目 次

第1章　擬微分作用素

1.1　序

$a(x,\xi)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ に対して

$$a_s(x,D)u(x)=\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a((1-s)x+sy,\xi)u(y)dyd\xi,\quad u(x)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

で $a(x,\xi)$ をシンボルとする擬微分作用素 $a_s(x,D)$ を定義する．ここで $0\le s\le 1$ で特に $s=1/2$ のときが Wyle (ワイル) 対応である．特に $s=0,\ 1/2,\ 1$ に対しては $a_0(x,D)=a(x,D)$, $a_{1/2}(x,D)=a^w(x,D)$, $a_1(x,D)=\tilde{a}(x,D)$ 書くことにする．弱い形の定義は

$$\langle a_s(x,D)u,v\rangle=\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a((1-s)x+sy,\xi)u(y)v(x)dydxd\xi$$
$$=\int e^{i\langle x,\xi\rangle}a(y,\xi)u(y-(1-s)x)v(y+sx)dxdyd\xi,\ \ u,\ v\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

で与えられる．

$$w(y,\xi)=\int e^{i\langle x,\xi\rangle}u(y-(1-s)x)v(y+sx)dx$$

とおくと，$w(y,\xi)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ であり，任意の ℓ に対して，ℓ', ℓ'' があって $|w|_{\ell,\mathcal{S}}\le C|u|_{\ell',\mathcal{S}}|v|_{\ell'',\mathcal{S}}$ が成立する．上式の右辺は $\langle a,w\rangle$ であるから，いま $a_j\in\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}'$ で a に収束するように選ぶことにより，任意の $a\in\mathcal{S}'$ に対して $\langle a_s(x,D)u,v\rangle$ が $\langle a_{js}(x,D)u,v\rangle$ の極限として定義される．$a_s(x,D)$ は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ への連続な写像となる．

$a(x,\xi)$, $b(x,\xi)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ とする．$a_s(x,D)b_s(x,D)=c_s(x,D)$ であるとして $c(x,\xi)$ を求めてみよう．$a_s(x,D)$ の Schwarz (シュワルツ) 核を $K_a(x,y)$ とすると

$$K_a(x,y)=\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a((1-s)x+sy,\xi)d\xi,$$
$$a(x,\xi)=\int e^{-i\langle\xi,t\rangle}K_a(x+st,x-(1-s)t)dt$$

であるから

$$\int b((1-s)x+sz,\zeta)a((1-s)z+sy,\tau)e^{i\langle x-z,\zeta\rangle+i\langle z-y,\tau\rangle}dzd\zeta d\tau$$

が $b_s^w(x,D)a_s^w(x,D)$ のシュワルツ核である．従って $c_s^w(x,D)=b_s^w(x,D)a_s^w(x,D)$ とするとき

$$c(x,\xi)=\int b((1-s)x+sz+(1-s)st,\zeta)a((1-s)z+sx-s(1-s)t,\tau)e^{iE}dzd\zeta d\tau dt$$

である．ただし

$$\begin{aligned}E&=\langle x-z+st,\zeta\rangle+\langle z-x+(1-s)t,\tau\rangle-\langle t,\xi\rangle\\&=\langle x-z+st,\zeta-\xi\rangle+\langle z-x+(1-s)t,\tau-\xi\rangle\end{aligned}$$

である．$0<s<1$ として $\zeta-\xi\to\zeta$, $\tau-\xi\to\tau$, $s(z-x+(1-s)t)\to z$, $(1-s)(z-x-st)\to t$ と変換すると変換のヤコビアンは $(-1)^n s^{-n}(1-s)^{-n}$ で積分は

$$s^{-n}(1-s)^{-n}\int b(X+Y)a(X+Z)e^{is^{-1}\langle z,\tau\rangle-i(1-s)^{-1}\langle t,\zeta\rangle}$$

となる．ただし記号を簡単にするため $X=(x,\xi)$, $Y=(z,\zeta)$, $Z=(t,\tau)$ と書いた．ここで $f(x,y)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ に対して

$$\int f(x,y)e^{-is\langle x,y\rangle}dxdy=s^{-n}\int\hat{f}(\xi,\eta)e^{is^{-1}\langle\xi,\eta\rangle}d\xi d\eta$$

