Y)\end{aligned} \tag{7.3.22}$$

とおくと $\Phi^{-N}L^Ne^{-2i\sigma(Y,Z)}=e^{-2i\sigma(Y,Z)}$ と $\Psi^{-\ell}M^\ell e^{-2i\sigma(Y,Z)}=e^{-2i\sigma(Y,Z)}$ は明らかである．したがって $\partial_X^\Theta\mathrm{I}$ を評価するには部分積分を行なって次を評価すればよい．

$$\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}\Phi^{-N}L^N\Psi^{-\ell}M^\ell\big(\partial_X^{\Theta_1}a(X+\theta Y)\partial_X^{\Theta_2}b(X+Z)\partial_X^{\Theta_3}\chi(\xi,\eta)\big)dYdZ. \tag{7.3.23}$$

ここで $\Sigma_i\Theta_i=\Theta$ である．$g_X^\sigma(\sigma D_Y)=\langle G(X)D_Y,G(X)D_Y\rangle$ であるから $G(X)D_Y$ を考えると任意の $\tilde\Theta$ に対し $\big|(G(X)D_Y)^{\tilde\Theta}\Psi^{-\ell}\big|\lesssim\Psi^{-\ell}$ は容易である．$\chi(\xi,\eta)\neq 0$ なら (7.1.13) より $|\theta|\le 1$ に一様に $g_X\approx g_{X+\theta Y}$ であり m_1 は g admissible weight より $m_1(X+\theta Y)\lesssim m_1(X)(1+g_X(Y))^{N_1}$ であるから，これらより $\chi(\xi,\eta)\neq 0$ のとき

$$\big|(G(X)D_Y)^{\tilde\Theta}\partial_X^{\Theta_1}a(X+\theta Y)\big|\lesssim m_1(X)(1+g_X(Y))^{N_1}\Pi g_X^{1/2}(t_i)$$

が得られる．ここで $\partial_X^{\Theta_1}=\Pi\partial_X^{t_i}$, $|t_i|=1$, $t_i\in\mathbb{N}^{2n}$．また補題 7.3.2 より

$$\big|(G(X)D_Y)^{\tilde\Theta}\partial_X^{\Theta_3}\chi(\xi,\eta)\big|\lesssim\Pi g_X^{1/2}(t_k),\quad \partial_X^{\Theta_3}=\Pi\partial_X^{t_k},\ \ |t_k|=1$$

も明らかである．次に $g_X(\sigma D_Z)=\langle G^{-1}(X)\sigma D_Z,G^{-1}(X)\sigma D_Z\rangle$ に注意して $G^{-1}(X)\sigma D_Z$ を考える．任意の $\tilde\Theta$ に対して

$$\begin{aligned}\big|(G^{-1}(X)\sigma D_Z)^{\tilde\Theta}\partial_X^{\Theta_2}b(X+Z)\big|&\lesssim m_2(X+Z)\big\{\Pi_j g_{X+Z}^{1/2}(t_j)\big\}\\&\times\big(1+\phi^{-1}(X)\psi^{-1}(X+Z)+\psi^{-1}(X)\phi^{-1}(X+Z)\big)^{|\tilde\Theta|}\\&\lesssim m_2(X+Z)\big\{\Pi g_{X+Z}^{1/2}(t_j)\big\}\big(1+\psi(X)/\psi(X+Z)+\phi(X)/\phi(X+Z)\big)^{|\tilde\Theta|}\end{aligned}$$

が従う．ここで $\phi^{-1}(X)\psi^{-1}(X) = (\sup g_X/g_X^\sigma)^{1/2} \le 1$ を使った．また $\partial_X^{\Theta_2} = \Pi\partial_X^{t_j}$, $|t_j| = 1$ である．m_2 は g admissible weight であるから σ, g temperate ゆえ $m_2(X+Z) \lesssim m_2(X)(1+g_{X+Z}^\sigma(Z))^{N_2} \lesssim m_2(X)(1+g_X^\sigma(Z))^{N_2'}$ が成り立つ．同様に g は σ temperate ゆえ

$$g_{X+Z}(t_j) \lesssim g_X(t_j)(1+g_{X+Z}^\sigma(Z))^{N_3} \lesssim g_X(t_j)(1+g_X^\sigma(Z))^{N_3'} \tag{7.3.24}$$

を得る．また (7.1.7) より

$$\psi(X)/\psi(X+Z) + \phi(X)/\phi(X+Z) \lesssim (1+g_{X+Z}^\sigma(Z))^{N_4} \lesssim (1+g_X^\sigma(Z))^{N_4'}$$

が成立する．以上から

$$|(G^{-1}(X)\sigma D_Z)^{\tilde\Theta}\partial_X^{\Theta_2} b(X+Z)| \lesssim m_2(X)(1+g_X^\sigma(Z))^{N_5}\Pi g_X^{1/2}(t_j)$$

と評価される．ここで N_5 は $|\tilde\Theta| \le \ell$ にも依っている．したがって

$$\begin{aligned}\big|(7.3.23)\text{ の被積分項 }\big| &\lesssim (1+g_X^\sigma(Z))^{-N+N_6(\Theta,\ell)}(1+g_X(Y))^{-\ell+N_1}\\ &\quad\times(m_1m_2)(X)\big\{\prod_i g_X^{1/2}(t_i)\prod_j g_X^{1/2}(t_j)\prod_k g_X^{1/2}(t_k)\big\}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで ℓ を $\ell - N_1 \ge n+1$, N を $N - N_6(\Theta,\ell) \ge n+1$ に選び

$$\int (1+g_X^\sigma(Z))^{-n-1}(1+g_X(Y))^{-n-1}dYdZ < +\infty \quad (X\text{ によらない})$$

に注意すると

$$\big|\partial_X^\Theta \mathrm{I}\big| \lesssim (m_1m_2)(X)\Pi g_X^{1/2}(t_j) \tag{7.3.25}$$

と評価される．ここでも前と同様に $\partial_X^\Theta = \Pi\partial_X^{t_j}$, $|t_j| = 1$ である．補題 7.3.2 と $\phi^{-1}(X)\psi^{-1}(X) \le 1$ から $|(G^{-1}(X)\sigma D_Y)^{\tilde\Theta}\chi^c(\xi,\eta)| \lesssim 1$ が任意の $\tilde\Theta$ について成立することに注意して (7.3.22) で Y と Z を入れ替えて同じ議論を繰り返すと $\partial_X^\Theta \mathrm{II}$ についても (7.3.25) と同じ評価を得る．最後に $\partial_X^\Theta \mathrm{III}$ を評価しよう．$\chi^c(\xi,\eta) \ne 0$ なら $c\langle\xi\rangle_\gamma \le 2\langle\eta\rangle$ であるから (7.1.12) より

$$\begin{aligned}g_X^\sigma(Y) &= \psi^2(X)|y|^2 + \phi^2(X)|\eta|^2\\ &\lesssim \langle\xi\rangle_\gamma^2|y|^2 + |\eta|^2 \lesssim \langle\eta\rangle^2|y|^2 + |\eta|^2 \lesssim (1+|Y|^2)^2\end{aligned} \tag{7.3.26}$$

が成り立つ．$\chi^c(\xi,\zeta) \ne 0$ なら同様に $g_X^\sigma(Z) \lesssim (1+|Z|^2)^2$ である．L, M を

$$L = 1+|D_Y|^2,\ \ \Phi = (1+|Z|^2),\quad M = 1+|D_Z|^2,\ \ \Psi = (1+|Y|^2)$$

とすると部分積分を行なって

$$\begin{aligned}\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}\Phi^{-N}L^N\Psi^{-N}M^N\big(\partial_X^{\Theta_1}a(X+\theta Y)\partial_X^{\Theta_2}b(X+Z)\\ \times\partial_X^{\Theta_3}\chi^c(\xi,\eta)\partial_X^{\Theta_4}\chi^c(\xi,\zeta)\big)dYdZ,\quad \Sigma_{i=1}^4\Theta_i = \Theta\end{aligned}$$

を評価することになる．任意の $\tilde{\Theta}$ に対して $|D_Y^{\tilde{\Theta}}\Psi^{-N}| \lesssim \Psi^{-N}$ は明らかである．(7.1.12) より，$\chi^c(\xi,\eta) \neq 0$ のとき $\phi^{-1}(X+\theta Y) \lesssim \langle \xi+\theta\eta\rangle_\gamma^\delta \lesssim \langle\eta\rangle^\delta$ が成り立つので

$$
\begin{aligned}
\bigl|D_Y^{\tilde{\Theta}}\partial_X^{\Theta_1}a(X+\theta Y)\bigr| &\lesssim m_1(X+\theta Y)\bigl\{\Pi g_{X+\theta Y}^{1/2}(t_{i_1})\bigr\}\langle\eta\rangle^{\delta|\tilde{\Theta}|}\\
&\lesssim m_1(X+\theta Y)\bigl\{\Pi g_{X+\theta Y}^{1/2}(t_{i_1})\bigr\}\Psi^{\delta|\tilde{\Theta}|/2}, \quad \partial_X^{\Theta_1} = \Pi\partial_X^{t_{i_1}}
\end{aligned}
$$