の成立することを使うとこの積分は

$$\int f(X,\hat{Y},\hat{Z})e^{i\sigma_s(\hat{Y},\hat{Z})}d\hat{Y}d\hat{Z}$$

に等しい．ただし $\sigma_s(\hat{Y},\hat{Z})=(1-s)\langle\hat{t},\hat{\zeta}\rangle-s\langle\hat{z},\hat{\tau}\rangle$ で

$$\begin{aligned}f(X,\hat{Y},\hat{Z})=&\int b(X+Y)a(X+Z)e^{-i\langle\hat{Y},Y\rangle-i\langle\hat{Z},Z\rangle}dYdZ\\&=e^{i\langle X,\hat{Y}\rangle+i\langle X,\hat{Z}\rangle}\widehat{ba}(\hat{Y},\hat{Z})\end{aligned}$$

である．従って

$$c(x,\xi)=\Big[e^{i\sigma_s(D_Y,D_Z)}b(Y)a(Z)\Big]_{Y=X,Z=X}$$

となる．この式は $s=0$, $s=1$ のときも正しい．

擬微分作用素のクラスに対して要求される基本的なことの一つはそのクラスが代数をなすことであり，とくに $c(x,\xi)$ が $a(x,\xi)$, $b(x,\xi)$ と同じクラスに属すことが要求される．従って $e^{\sigma_s(D_Y,D_Z)}$ がシンボルのクラスにどのように作用するかを調べることは不可欠である．

1.2　1 の分解

まず次の補題から始める．

補題 1.2.1 $a_0 \geq a_1 \geq ...$ を

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j < +\infty$$

をみたす正数列とする．u_k を $u_k = H_{a_0} * \cdots * H_{a_k}$ で定義する．ただし H_b は $0 < x < b$ では $H_b = b^{-1}$ 他では 0 となる関数である．このとき $u_k \in C_0^{k-1}(\mathbf{R})$, $\mathrm{supp} u_k \subset [0, a]$ で u_k はある $u \in C_0^\infty$, $\mathrm{supp} u \subset [0, a]$ に収束する．さらに

$$\int u dx = 1,\ |u^{(k)}(x)|,\ \frac{1}{2}\int |u^{(k+1)}(x)| dx \leq \frac{2^k}{a_0 \cdots a_k}$$

が成立する．

証明：まず次のことは明らかである．

$$\frac{d}{dx}(u * H_b(x)) = (u(x) - u(x-b))/b.$$

また帰納的に $u_k \in C_0^{k-1}([0, a_0 + \cdots + a_k])$ であることも容易に分かる．$(\tau_b u)(x) = u(x-b)$ と表すことにすると

$$u_k^{(j)} = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1}{a_i}(1 - \tau_{a_i})(H_{a_j} * \cdots * H_{a_k}) \quad (j \leq k-1) \tag{1.2.1}$$

である．従って

$$|u_k^{(j)}| \leq \prod_{i=0}^{j-1} \frac{1}{a_i}\big\{|H_{a_j} * \cdots * H_{a_k}| + |\tau_{a_i}(H_{a_j} * \cdots * H_{a_k})|\big\}.$$

今 $\int H_b dx = 1$, $\int (u * v) dx = \int u dx \int v dx$ および $|u * v| \leq \sup |u| \int |v| dx$ を利用すると

$$|u_k^{(j)}| \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_j},\ \int |u_k^{(j)}| dx \leq \frac{2^j}{a_0 \cdots a_{j-1}}.$$

さて $|u_{k+\ell} - u_k|$ を評価しよう．$\Phi = H_{a_{k+1}} * \cdots * H_{a_{k+\ell}}$ とおくと

$$|u_{k+\ell} - u_k| = |u_k * \Phi - u_k| = \Big|\int [u_k(x-y) - u_k(x)]\Phi(y) dy\Big|$$

が成立する．ところで $\mathrm{supp}\Phi \subset [0, a_{k+1} + \cdots a_{k+\ell}]$ であるから右辺を評価して

$$|u_{k+\ell} - u_k| \leq (a_{k+1} + \cdots + a_{k+\ell}) \sup |u_k'| \leq 2a_0^{-1} a_1^{-1}(a_{k+1} + \cdots + a_{k+\ell})$$

を得る．従って u_k はある u に一様収束する．(1.3.1) を利用すれば導関数についても同様である．　(証終)

補題 1.2.2 $\|\cdot\| = \max|x_i|$ とし，X を $\mathbf{R}^n$ の開集合，K を X に含まれるコンパクト集合とする．$d = \inf\{\|x-y\| \mid x \notin X, y \in K\}$ とし，$\{d_j\}$ を $d_1 \geq d_2 \geq \cdots > 0$ かつ $\sum d_j < d$ を満たす列とする．このとき $0 \leq \phi \leq 1$ なる $\phi \in C_0^\infty(X)$ で K のある近傍で 1 かつ

$$|\phi^{(k)}(x; y_1, ..., y_k)| \leq C^k \|y_1\| \cdots \|y_k\| / d_1 \cdots d_k,\ k = 0, 1, 2, ...$$

を満たすものがある．ここで C は n のみに依存する定数で K にはよらない．

注意：ここで

$$\phi^{(k)}(x; y_1, ..., y_k) = \prod_{\ell=1}^{k} \langle y_\ell, \frac{\partial}{\partial x} \rangle \phi(x) = (\prod_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial t_j}) \phi(x + t_1 y_1 + \cdots + t_k y_k)_{t=0}$$

である．従って $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ のとき $\partial_x^\alpha \phi(x) = \phi^{(|\alpha|)}(x; e_1, ..., e_1, ..., e_n, ..., e_n)$ で

$$|\partial_x^\alpha \phi(x)| \leq |\phi|_{|\alpha|}^g g^{|\alpha_1|/2}(e_1) \cdots g(e_n)^{|\alpha_n|/2}$$

が成立する．
証明：補題 1.2.1 で $a_j = d_{j+1}$ ととり，$h(t)$ を $h(t) = u(t + \sum d_j/2)$ で定義する．このとき

$$\int |h^{(j)}(t)| dt \leq 2^j / d_1 \cdots d_j,\ \ \int h(t) dt = 1$$

が成立している．今 $\chi(x) = h(x_1) h(x_2) \cdots h(x_n)$ また v を集合 $\{y \mid$ ある $x \in K$ があって $\|x-y\| \leq d/2\}$ の特性関数とし $\phi = v * \chi$ とおく．このとき

$$|\partial^\alpha \phi| \leq \int |\partial^\alpha \chi| dx \leq 2^{|\alpha|} / d_1 \cdots d_{|\alpha|}.$$

これから補題を得る．　(証終)

　$s > 1$ に対して $d_j = j^s$ ととると，補題の $\phi(x)$ は $|\partial^\alpha \phi(x)| \leq C^{|\alpha|} |\alpha|!^s$ を満たす．

$\mathbf{R}^n$ の各点 x に正定値二次形式 $g_x(y)$, $y \in \mathbf{R}^n$ が与えられているとする．g_x は内積 (従ってノルム) を定義し，従って各点に距離が与えられている．

定義：正の定数 c, C が存在して

$$g_x(y) \leq c \Longrightarrow g_x(t)/C \leq g_{x+y}(t) \leq C g_x(t),\ t \in \mathbf{R}^n$$

が成立するとき，g は緩変化という．この g からノルム $\|y\|_x = g_x(y)^{1/2}$ が得られる．また $u \in C^k$ に対して

$$|u|_k^g(x) = \sup_{t_j \in \mathbf{R}^n} |u^{(k)}(x; t_1, ..., t_k)| / \prod_{j=1}^{k} g(t_j)^{1/2}$$

と書くことにする．

補題 1.2.3 g は $\mathbf{R}^n$ で緩変化とする．いま $\epsilon^2 < 1/C$ とすると，$\mathbf{R}^n$ の点列，$x_1, x_2, ...$ を選んで $\epsilon^2 cC < R^2 < c$ のとき

$$B_\nu^R = \{x \mid g_{x_\nu}(x - x_\nu) < R^2\}$$

が $\mathbf{R}^n$ を覆い，さらに $N = (2C/\epsilon + 1)^n$ 個以上の $B_{x_\nu}^R$ の交わりは空であるようにできる．