が成立する．また $|D_Y^{\tilde{\Theta}}\partial_X^{\Theta_3}\chi^c(\xi,\eta)| \lesssim \Pi g_X^{1/2}(t_{i_3})$, $\partial_X^{\Theta_3} = \Pi\partial_X^{t_{i_3}}$ も補題 7.3.2 から明らかである．$\chi^c(\xi,\zeta) \neq 0$ のときも同様にして

$$
\bigl|D_Z^{\tilde{\Theta}}\partial_X^{\Theta_2}b(X+Z)\bigr| \lesssim m_2(X+Z)\bigl\{\Pi g_{X+Z}^{1/2}(t_{i_2})\bigr\}\Phi^{\delta|\tilde{\Theta}|/2}, \;\; \partial_X^{\Theta_2} = \Pi\partial_X^{t_{i_2}}
$$

および $|D_Z^{\tilde{\Theta}}\partial_X^{\Theta_4}\chi^c(\xi,\zeta)| \lesssim \Pi g_X^{1/2}(t_{i_4})$, $\partial_X^{\Theta_4} = \Pi\partial_X^{t_{i_4}}$ が成り立つ．m_i は g admissible weight で g は σ temperate また $|\theta| \leq 1$ ゆえ (7.3.24) を利用して

$$
\begin{aligned}
\bigl|\text{被積分項}\bigr| &\lesssim (m_1m_2)(X)\bigl\{\Pi g_X^{1/2}(t_{i_1})\Pi g_X^{1/2}(t_{i_2})\Pi g_X^{1/2}(t_{i_3})\Pi g_X^{1/2}(t_{i_4}\bigr\}\\
&\quad\times(1+g_X^\sigma(\theta Y))^{N_1}(1+g_X^\sigma(Z))^{N_2}\Psi^{-N(1-\delta)}\Phi^{-N(1-\delta)}\\
&\lesssim (m_1m_2)(X)\bigl\{\Pi g_X^{1/2}(t_i)\bigr\}\Psi^{-N(1-\delta)+2N_1}\Phi^{-N(1-\delta)+2N_2}, \;\; \partial_X^{\Theta} = \Pi\partial_X^{t_i}
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで (7.3.26) を使った．N_i は Θ にも依存している．$\delta < 1$ なので N を $N(1-\delta)-2N_i > n$ となるように N を選ぶと $\partial_X^{\Theta}\mathrm{III}$ についても (7.3.25) と同じ評価が得られる．以上で $R(X;a,b;\theta) \in S(m_1m_2,g)$ が示された． □

定理 7.3.1. g は (7.1.12), (7.1.13) を満たす admissible metric とする．また m_1, m_2 を g admissible weight とし $a \in S(m_1,g)$, $b \in S(m_2,g)$ とする．このとき振動積分で定義される

$$
c(X) = \pi^{-2n}\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}a(X+Y)b(X+Z)dYdZ \tag{7.3.27}
$$

は $S(m_1m_2,g)$ に属す．この c を $a\#b$ と表すと

$$
\mathrm{op}(a)\mathrm{op}(b)u = \mathrm{op}(a\#b)u, \quad \forall u \in \mathcal{S}
$$

であり任意の $l \in \mathbb{N}$ に対し C, l' が存在して

$$
|a\#b|_{S(m_1m_2,g)}^{(l)} \leq C|a|_{S(m_1,g)}^{(l')}|b|_{S(m_2,g)}^{(l')} \tag{7.3.28}
$$

が成り立つ． さらに $|\alpha+\beta| = l$ のとき g admissible weight $m_{i,\alpha}^\beta$ について $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a \in S(m_{1,\alpha}^\beta,g)$ および $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b \in S(m_{2,\alpha}^\beta,g)$ とすると

$$
a\#b - \sum_{|\alpha+\beta|<l}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!}\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha a\,\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta b \in \sum_{|\alpha+\beta|=l}S\bigl(m_{1,\alpha}^\beta m_{2,\beta}^\alpha,g\bigr).
$$

が成り立つ．特に $l=3$ として次が成立する．

$$a\#b-b\#a+i\{a,b\}\in\sum_{|\alpha+\beta|=3}S\big(m_{1,\alpha}^{\beta}m_{2,\beta}^{\alpha},g\big).$$

証明. まず $a(X+Y)$ をテイラー展開して

$$a(X+Y)=\sum_{|\Theta|<l}\frac{1}{\Theta!}\partial_X^{\Theta}a(X)Y^{\Theta}+r_l(X,Y,\theta)$$

と表す．ここで $r_l(X,Y,\theta)=l\sum_{|\Theta|=l}\frac{1}{\Theta!}\int_0^1(1-\theta)^{l-1}\partial_X^{\Theta}a(X+\theta Y)d\theta Y^{\Theta}$ である．和の部分を (7.3.21) $(\theta=1)$ に代入すると

$$\sum_{|\Theta|<l}\frac{1}{\Theta!}\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}\partial_X^{\Theta}a(X)Y^{\Theta}b(X+Z)dYdZ$$

となる．ここで $Y^{\Theta}e^{-2i\sigma(Y,Z)}=(2i)^{-|\Theta|}\big(\sigma\partial_Z\big)^{\Theta}e^{-2i\sigma(Y,Z)}$ に注意して部分積分を行うと $\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}dY=\pi^{2n}\delta_Z$ より

$$\pi^{2n}\sum_{|\Theta|<l}\frac{(-1)^{|\Theta|}}{(2i)^{|\Theta|}\Theta!}\partial_X^{\Theta}a(X)\big(\sigma\partial_X\big)^{\Theta}b(X)$$

が得られる．r_l についても代入して同じ計算をすると

$$\begin{aligned}\sum_{|\Theta|=l}\frac{l}{\Theta!}\int_0^1(1-\theta)^{l-1}d\theta\int e^{-2i\sigma(Y,Z)}\partial_X^{\Theta}a(X+\theta Y)&\\ \times\Big(\big(\sigma\partial_X\big)^{\Theta}b\Big)(X+Z)dYdZ&\qquad(7.3.29)\\ =\sum_{|\Theta|=l}\frac{l}{\Theta!}\int_0^1(1-\theta)^{l-1}R(X;\partial_X^{\Theta}a,(\sigma\partial_X)^{\Theta}b;\theta)d\theta&\end{aligned}$$

となる．$\Theta=(\alpha,\beta)$ とすると仮定より $\partial_X^{\Theta}a=\partial_x^{\alpha}\partial_\xi^{\beta}a\in S(m_{1\alpha}^{\beta},g)$ で他方 $(\sigma\partial_X)^{\Theta}b=(-1)^{|\beta|}\partial_\xi^{\alpha}\partial_x^{\beta}b\in S(m_{2\beta}^{\alpha},g)$ であるから補題 7.3.1 を適用すると $R(X;\partial_X^{\Theta}a,(\sigma\partial_X)^{\Theta}b;\theta)\in S(m_{1,\alpha}^{\beta}m_{2,\beta}^{\alpha},g)$ となり主張が従う． □

系 7.3.1. g を $\underline{g}$, g_ϵ, $\bar{g}$ のいずれかとし $h(X)=\phi^{-1}(X)\psi^{-1}(X)$ とおく．このとき任意の l に対して

$$a\#b-\sum_{|\alpha+\beta|<l}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!}\partial_\xi^{\beta}\partial_x^{\alpha}a\,\partial_\xi^{\alpha}\partial_x^{\beta}b\in S(h^l m_1m_2,g)\qquad(7.3.30)$$

である．特に次が成立する．

$$\left\{\begin{array}{l}a\#b-b\#a-\{a,b\}/i\in S(h^3m_1m_2,g),\\ a\#b+b\#a-2\,ab\in S(h^2m_1m_2,g),\\ a\#b\#a-ba^2\in S(h^2m_2m_1^2,g).\end{array}\right.\qquad(7.3.31)$$

証明. (7.3.29) を考えると $\partial_X^{\Theta}a(X) \in S(m_1\Pi g_X^{1/2}(t_i), g)$, $\partial_X^{\Theta} = \Pi\partial_X^{t_j}$ および $(\sigma\partial_X)^{\Theta}b(X) \in S(m_2\Pi g_X^{1/2}(t_i^*), g)$, $(\sigma\partial_X)^{\Theta} = \Pi\partial_X^{t_i^*}$ である．また $g_X^{1/2}(t)$, $|t| = 1$ は $\phi^{-1}(X)$ または $\psi^{-1}(X)$ であるから補題 7.1.3 より g admissible weight である．ここで $\sigma t_i = \pm t_i^*$ に注意すると

$$g_X^{1/2}(t_i)g_X^{1/2}(t_i^*) = \phi^{-1}(X)\psi^{-1}(X) = h(X)$$

より (7.3.29) の右辺に補題 7.3.1 を適用して $r_l \in S(m_1m_2h^l, g)$ が従う．つぎに (7.3.30) で $|\alpha+\beta| = k$ の和を $J_k(a,b)$ と表すと $J_k(a,b) = (-1)^k J_k(b,a)$ であるから (7.3.31) が従う． □