証明：$\|y\|_x = g_x(y)^{1/2}/\sqrt{c}$ とおく．このとき

$$\|x - y\|_x < 1 \Longrightarrow \|t\|_y / C^{1/2} \le \|t\|_x \le C^{1/2} \|t\|_y$$

である．$\mathcal{M} = \{\{x_\nu\} \mid \|x_\mu - x_\nu\|_{x_\nu} \ge \epsilon, \nu \ne \mu\}$ とおく．

$$\{x_\nu\} \prec \{y_\nu\} \Longleftrightarrow \{x_1, ...\} \subset \{y_1, ...\}$$

と定義するとき，$\mathcal{M}$ がこの順序に関して帰納的であることを示す．$\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ を全順序集合とするとき，$\sup \mathcal{E}$ の存在することを示せばよい．いま $\mathbf{R}^n$ を増大するコンパクト集合の列 $\{K_n\}$ で覆っておく．このとき K_n は有限個の，たとえば k 個の $U_w = \{x \mid \|x - w\|_w < \delta\}$ で覆われる．今 $2C^{1/2}\delta < \epsilon$ ならば $\{x_\nu\} \in \mathcal{M}$ のとき $U_w \cap \{x_\nu\}$ は高々一点からなる．従って $K_n \cap \{x_\nu\}$ は高々 k 個の点よりなる．このことから $K_n \cap \mathcal{E} = \{K_n \cap \{x_\nu\} \mid \{x_\nu\} \in \mathcal{E}\}$ とするとき $\max(K_n \cap \mathcal{E})$ が存在する．したがって

$$\bigcup_n \max(K_n \cap \mathcal{E}) = \{z_\nu\}$$

となる $\{z_\nu\}$ が存在し，これが $\sup \mathcal{E}$ である．$\mathcal{M}$ が帰納的であることが分かったので Zorn の補題より $\mathcal{M}$ に極大元 $\{x_\nu\}$ が存在する．$\{x_\nu\}$ が極大元であることから，任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対してある ν があって $\|x - x_\nu\|_{x_\nu} < \epsilon$ か $\|x - x_\nu\|_x < \epsilon$ のいずれかが成り立つ．すなわち，$x \in B_\nu^R$ である．故に B_ν^R は $\mathbf{R}^n$ を覆う．さて $x \in B_\mu^R \cap B_\nu^R$ とする．$\epsilon \le \|x_\mu - x_\nu\|_{x_\nu} \le C^{1/2} \|x_\mu - x_\nu\|_x$ であるから $V_\mu = \{y \mid \|y - x_\mu\|_x < \epsilon/2C^{1/2}\}$ とおくと

$$V_\mu \cap V_\nu = \emptyset$$

である．他方 $\|x-x_\nu\|_x \le C^{1/2}\|x-x_\nu\|_{x_\nu} < C^{1/2}R/\sqrt{c} \le C^{1/2}$ などから V_μ, V_ν はともに $\{y \mid \|y-x\|_x < C^{1/2}+\epsilon/2C^{1/2}\}$ に含まれる．従って $x \in B_\mu^R$ なる B_μ^R の個数を N とすると $(\epsilon/2C^{1/2})^n N \le (C^{1/2}+\epsilon/2C^{1/2})^n$ すなわち，$N \le (1+2C/\epsilon)^n$．（証終）

ここで，微分の連鎖律を証明しておく．まず $t=(t_1,...,t_r)\in \mathbf{R}^r$, $X=(X_1,...,X_r)$, $X_i \in \mathbf{R}^n$, $Xt=\sum_{j=1}^r t_jX_j$ とし

$$\phi(x+Xt)=\sum_{|\alpha|\le r}\phi_\alpha(x;X)t^\alpha+O(|t|^{r+1})$$

と書くとき $\phi^{(r)}(x;X_1,...,X_r)=\phi_{(1,1,...,1)}(x;X)$ であるから

$$\phi^{(r)}(x;X_1,...,X_r)=(\frac{\partial}{\partial t})^{\tilde{e}}\phi(x+Xt)|_{t=0}$$