たとえば $a \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^s, \underline{g})$, $b \in S(m, \bar{g})$ とすると $\langle\xi\rangle_\gamma^s$ は $\bar{g}$ admissible weight で $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{s-|\beta|}, \underline{g}) \subset S(\langle\xi\rangle_\gamma^{s-|\beta|}, \bar{g})$ および $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha b \in S(m\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\beta|-|\alpha|)/2}, \bar{g})$ より

$$a\#b - \sum_{|\alpha+\beta|<l}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!}\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha a\,\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta b \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{s-l/2}m, \bar{g}) \tag{7.3.32}$$

である．

7.4　擬微分作用素の有界性

この節では $a \in S(1,\bar{g})$ のとき $\mathrm{op}(a)$ が L^2 有界であることを証明する．そのために任意の $\ell \in \mathbb{N}$ について $a \in S(1,\bar{g})$ の ℓ 個の積 $\mathrm{op}(a)\cdots\mathrm{op}(a)$ を考えたい．この場合，Weyl 量子化より 0 - 量子化の積の方が見やすいのでまずこの 2 つの量子化の関係を見ておく．以下でもすべての定数は γ にはよらない．

補題 7.4.1. $a(x,\xi) \in S(1,\bar{g})$ とする．このとき $b(x,\xi) \in S(1,\bar{g})$ が一意に存在して $\mathrm{op}(a) = \mathrm{op}^0(b)$ となる．ここで $b(x,\xi)$ は

$$b(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{-iy\eta}a(x+y/\sqrt{2}, \xi+\eta/\sqrt{2})dyd\eta \tag{7.4.33}$$

で与えられる．また $C_k > 0$ が存在して $|b|_{S(1,\bar{g})}^{(k)} \le C_k|a|_{S(1,\bar{g})}^{(3n+3+2k)}$ が成り立つ．また $c(x,\xi) \in S(1,\bar{g})$ が一意に存在し $\mathrm{op}^0(a) = \mathrm{op}(c)$ となる．ここで

$$c(x,\xi) = (2\pi)^{-n}\int e^{iy\eta}a(x+y/\sqrt{2}, \xi+\eta/\sqrt{2})dyd\eta$$

である．さらに $|c|_{S(1,\bar{g})}^{(k)} \le C_k|a|_{S(1,\bar{g})}^{(3n+3+2k)}$ が成り立つ．

証明. 定義より b は

$$\int e^{i(x-y)\xi}b(x,\xi)d\xi = \int e^{i(x-y)\xi}a((x+y)/2,\xi)d\xi$$

を満たす．$\tilde{y}=y-x$ とおくと

$$\int e^{-i\tilde{y}\xi}b(x,\xi)d\xi=\int e^{-i\tilde{y}\xi}a(x+\tilde{y}/2,\xi)d\xi$$

であるが左辺は $\xi\mapsto b(x,\xi)$ のフーリエ変換であるから

$$\begin{aligned}b(x,\xi)&=(2\pi)^{-n}\int e^{i\tilde{y}\xi}d\tilde{y}\int e^{-i\tilde{y}\zeta}a(x+\tilde{y}/2,\zeta)d\zeta\\&=(2\pi)^{-n}\int e^{-i\tilde{y}\zeta}a(x+\tilde{y}/2,\xi+\zeta)d\tilde{y}d\zeta\end{aligned}$$

より (7.4.33) と一意性は明らかである．次に $\chi(\xi,\eta)$, $\chi^c(\xi,\eta)$ を 7.3 節で用いたものとし $X=(x,\xi)$, $Y=(y,\eta)$ と書き補題 7.3.1 の証明と同じ記法を使うことにする．

$$b=\int e^{-iy\eta}a(X+Y/\sqrt{2})\chi dY+\int e^{-iy\eta}a(X+Y/\sqrt{2})\chi^c dY=\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

とおいて $\partial_X^\Theta\mathrm{I}$, $\partial_X^\Theta\mathrm{II}$ を評価しよう．$L=1+\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|D_y|^2+\langle\xi\rangle_\gamma|D_\eta|^2$, $\Phi=1+\langle\xi\rangle_\gamma^{-1}|\eta|^2+\langle\xi\rangle_\gamma|y|^2$ とおき部分積分を行うと $\partial_X^\Theta\mathrm{I}$ を評価するには

$$\int e^{iy\eta}L^N\Phi^{-N}\partial_X^{\Theta_1}a(X+Y/\sqrt{2})\partial_X^{\Theta_2}\chi(\xi,\eta)dY,\quad \Theta_1+\Theta_2=\Theta$$

を評価すればよい．$\chi(\xi,\eta)\neq 0$ なら $\langle\xi+\eta/\sqrt{2}\rangle_\gamma\approx\langle\xi\rangle_\gamma$ であるから $|\tilde{\Theta}|\le 2N$, $\Theta=(\alpha,\beta)$, $|\Theta|\le k$ として

$$\begin{aligned}&\big|(\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}D_y,\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}D_\eta)^{\tilde{\Theta}}\Phi^{-N}\partial_X^{\Theta_1}a(X+Y/\sqrt{2})\partial_X^{\Theta_2}\chi(\xi,\eta)\big|/\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\\&\qquad\le C_k\Phi^{-N}|a|_{S(1,\bar{g})}^{(2N+k)}\end{aligned}$$

が成り立つ．$N=n+1$ と選ぶと $|\partial_X^\Theta\mathrm{I}|/\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\le C_k'|a|_{S(1,\bar{g})}^{(2n+2+k)}$ が得られる．次に $\partial_X^\Theta\mathrm{II}$ を評価する．$L=1+|D_y|^2$, $M=1+|D_\eta|^2$ とおき部分積分を行うと $\partial_X^\Theta\mathrm{II}$ を評価するには

$$\int e^{iy\eta}L^N\langle\eta\rangle^{-2N}M^\ell\langle y\rangle^{-2\ell}\partial_X^{\Theta_1}a(X+Y/\sqrt{2})\partial_X^{\Theta_2}\chi^c(\xi,\eta)dY$$

を評価すればよい．$\chi^c(\xi,\eta)\neq 0$ なら $\langle\xi+\eta/\sqrt{2}\rangle_\gamma\le C\langle\eta\rangle$ に注意すると $\Theta=(\alpha,\beta)$, $|\Theta|\le k$, $|\mu|\le 2N$, $\nu\le 2\ell$ として

$$\begin{aligned}&\big|D_y^\mu\langle\eta\rangle^{-2N}D_\eta^\nu\langle y\rangle^{-2\ell}\partial_X^{\Theta_1}a(X+Y/\sqrt{2})\partial_X^{\Theta_2}\chi^c(\xi,\eta)\big|/\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\\&\qquad\le C_k\langle y\rangle^{-2\ell}\langle\eta\rangle^{-N+k/2}|a|_{S(1,\bar{g})}^{(2\ell+2N+k)}\end{aligned}$$

が成立する．$2\ell>n$, $N-k/2>n$ と選ぶと $|\partial_X^\Theta\mathrm{II}|/\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\alpha|-|\beta|)/2}\le C_k'|a|_{S(1,\bar{g})}^{(3n+3+2k)}$ が得られる．$c(x,\xi)$ に関する主張の証明も同様である． □

まず $(\mathrm{op}^0(a)u,v)=(u,\mathrm{op}^1(\bar{a})v)$ より $\mathrm{op}^0(a)^*=\mathrm{op}^1(\bar{a})$ に注意する．L^2 有界性の証明では $\mathrm{op}^0(a)$ と $\mathrm{op}^0(a)^*$ を同時に考えたいので $3n$ 変数のシンボルを導入する．任意の $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $(\beta^0,\beta^1)\in\mathbb{N}^{2n}$ に対して

$$\left|\partial_x^{\beta^0}\partial_{x'}^{\beta^1}\partial_\xi^\alpha a(x,\xi,x')\right|\leq C\langle\xi\rangle_\gamma^{m+|\beta^0+\beta^1|/2-|\alpha|/2} \tag{7.4.34}$$

を満たす $a(x,\xi,x')\in C^\infty(\mathbb{R}^{3n})$ の全体を $\tilde{S}^m_{1/2}$ で表し $|\alpha|\leq l$, $|\beta^0|,|\beta^1|\leq l'$ について (7.4.34) が成立するような最小の C を $|a|^{(m)}_{l,l'}$ で表すことにする．この $a(x,\xi,x')$ に対して擬微分作用素 $\mathcal{O}p(a)$ を振動積分

$$\mathcal{O}p(a)u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{-iy\xi}a(x,\xi,x+y)u(x+y)dyd\xi,\quad u\in\mathcal{S}$$

で定義すると $a(x,\xi)\in S(\langle\xi\rangle_\gamma^m,\bar{g})$ のとき $\mathcal{O}p(a(x,\xi))=\mathrm{op}^0(a)$ であり，また $\mathcal{O}p(\overline{a(x',\xi)})=\mathrm{op}^0(a)^*$ である．$a_j(x,\xi,x')\in\tilde{S}^{m_j}_{1/2}$, $j=1,\ldots,\nu$ とすると定義から

$$\mathcal{O}p(a_1)\cdots\mathcal{O}p(a_\nu)u(x)=\int\prod_{j=1}^{\nu}e^{i(z^{j-1}-z^j)\xi^j}a_j(z^{j-1},\xi^j,z^j)u(z^j)dz^jd\xi^j$$

である $(z^0=x)$．ここで $\tilde{x}^\nu=(x^1,\ldots,x^\nu)$, $\tilde{\xi}^\nu=(\xi^1,\ldots,\xi^\nu)\in\mathbb{R}^{n\nu}$ として

$$a(x^0,\tilde{\xi}^\nu,\tilde{x}^\nu)=\prod_{j=1}^{\nu}a_j(x^{j-1},\xi^j,x^j) \tag{7.4.35}$$

とおき $y^j=z^j-z^{j-1}$ $(j=1,\ldots,\nu,z^0=x)$ と変数変換すると上の積分は

$$\int e^{-i\tilde{y}^\nu\tilde{\xi}^\nu}a(x,\xi^1,x+\bar{y}^1,\ldots,\xi^\nu,x+\bar{y}^\nu)u(x+\bar{y}^\nu)d\tilde{y}^\nu d\tilde{\xi}^\nu,\ \ u\in\mathcal{S} \tag{7.4.36}$$

となる．ここで $d\tilde{y}^\nu d\tilde{\xi}^\nu=dy^1d\xi^1\cdots dy^\nu d\xi^\nu$, $\tilde{y}^\nu\tilde{\xi}^\nu=y^1\xi^1+\cdots+y^\nu\xi^\nu$ および

$$\bar{y}^1=y^1,\ \bar{y}^2=y^1+y^2,\ldots,\bar{y}^\nu=y^1+\cdots+y^\nu$$

とおいた．さらに (7.4.36) で変数変換 $x+\bar{y}^\nu=x'$, $\xi^j=\eta^j+\xi^\nu$ $(j=1,\ldots,\nu-1)$, $\xi^\nu=\xi$ を行うと $\tilde{y}^\nu\tilde{\xi}^\nu=\tilde{y}^{\nu-1}\tilde{\eta}^{\nu-1}+(x'-x)\xi$ に注意して

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}p(a_1)\cdots\mathcal{O}p(a_\nu)u(x)=\int e^{i(x-x')\xi}k(a;x,\xi,x')u(x')dx'd\xi,\\&k(a;x,\xi,x')=\int e^{-i\tilde{y}^{\nu-1}\tilde{\eta}^{\nu-1}}\\&\quad\times a(x,\xi+\eta^1,x+\bar{y}^1,\ldots,\xi+\eta^{\nu-1},x+\bar{y}^{\nu-1},\xi,x')d\tilde{y}^{\nu-1}d\tilde{\eta}^{\nu-1}\end{aligned}$$

を得る．したがって振動積分 $k(a;x,\xi,x')$ の評価が問題となる．$a_j(x,\xi,x') \in \tilde{S}^0_{1/2}$ のとき (7.4.35) の a が

$$\left|a^{(\tilde{\alpha}^\nu)}_{(\beta^0,\tilde{\beta}^\nu)}\right| \leq C\langle\xi^1\rangle_\gamma^{|\beta^0|/2}\prod_{j=1}^{\nu}\langle\xi^j\rangle_\gamma^{m_j-|\alpha^j|/2}\langle\xi^j;\xi^{j+1}\rangle_\gamma^{|\beta^j|/2}, \quad (\xi^{\nu+1}=0)$$

を満たすことは容易に確かめられる．ここで $\langle\xi^j;\xi^{j+1}\rangle_\gamma = \langle\xi^j\rangle_\gamma + \langle\xi^{j+1}\rangle_\gamma$ で

$$a^{(\tilde{\alpha}^\nu)}_{(\beta^0,\tilde{\beta}^\nu)} = a^{(\alpha^1,\ldots,\alpha^\nu)}_{(\beta^0,\beta^1,\ldots,\beta^\nu)} = \partial_{\tilde{\xi}^\nu}^{\tilde{\alpha}^\nu}\partial_{x^0}^{\beta^0}\partial_{\tilde{x}^\nu}^{\tilde{\beta}^\nu}a = \partial_{\xi^1}^{\alpha^1}\cdots\partial_{\xi^\nu}^{\alpha^\nu}\partial_{x^0}^{\beta^0}\cdots\partial_{x^\nu}^{\beta^\nu}a$$

とした．後に $a^{(\tilde{\alpha}^\nu)}_{(\beta^0,\tilde{\beta}^\nu)}$ をあらためて a として考えるので最初から

$$\left|a^{(\tilde{\alpha}^\nu)}_{(\beta^0,\tilde{\beta}^\nu)}\right| \leq C\langle\xi^1\rangle_\gamma^{m'_0+|\beta^0|/2}\prod_{j=1}^{\nu}\langle\xi^j\rangle_\gamma^{m_j-|\alpha^j|/2}\langle\xi^j;\xi^{j+1}\rangle_\gamma^{m'_j+|\beta^j|/2} \tag{7.4.37}$$

を満たす a を考える．以下 $m_j \leq 0$, $m'_j \geq 0$ とする．また $|\alpha^j| \leq l$, $1 \leq j \leq \nu$, $|\beta^j| \leq l'$, $0 \leq j \leq \nu$ に対して (7.4.37) が成立するような最小の C を $|a|^{(\mathbf{m};\mathbf{m}')}_{l,l'}$ で表すことにする．ここで $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_\nu)$, $\mathbf{m}' = (m'_0,\ldots,m'_\nu)$ とした．$k(a;x,\xi,x')$ の評価について熊ノ郷 ([19]) にしたがって次の補題を証明しよう．

補題 7.4.2. $a(x^0,\tilde{\xi}^\nu,\tilde{x}^\nu)$ が (7.4.37) を満たすとき $C = C(|\bar{m}|,\bar{m}')$ が存在して

$$\left|k(a;x,\xi,x')\right| \leq C^\nu|a|^{(\mathbf{m};\mathbf{m}')}_{l,l'}\langle\xi\rangle_\gamma^{\bar{m}+\bar{m}'} \tag{7.4.38}$$

が成立する．ここで $\bar{m} = m_1+\cdots+m_\nu$, $\bar{m}' = m'_0+m'_1+\cdots+m'_\nu$ でまた $l = 2[n/2+1]$, $l' = 2[n+|\bar{m}|+1]$ である．

証明. $n_0 = l/2$ とおく．部分積分を行うと $k(a;x,\xi,x')$ は

$$\begin{aligned}\int e^{-i\tilde{y}^{\nu-1}\tilde{\eta}^{\nu-1}}\prod_{j=1}^{\nu-1}\left(1+|D_{\eta^j}|^{2n_0}\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{n_0}\right)\Big\{\prod_{j=1}^{\nu-1}\left(1+\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{n_0}|y^j|^{2n_0}\right)^{-1}\Big\}\\ \times a(x,\xi+\eta^1,\ldots,x+\bar{y}^{\nu-1},\xi,x')d\tilde{y}^{\nu-1}d\tilde{\eta}^{\nu-1}\end{aligned}$$

と表される．$2n_0 > n$ より被積分項は $\tilde{y}^{\nu-1}$ について可積分である．η^j に関する積分を実行するために $\mathbb{R}^n_{\eta^j}$ を 3 つの部分に分ける．

$$\begin{aligned}\Omega_{j,1} &= \{\eta^j;|\eta^j-\eta^{j+1}| \leq c_0\langle\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma^{1/2}\},\\ \Omega_{j,2} &= \{\eta^j;c_0\langle\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma^{1/2} \leq |\eta^j-\eta^{j+1}| \leq c_0\langle\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma\},\\ \Omega_{j,3} &= \{\eta^j;|\eta^j-\eta^{j+1}| \geq c_0\langle\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma\}.\end{aligned} \tag{7.4.39}$$

次に $k_j = k_j(\eta^j,\eta^{j+1})$ を

$$k_j = 0 \ \ (\eta^j \in \Omega_{j,1}), \quad k_j = l'/2 \ \ (\eta^j \in \Omega_{j,2}\cup\Omega_{j,3}) \tag{7.4.40}$$

とおく．変数変換 $\tilde{y}^{\nu-1} \mapsto (y^1, y^1+y^2, \dots, y_1+\cdots+y^{\nu-1}) = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}^{\nu-1}) = \tilde{\bar{y}}^{\nu-1}$ の後に部分積分を行うと $\tilde{y}^{\nu-1}\tilde{\eta}^{\nu-1} = \sum_{j=1}^{\nu-1} \bar{y}^j(\eta^j - \eta^{j+1})$ $(\eta^\nu = 0)$ に注意して

$$k(a;x,\xi,x') = \int e^{-i\sum_{j=1}^{\nu-1}\bar{y}^j(\eta^j-\eta^{j+1})}\Big(\prod_{j=1}^{\nu-1}|\eta^j-\eta^{j+1}|^{-2k_j}\Big)$$
$$\times\prod_{j=1}^{\nu-1}|D_{\bar{y}^j}|^{2k_j} r(x,\xi,x';\tilde{\eta}^{\nu-1},\tilde{\bar{y}}^{\nu-1})d\tilde{\bar{y}}^{\nu-1}d\tilde{\eta}^{\nu-1}$$

を得る．ここで

$$r(x,\xi,x';\tilde{\eta}^{\nu-1},\tilde{\bar{y}}^{\nu-1}) = \prod_{j=1}^{\nu-1}\big(1+|D_{\eta^j}|^{2n_0}\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{n_0}\big)$$
$$\times\Big\{\prod_{j=1}^{\nu-1}\big(1+\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{n_0}|\bar{y}^j-\bar{y}^{j-1}|^{2n_0}\big)^{-1}\Big\}a(x,\xi+\eta^1,\dots,x+\bar{y}^{\nu-1},\xi,x')$$

である $(\bar{y}^0 = 0)$．微分を実行するとき D_{η^j} は少なくとも $\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{-1/2}$ で減少する項を生じ，他方 $D_{\bar{y}^j}$ によって生じる項は $\langle\xi+\eta^j;\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma^{1/2}$ で評価されることに注意すると

$$\int(1+\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{n_0}|\bar{y}^j-\bar{y}^{j-1}|^{2n_0})^{-1}d\bar{y}^j \le C_1\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{-n/2}$$

であるから $C_2 = C_2(l,l')$ が存在して

$$\big|k(a;x,\xi,x')\big| \le C_2^{\nu+1}|a|_{l,l'}^{(\mathbf{m};\mathbf{m}')}\langle\xi\rangle_\gamma^{m_\nu+m'_\nu}\int\langle\xi+\eta^1\rangle_\gamma^{m'_0}$$
$$\times\Big\{\prod_{j=1}^{\nu-1}|\eta^j-\eta^{j+1}|^{-2k_j}\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{m_j-n/2}\langle\xi+\eta^j;\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma^{m'_j+k_j}\Big\}d\tilde{\eta}^{\nu-1}$$

と評価される $(\eta^\nu = 0)$．$c_0 > 0$ を $1-c_0 \ge 1/\sqrt{2}$ と選ぶと (7.1.15) より $|\xi-\eta| < c_0\langle\xi\rangle_\gamma$ なら $\langle\xi\rangle_\gamma/2 \le \langle\eta\rangle_\gamma \le 2\langle\xi\rangle_\gamma$ ゆえ

$$\langle\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma/2 \le \langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma \le 2\langle\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma \quad \text{on} \quad \Omega_{j,1}\cup\Omega_{j,2} \tag{7.4.41}$$

が成立する．一方 $|\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma - \langle\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma| \le \sqrt{n}|\eta^j-\eta^{j+1}|$ であるからこれより $C_3 = c_0^{-1}+\sqrt{n}$ として

$$\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma \le C_3|\eta^j-\eta^{j+1}| \quad \text{on} \quad \Omega_{j,3} \tag{7.4.42}$$

が成立している．いま

$$I_{j_0} = \int\langle\xi+\eta^1\rangle_\gamma^{m'_0}\Big\{\prod_{j=1}^{j_0}|\eta^j-\eta^{j+1}|^{-2k_j}\langle\xi+\eta^j\rangle_\gamma^{m_j-n/2}$$
$$\times\langle\xi+\eta^j;\xi+\eta^{j+1}\rangle_\gamma^{m'_j+k_j}\Big\}d\eta^1\cdots d\eta^{j_0}$$

とおき $\bar{m}_k = \sum_{j=1}^k m_k$, $\bar{m}'_k = \sum_{j=0}^k m'_j$ $(1 \le k \le \nu - 1)$ と表すとき $C_4 = C_4(\bar{m}, \bar{m}') > 0$ が存在して

$$I_{j_0} \le C_4^{j_0+1} \langle \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma^{\bar{m}_{j_0} + \bar{m}'_{j_0}} \quad (j_0 = 1, \dots, \nu - 1, \eta^\nu = 0) \tag{7.4.43}$$

が成立することを示そう．$j_0 - 1$ について (7.4.43) が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} I_{j_0} \le C_4^{j_0} \Big\{ \int_{\Omega_{j_0,1}} + \int_{\Omega_{j_0,2}} + \int_{\Omega_{j_0,3}} \Big\} |\eta^{j_0} - \eta^{j_0+1}|^{-2k_{j_0}} \\ \times \langle \xi + \eta^{j_0} \rangle_\gamma^{\bar{m}_{j_0} + \bar{m}'_{j_0-1} - n/2} \langle \xi + \eta^{j_0}; \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma^{m'_{j_0} + k_{j_0}} d\eta^{j_0} \end{aligned}$$

なので (7.4.40) と (7.4.41), (7.4.42) より

$$\begin{aligned} I_{j_0} \le C_4^{j_0} \Big[3^{\bar{m}'} 2^{|\bar{m}| + n/2} \langle \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma^{\bar{m}_{j_0} + \bar{m}'_{j_0} - n/2} \Big\{ \int_{\Omega_{j_0,1}} d\eta^{j_0} \\ + (3 \langle \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma)^{l'/2} \int_{\Omega_{j_0,2}} |\eta^{j_0} - \eta^{j_0+1}|^{-l'} d\eta^{j_0} \Big\} \\ + C_3^{\bar{m}'} (C_3 + c_0^{-1})^{\bar{m}' + l'/2} \int_{\Omega_{j_0,3}} |\eta^{j_0} - \eta^{j_0+1}|^{-l'/2 + \bar{m}'_{j_0}} d\eta^{j_0} \Big] \end{aligned}$$

を得る．各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{j_0,1}} d\eta^{j_0} &\le C_5 \langle \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma^{n/2}, \\ \int_{\Omega_{j_0,2}} |\eta^{j_0} - \eta^{j_0+1}|^{-l'} d\eta^{j_0} &\le C'_5 \langle \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma^{-l'/2 + n/2}, \\ \int_{\Omega_{j_0,3}} |\eta^{j_0} - \eta^{j_0+1}|^{-l'/2 + \bar{m}'_{j_0}} d\eta^{j_0} &\le C''_5 \langle \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma^{-l'/2 + \bar{m}'_{j_0} + n} \\ &\le C''_5 \langle \xi + \eta^{j_0+1} \rangle_\gamma^{\bar{m}_{j_0} + \bar{m}'_{j_0}} \end{aligned}$$

と評価されるので C_4 を

$$C_4 \ge 2^{|\bar{m}| + n/2} 3^{\bar{m}'} (C_5 + 3^{l'/2} C'_5) + C_3^{\bar{m}'} (C_3 + c_0^{-1})^{\bar{m}' + l'/2} C''_5$$

と選べば帰納法によって (7.4.43) が j_0 について成り立つ．(7.4.38) は (7.4.43) から直ちに従う． □

命題 7.4.1. $a_j \in \tilde{S}^0_{1/2}$ とし a を (7.4.35) で定義する．このとき $k(a; x, \xi, x') \in \tilde{S}^0_{1/2}$ で $\mathcal{O}p(a_1)\mathcal{O}p(a_2) \cdots \mathcal{O}p(a_\nu) = \mathcal{O}p(k(a))$ である．さらに任意の l, l' に対し $C > 0$ が存在し

$$|k(a)|^{(0)}_{l,l'} \le C^\nu \prod_{j=1}^\nu |a_j|^{(0)}_{l_0, l'_0}$$

が成立する．ここで $l_0 = l + 2[n/2 + 1]$, $l'_0 = l' + 2[n + l/2 + 1]$ である．

証明. 評価の証明だけが残っている.

$$k(a)^{(\alpha)}_{(\beta,\beta')}(x,\xi,x') = \int e^{-i\tilde{y}^{\nu-1}\tilde{\eta}^{\nu-1}}\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\partial_{x'}^{\beta'}a(x,\xi+\eta^1,x+\bar{y}^1,\ldots,$$
$$\xi+\eta^{\nu-1},x+\bar{y}^{\nu-1},\xi,x')d\tilde{y}^{\nu-1}d\tilde{\eta}^{\nu-1} = \sum_{j\le\nu^{|\alpha+\beta|}} k(q_j)$$

と書ける．ここで各 $q_j(x^0,\tilde{\xi^\nu},\tilde{x}^\nu)$ は (7.4.37) で $\bar{m} = -|\alpha|/2$, $\bar{m}' = |\beta+\beta'|/2$ (ν によらないことに注意する) とした評価をもち $|q_j|^{(\mathbf{m};\mathbf{m}')}_{l,l'} \le |a|^{(\mathbf{0},\mathbf{0}')}_{l_0,l_0'}$ である．ただし $l_0 = |\alpha| + [n/2+1]$, $l_0' = |\beta+\beta'| + [n+|\alpha|/2+1]$ とした．したがって補題 7.4.2 を適用すると $C = C(|\alpha|,|\beta+\beta'|) > 0$ が存在して

$$|k(a)^{(\alpha)}_{(\beta,\beta')}(x,\xi,x')| \le \nu^{|\alpha+\beta|}C^\nu|a|^{(\mathbf{0},\mathbf{0}')}_{l_0,l_0'}\langle\xi\rangle_\gamma^{|\beta+\beta'|/2-|\alpha|/2}$$

が成立する．一方 $|a|^{(\mathbf{0};\mathbf{0}')}_{l,l'} \le C_{l,l'}\prod_{j=1}^\nu |a_j|^{(0)}_{l,l'}$ は容易にわかるので $\nu^{|\alpha+\beta|} \le (2^{|\alpha+\beta|})^\nu$ に注意して結論を得る． □

定理 7.4.1. $a \in S(1,\bar{g})$ とすると $\mathrm{op}(a)$ は L^2 有界である．すなわち次元のみによる定数 $C > 0$ と $\ell \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|\mathrm{op}(a)u\| \le C|a|^{(\ell)}_{S(1,\bar{g})}\|u\|, \quad u \in \mathcal{S}$$

が成立する．

証明. 補題 7.4.1 より $p \in S(1,\bar{g})$ があって $\mathrm{op}(a) = \mathrm{op}^0(p)$ と書け，p のセミノルムは a のセミノルムで評価されるので $\mathrm{op}^0(p)$ について定理を示せばよい．$\chi(x,\xi,x') \in C_0^\infty(|x|+|\xi|+|x'|<1)$ を $\chi(0,0,0) = 1$ と選んで $p_\epsilon(x,\xi,x') = \chi(\epsilon x,\epsilon\xi,\epsilon x')p(x,\xi)$ とおく．このとき $\{p_\epsilon\}_{0<\epsilon\le1}$ が $\tilde{S}^0_{1/2}$ で有界なことは明らか．$P_\epsilon = \mathcal{O}p(p_\epsilon)$ とおき

$$Q_\nu = \overbrace{P_\epsilon^* P_\epsilon \cdots P_\epsilon^* P_\epsilon}^{\nu} \quad (\nu = 2^l,\ l = 1,2,\ldots)$$

に命題 7.4.1 を適用して $Q_\nu = \mathcal{O}p(q_\nu)$, $q_\nu \in \tilde{S}^0_{1/2}$ と書く．$|x|+|\xi|+|x'| \ge 2\epsilon^{-1}$ なら $|x+\bar{y}^{\nu-1}|+|\xi|+|x'| \ge \epsilon^{-1}$ または $|x|+|\xi+\eta^1|+|x+\bar{y}^1| \ge \epsilon^{-1}$ であるから $q_\nu(x,\xi,x') = 0$ である．$K(x,x') = \int e^{i(x-x')\xi}q_\nu(x,\xi,x')d\xi$ とおくと

$$(Q_\nu u)(x) = \int K(x,x')u(x')dx'$$

である．C_ϵ を $\{|\xi| \le 2\epsilon^{-1}\}$ の体積とすると $|K(x,x')| \le C_\epsilon|q_\nu|^{(0)}_{0,0}$ であり $|x|+|x'| \ge 2\epsilon^{-1}$ なら $K(x,x') = 0$ でもあるから

$$\|Q_\nu u\| \le C_\epsilon^2|q_\nu|^{(0)}_{0,0}\|u\|, \quad u \in \mathcal{S}$$

が成り立つ．$\|Q_\nu\| \le \|P_\epsilon^*\|^{\nu/2}\|P_\epsilon\|^{\nu/2} \le \|P_\epsilon\|^\nu$ は明らかである．$\|P_\epsilon u\|^2 = (P_\epsilon^* P_\epsilon u, u) \le \|P_\epsilon^* P_\epsilon\|\|u\|^2 = \|Q_2\|\|u\|^2$．同様に $\|P_\epsilon^* P_\epsilon u\|^2 \le \|Q_4\|\|u\|^2$．これを繰り返して $\|P_\epsilon\|^\nu \le \|Q_\nu\|$ が得られる．したがって $\|P_\epsilon\|^\nu = \|Q_\nu\|$ である．命題 7.4.1 によると l_1, l_2 および ν によらない $C > 0$ が存在して $|q_\nu|_{0,0}^{(0)} \le C^\nu\big(|p_\epsilon|_{l_1,l_2}^{(0)}\big)^\nu$ が成り立つので

$$\|P_\epsilon\| = \|Q_\nu\|^{1/\nu} \le C_\epsilon^{2/\nu} C|p_\epsilon|_{l_1,l_2}^{(0)}$$

である．ここで $\nu \to \infty$ とすると $\|P_\epsilon\| \le C|p_\epsilon|_{l_1,l_2}^{(0)}$ となる．$\lim_{\epsilon\to 0} P_\epsilon u = \mathrm{op}^0(p)u$ であるから $\|\mathrm{op}^0(p)\| \le C|p|_{l_1,l_2}^{(0)} \le C|p|_{S(1,\bar{g})}^{(l_1+l_2)}$ が得られた． □

7.5　擬微分作用素の可逆性

この節では命題 7.4.1 を利用して次の定理を Kumano-go ([20]) にしたがって証明する．

定理 7.5.1. 正数 $C > 0$ と $l^0 \in \mathbb{N}$ が存在して $a(x,\xi) \in S(1,\bar{g})$ が $|a|_{S(1,\bar{g})}^{(l^0)} \le C^{-1}$ をみたすなら

$$b(x,\xi) = \sum_{j=0}^\infty \overbrace{a\#\cdots\#a}^{j} = \sum_{j=0}^\infty a^{\#j}$$

は $S(1,\bar{g})$ で収束し $(1-a)\#b = b\#(1-a) = 1$ が成立する．さらに任意の l に対して C_l, l' が存在し次が成り立つ．

$$|b|_{S(1,\bar{g})}^{(l)} \le C_l |a|_{S(1,\bar{g})}^{(l')}. \tag{7.5.44}$$

証明. 補題 7.4.1 より $\mathrm{op}(a) = \mathrm{op}^0(p)$ となる $p \in S(1,\bar{g})$ がある．$p_1, p_2 \in S(1,\bar{g})$ とするとき振動積分

$$(p_1 \diamond p_2)(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{-iy\eta} p_1(x,\xi+\eta) p_2(x+y,\xi) dy d\eta \tag{7.5.45}$$

で $p_1 \diamond p_2$ を定義すると $p_1 \diamond p_2 \in S(1,\bar{g})$ で $\mathrm{op}^0(p_1 \diamond p_2) = \mathrm{op}^0(p_1)\mathrm{op}^0(p_2)$ であることは命題 7.4.1 から従う．補題 7.4.1 より $\overbrace{a\#\cdots\#a}^{j} = \overbrace{p\diamond\cdots\diamond p}^{j}$ であるから定理を証明するには $\sum_{j=0}^\infty \overbrace{p\diamond\cdots\diamond p}^{j}$ が $S(1,\bar{g})$ である q に収束し q と p が (7.5.44) の形の評価を満たすことを示せばよい．今 $q_\nu = \overbrace{p\diamond\cdots\diamond p}^{\nu}$ とすると命題 7.4.1 より

$$q_{\nu+1}(x,\xi) = \int e^{-i\tilde{y}^\nu \tilde{\eta}^\nu} \prod_{j=1}^{\nu+1} p(x+\bar{y}^{j-1}, \xi+\eta^j) d\tilde{y}^\nu d\tilde{\eta}^\nu \quad (\bar{y}^0 = 0, \eta^{\nu+1} = 0)$$

で ν にはよらない C_1 が存在して $|q_{\nu+1}(x,\xi)| \le C_1^{\nu+1}\bigl(|p|^{(0)}_{l_1^0,l_2^0}\bigr)^{\nu+1}$ が成り立つ．ここで $l_1^0 = 2[n/2+1]$, $l_2^0 = 2[n+1]$ である．これより $C_1|p|^{(0)}_{l_1^0,l_2^0} < 1$ なら $\sum_{j=0}^\infty \overbrace{p\diamond\cdots\diamond p}^{j} = \sum_{j=0}^\infty p^{\diamond j}$ が収束することは明らかである．$q^{(\alpha)}_{\nu+1(\beta)}$ が収束することを証明したい．$|\alpha+\beta| = 1$ のとき

$$q^{(\alpha)}_{\nu+1(\beta)} = \sum_{k=1}^{\nu+1} \overbrace{p\diamond\cdots\diamond p}^{k-1} \diamond p^{(\alpha)}_{(\beta)} \diamond \overbrace{p\diamond\cdots p}^{\nu-k+1}$$

である．$p^{(\alpha)}_{(\beta)} \in S(\langle\xi\rangle_\gamma^{(|\beta|-|\alpha|)/2}, \bar g) \subset \tilde S_{1/2}{}^{(|\beta|-|\alpha|)/2}$ であり命題 7.4.1 をそのままでは適用できないので使える形に帰着させる．

補題 7.5.1. $\lambda(\xi) = \langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}$ とし，$a_j(x,\xi) \in S(1,\bar g)$, $j = 1,\dots,\nu$ とする．今 $m \in \mathbb N$ とすると

$$\lambda^m \diamond a_1 \diamond\cdots\diamond a_\nu \diamond \lambda^{-m} = \sum_{s=1}^{(\nu+1)^m} a_{m,s,1}\diamond\cdots\diamond a_{m,s,\nu},$$
$$\lambda^{-m} \diamond a_1 \diamond\cdots\diamond a_\nu \diamond \lambda^{m} = \sum_{s'=1}^{(\nu+1)^m} a'_{m,s',1}\diamond\cdots\diamond a'_{m,s',\nu}$$

と書ける．ここで $a_{m,s,j}$, $a'_{m,s',j} \in S(1,\bar g) \subset \tilde S^0_{1/2}$ であり各 s, s' について $a_{m,s,j}$, $a'_{m,s',j}$ のうち少なくとも $\max\{\nu-2m, 0\}$ 個はもとの a_j に等しい．さらに任意の l, l' に対して $C_{l,l'}$, $l_1 = l_1(l,m)$, $l_2 = l_2(l',m)$ が存在し

$$|a_{m,s,j}|^{(0)}_{l,l'}, \quad |a'_{m,s',j}|^{(0)}_{l,l'} \le C_{l,l'}|a_j|^{(0)}_{l_1,l_2}$$

が成り立つ．

証明. $\lambda\diamond a_j - a_j\diamond\lambda = [\lambda, a_j]$ と書くと $\lambda\diamond a_1\diamond\cdots\diamond a_\nu\diamond\lambda^{-1}$ は

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_1\diamond a_2\cdots\diamond a_{j-1}\diamond[\lambda,a_j]\diamond a_{j+1}\diamond\cdots\diamond(a_\nu\diamond\lambda^{-1}) + a_1\diamond\cdots\diamond a_\nu$$

と書ける．ここで $[\lambda, a_j] \in S(1,\bar g)$ でそのセミノルムは a_j のそれで評価される．実際 $\mathrm{op}^0(a_j) = \mathrm{op}(\tilde a_j)$ とすると $\mathrm{op}^0(\lambda) = \mathrm{op}(\lambda)$ より $\lambda\diamond a_j - a_j\diamond\lambda = \lambda\#\tilde a_j - \tilde a_j\#\lambda$ であるが，(7.3.32) より $\lambda\#\tilde a_j - \tilde a_j\#\lambda \in S(1,\bar g)$ でそのセミノルムは $\tilde a_j$ のそれで，従って a_j のセミノルムで評価される．また $a_\nu\diamond\lambda^{-1} = a_\nu\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2} \in S(1,\bar g)$ のセミノルムが a_ν のそれで評価されることは自明ゆえ $m=1$ のときは明らか．いま $m-1$ のとき成立するとすると

$$\lambda^m\diamond a_1\diamond\cdots\diamond a_\nu\diamond\lambda^{-m} = \sum_{s=1}^{(\nu+1)^{m-1}} \lambda\diamond a_{m-1,s,1}\diamond\cdots\diamond a_{m-1,s,\nu}\diamond\lambda^{-1}$$

と書ける．各項について上と同様に $\lambda \diamond a_{m-1,s,1} \diamond \cdots \diamond a_{m-1,s,\nu} \diamond \lambda^{-1}$ を

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_{m-1,s,1} \diamond a_{m-1,s,2} \diamond \cdots \diamond a_{m-1,s,j-1} \diamond [\lambda, a_{m-1,s,j}]$$
$$\diamond a_{m-1,s,j+1} \diamond \cdots \diamond (a_{m-1,s,\nu} \diamond \lambda^{-1}) + a_{m-1,s,1} \diamond \cdots \diamond a_{m-1,s,\nu}$$

で置き換える．$[\lambda, a_{m-1,s,j}]$, $a_{m-1,s,\nu} \diamond \lambda^{-1} \in S(1, \bar{g})$ でそれらのセミノルムはそれぞれ $a_{m-1,s,j}$, $a_{m-1,s,\nu}$ のセミノルムで評価され，$a_{m-1,s,j}$ のセミノルムは帰納法の仮定より a_j のセミノルムで評価されている．したがって帰納法によりすべての m について成立する．他の場合の証明も同様である． □

定理の証明に戻る：$|\beta| = 1$ とする．

$$p^{\diamond(k-1)} \diamond p_{(\beta)} \diamond p^{\diamond(\nu-k+1)} = p^{\diamond(k-1)} \diamond (p_{(\beta)} \diamond \lambda^{-1}) \diamond \lambda \diamond p^{\diamond(\nu-k+1)}$$

と書き $\lambda \diamond p^{\diamond(\nu-k+1)} \diamond \lambda^{-1}$ に補題 7.5.1 を使うと $\lambda \diamond p^{\diamond(\nu-k+1)} = \sum_{j=1}^{\nu-k+1} p_{1,j} \diamond \cdots \diamond p_{1,\nu-k+1} \diamond \lambda$ と書ける．$a(x,\xi) \diamond \lambda = a(x,\xi)\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}$ であるから

$$q_{\nu+1(\beta)} = \sum_{s=0}^{s_0} \big(p_{s,1} \diamond \cdots \diamond p_{s,\nu+1}\big)\langle\xi\rangle_\gamma^{1/2}, \quad s_0 = \sum_{k=0}^{\nu+1} k \le (\nu+1)^2$$

となる．ここで各 s について $p_{s,j}$ のうち少なくとも $\max\{\nu+1-3, 0\}$ 個は p である．$q_{\nu+1}^{(\alpha)}$ $(|\alpha| = 1)$ についても同様にして

$$q_{\nu+1}^{(\alpha)} = \sum_{s=0}^{s_0} \big(p'_{s,1} \diamond \cdots \diamond p'_{s,\nu+1}\big)\langle\xi\rangle_\gamma^{-1/2}$$

と書ける．一般の $q_{\nu+1(\beta)}^{(\alpha)}$ についてはこの操作を繰り返すことによって $|\alpha| = l_1$, $|\beta| = l_2$ のとき

$$q_{\nu+1(\beta)}^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{s_{\alpha,\beta}} \big(p_{k,1} \diamond \cdots \diamond p_{k,\nu+1}\big)\langle\xi\rangle_\gamma^{|\beta|/2-|\alpha|/2}, \ \ s_{\alpha,\beta} \le (\nu+1)^{2(l_1+l_2)}$$

と書ける．ここで $p_{k,j} \in S(1, \bar{g})$ で各 k に対して $p_{k,j}$ のうちの少なくとも $\max\{\nu+1-3(l_1+l_2), 0\}$ 個は p である．命題 7.4.1 を $p_{k,1} \diamond \cdots \diamond p_{k,\nu+1}$ に適用すると $C_{\alpha,\beta}$, $l_i = l_i(\alpha,\beta)$ が存在して

$$\big|(p_{k,1} \diamond \cdots \diamond p_{k,\nu+1})(x,\xi)\big| \le C_1^{\nu+1} \prod_{j=1}^{\nu+1} |p_{k,j}|_{l_1^0, l_2^0}^{(0)}$$
$$\le C_{\alpha,\beta} C_1^{\nu+1} \big(|p|_{l_1^0, l_2^0}^{(0)}\big)^{\nu+1-3|\alpha+\beta|} \big(|p|_{l_1, l_2}^{(0)}\big)^{3|\alpha+\beta|}, \quad \nu+1 \ge 3|\alpha+\beta|$$

が成立する．従って $|q^{(\alpha)}_{\nu+1(\beta)}(x,\xi)|$ は $\nu+1\geq 3|\alpha+\beta|$ のとき

$$C_{\alpha,\beta}C_1^{\nu+1}(\nu+1)^{2|\alpha+\beta|}\big(|p|^{(0)}_{l_1^0,l_2^0}\big)^{\nu+1-3|\alpha+\beta|}\big(|p|^{(0)}_{l_1,l_2}\big)^{3|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_\gamma^{|\beta|/2-|\alpha|/2}$$

で評価される．$\kappa>1$ を 1 つ決めると $\sup_\nu(\nu+1)^{2|\alpha+\beta|}/\kappa^{\nu+1}<+\infty$ ゆえ任意の l_1,l_2 に対して l_1',l_2', C_{l_1,l_2} が存在し

$$|q_{\nu+1}|^{(0)}_{l_1,l_2}\leq C_{l_1,l_2}\big(\kappa C_1\big)^{\nu+1}\big(|p|^{(0)}_{l_1^0,l_2^0}\big)^{\nu+1-3(l_1+l_2)}\big(|p|^{(0)}_{l_1',l_2'}\big)^{3(l_1+l_2)}$$

が成り立つ．いま C を $C_0=\kappa C_1C^{-1}<1$ と選ぶと

$$|q_{\nu+1}|^{(0)}_{l_1,l_2}\leq C_{l_1,l_2}\big(C|p|^{(0)}_{l_1^0,l_2^0}\big)^{\nu+1}\big(|p|^{(0)}_{l_1',l_2'}\big)^{3(l_1+l_2)}C_0^{\nu+1}$$

となって $|p|^{(0)}_{l_1^0,l_2^0}<C^{-1}$ なら $\sum_{\nu=0}^\infty|q_\nu|^{(0)}_{l_1,l_2}$ は収束する． □

おわりに

V.Ivrii はさまざまな国際研究集会に招聘されるもなかなか出国 visa がおりず，ソ連邦崩壊の 1990 年頃になってやっと出国が可能になった．筆者は 1990 年の 7 月，ドイツのアウグスブルグの近くの Irsee で開催された “25 Years of Microlocal Analysis” という国際研究集会で初めて Ivrii 氏に会った．もうその頃は彼の研究対象が双曲型の初期値問題から離れてスペクトル理論に移っていたので基本行列が 0 でない実固有値を持たない場合についていくつか質問をしたがあまり興味がない様子だった．ただ基本行列の由来についてはとても興味深い話を聞くことができた．Ivrii によれば 1972 年当時彼は大学院生で当時の数学科の院生たちの間ではサービスの酒瓶 (13 本空にすると 1 本のサービスがあった) で開く二次会を “Derivative” と呼び，この “Derivative” のある飲み会を “Fundamental” な飲み会と呼んでいたという．これにちなんで 2 次 “derivative” が 0 でない (実際その場合にだけ実質的な意味がある) 行列ということで “fundamental” 行列と名づけたということだった．

「はじめに」でも述べたように本質的に 2 階の方程式に帰着される場合は [14, 15] で Nash-Moser の陰関数定理を利用して発展作用素の作用素冪を用いる方法 (の改良版) が適用できる形に帰着させることにより，また [30] では Fourier 積分作用素を用いて作用素を標準形に変換し，その標準形に対して擬微分作用素の weight を構成し weight 付きエネルギー評価を導くことによりこの予想は肯定的に解決された．[32] では基本行列が 0 でない実の固有値をもつ点の幾何的特徴づけを与えこの幾何的特徴づけから出発して標準形によることなく weight 付きエネルギー評価を得ている．これらとは少し方向の異なる証明として [34] では時間変数も込めた時空間上における擬微分作用素の高次冪の合成則を基に変換された主シンボルを複素変数にまで形式的に拡張したものを利用する方法を採用している．

Ivrii の予想のうち未解決で残っていた 2 階の方程式に帰着されない場合については最近 [36] で最終的に解決された．そこでは方程式を対角行列を対称化行列にもつ一階の系に帰着させその系に対して擬微分作用素の weight を利用するエネルギー法を採用している．

実効的双曲型でない場合，特にすべての危点が非実効的双曲型である作用素–非実効的双曲型作用素–についての初期値問題の研究の基本文献は [11], [5] である．非実効的双曲型作用素に対する初期値問題のその後の研究については文献も込めて [35] が詳しい．

双曲型方程式の研究発展を概観するには [3] が優れている．個々の結果に興味があれば 1980 年代までの線形双曲型方程式に関する主要な種々の結果を網羅したものとして [13] がある．そこには 20 近い未解決の問題が提示してあり，中には既に解決されたものもあるが依然未解決のものも多い．

参考文献

[1] J.V.Egorov, Canonical transformations and pseudodifferential operators, Trudy Moskov Mat. Obsc. **24** (1971), 3-28; English transl., Trans. Moscow Math. Soc. **24** (1971), 3-28.

[2] L.Gårding, Some recent results for hyperbolic differential equations, In: Proceedings of the nineteenth Nordic congress of mathematicians, Icel. Math. Soc., Reykjavik (1985), pp. 50-59.

[3] L.Gårding, Hyperbolic equations in the twentieth century, In: Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e siècle, Semin. Congr. **3**. Soc. Math. France, Paris (1998), pp. 37-68.

[4] L.Hörmander, Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 671-704.

[5] L.Hörmander, The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, J. Analyse Math. **32** (1977), 118-196.

[6] L.Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Springer, Berlin, 1983.

[7] L.Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer, Berlin, 1985.

[8] V.Ivrii, Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations, Sov. Math., Dokl. **13** (1972), 1648-1650.

[9] V.Ivrii and V.M.Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations to be well posed, Uspehi Mat. Nauk. **29** (1974), 3-70; English transl., Russ. Math. Surv. **29** (1974), 1-70.

[10] V.Ivrii, Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, Tr. Mosk. Mat. Obs. **33** (1975), 3-65; English transl., Trans. Moscow Math. Soc. **33** (1978), 1-65.

[11] V.Ivrii, Correctness of the Cauchy problem for nonstrictly hyperbolic operators, III. Trans. Moscow Math. Soc. (English transl.) **34** (1978), 149-168.

[12] V.Ivrii, Wavefront of solutions of some hyperbolic pseudodifferential equations, Tr. Mosk. Mat. Obs. **39** (1981), 83-112; English transl., Trans. Moscow Math. Soc. **39** (1981), 87-119.

[13] V.Ivrii, Linear Hyperbolic Equations, In: Partial Differential Equations IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **33**, Springer (1988), pp. 149-235.

[14] N.Iwasaki, The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations (a special case), J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 503-562.

[15] N.Iwasaki, The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations (standard type), Publ. RIMS Kyoto Univ. **20** (1984), 551-592.

[16] 岩崎　敷久，実効的双曲型方程式の初期値問題，数学 **36** (1984), 227-239.

[17] N.Iwasaki, The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations (general case), J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985), 727-743.

[18] コルモゴロフ・フォーミン，函数解析の基礎，第 2 版，岩波書店，1970.

[19] 熊ノ郷　準，擬微分作用素，岩波書店，1974.

[20] H.Kumano-go, Pseudo-Differential Operators, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts and London, 1974.

[21] P.D.Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problem, Duke Math. J. **24** (1957), 627-646.

[22] N.Lerner, Metrics on the Phase Space and Non-Selfadjoint Pseudo-Differential Operators, Birkhäuser, 2010.

[23] A.Martinez, An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis, Universitext, Springer, 2002.

[24] A.Melin, Lower bounds for pseudo-differential operators, Ark. Mat. **9** (1971), 117-140.

[25] R.Melrose, The Cauchy problem for effectively hyperbolic operators, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 371-391.

[26] R.Melrose, The Cauchy problem and propagation of singularities, In: Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations, ed. by S.S.Chern, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 2, Springer (1984), pp. 185-201.

[27] S.Mizohata, Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961), 109-127.

[28] 溝畑　茂，偏微分方程式論，岩波書店，1965.

[29] T. Nishitani, On the Lax-Mizohata theorem in the analytic and Gevrey classes,

J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 509-521.

[30] T.Nishitani, Local energy integrals for effectively hyperbolic operators I, II, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 623-658 and 659-666.

[31] T.Nishitani, On the Cauchy problem for effectively hyperbolic operators, In: Nonlinear variational problems (Isola d'Elba, 1983), Res. Notes in Math., **127**, Pitman, Boston, MA, (1985), pp. 9-23.

[32] T.Nishitani, Microlocal energy estimates for hyperbolic operators with double characteristics, In: Hyperbolic equations and related topics, S.Mizohata ed., Kinokuniya, Tokyo, 1986, pp. 235-255.

[33] T.Nishitani, The effectively hyperbolic Cauchy problem, In: The Hyperbolic Cauchy Problem, Lecture Notes in Math. **1505**, Springer-Verlag (1991), pp. 71-167.

[34] 西谷　達雄，線形双曲形偏微分方程式，朝倉書店，2015.

[35] T.Nishitani, Cauchy Problem for Differential Operators with Double Characteristics, Lecture Notes in Math. **2202**, Springer-Verlag, 2017.

[36] T.Nishitani, The Cauchy problem for operators with triple effectively hyperbolic characteristics: Ivrii's conjecture, J. Analyse Math. **149** (2023), 167-237.

[37] M.E.Taylor, Pseudodifferential Operators, Princeton Math. Ser. **34**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.

[38] 吉川　敦，弱双曲型方程式の初期値問題と解の特異性 (の分岐), 数学 **34** (1982), 331-345.