である．ただし $\tilde{e}=(1,1,...,1)\in\mathbf{N}^r$．さて

$$\begin{aligned}(\phi\psi)^{(r)}(x;X_1,...,X_k)&=(\frac{\partial}{\partial t})^{\tilde{e}}\big[\phi(x+Xt)\psi(x+Xt)\big]_{t=0}\\&=\sum_{\alpha+\gamma=\tilde{e}}\frac{\tilde{e}!}{\alpha!\beta!}(\frac{\partial}{\partial t})^\alpha\phi(x+Xt)_{t=0}(\frac{\partial}{\partial t})^\beta\psi(x+Xt)_{t=0}\end{aligned}$$

ところで $\alpha+\beta=(1,1,...,1)$ であるから右辺は

$$\sum_{k=0}^r\sum_{j_1,...,j_k,i_1,...,i_{r-k}}\phi^{(k)}(x;X_{j_1},...,X_{j_k})\psi^{(r-k)}(x;X_{i_1},...,X_{i_{r-k}})$$

に等しい．従って $|(\phi\psi)^{(r)}(x;X_1,...,X_r)|\le\sum_{k=0}^r\binom{r}{k}|\phi|_k^g|\psi|_{r-k}^g\prod_{i=1}^r g(X_i)^{1/2}$ 故に

$$|\phi\psi|_r^g\le\sum_{k=0}^r\binom{r}{k}|\phi|_k^g|\psi|_{r-k}^g$$

が成立する．

補題 1.2.4 $\mathbf{R}^n$ の点列，$x_1,x_2,...$ と $N_0\in\mathbf{N}$ があって $B_\nu^R=\{x\in\mathbf{R}^n \mid g_{x_\nu}(x-x_\nu)<R^2\}$ とするとき，$c/16\le R^2$ ならば $\{B_\nu^R\}$ は $\mathbf{R}^n$ を覆い，$R^2<c$ ならば N_0 個以上の B_ν の交わりは空になる．さらに $c/4<R^2<c$ ならば $\sum d_j=1$ なる単調非増加列 $\{d_j\}$ にたいして $\phi_\nu\in C_0(B_\nu)$ かつ $\sum\phi_\nu=1$ で

$$|\phi_\nu|_k^g(x)\le(C_1C^{1/2}N_0/c^{1/2})^k/d_1\cdots d_k$$

を満たす ϕ_ν が存在する．ここで B_ν は $R=c^{1/2}/2$ で定義されたものとする．

証明：補題 1.2.3 で $\epsilon = 1/4C^{1/2}$ ととると最初の二つの主張は明らかである．さて補題 1.2.2 によると，任意の ν に対して $B_\nu^{\sqrt{c}/4}$ 上で 1 となる $\psi_\nu \in C_0^\infty(B_\nu^{\sqrt{c}/2})$ で

$$|\psi_\nu^{(k)}(x; y_1, ..., y_k)| \le (4C_2/\sqrt{c})^k g_{x_\nu}(y_1)^{1/2} \cdots g_{x_\nu}(y_k)^{1/2}/d_1 \cdots d_k$$

の成立するものがある．実際，$\|\cdot\|$ をユークリッドノルムとするとき，補題 1.2.2 から $\{x \mid \|x\| < \sqrt{c}/4\}$ 上で 1, $\mathrm{supp}\tilde{\psi} \subset \{x \mid \|x\| < \sqrt{c}/2\}$ でかつ補題 1.2.2 の評価を満たす $\tilde{\psi}$ がある． $g_{x_\nu}(Mt) = \|t\|^2$ となる n 次行列 M を選んで $\psi_\nu(x) = \tilde{\psi}(M^{-1}(x - x_\nu))$ とおけばよい．ところで $x \in \mathrm{supp}\psi_\nu$ なら $g_{x_\nu}(t) \le C g_x(t)$ であるから

$$|\psi_\nu|_k^g(x) \le (4C^{1/2}C_2/\sqrt{c})^k/d_1 \cdots d_k \tag{1.2.2}$$

が成立する．ここで ϕ_ν を

$$\phi_\nu = \psi_\nu(1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{\nu-1}), \quad (\phi_1 = \psi_1) \tag{1.2.3}$$

と定義すると，明らかに $\sum \phi_\nu = 1$ である．さて (1.2.3) は x を固定するごとには，高々 N_0 個の積であるから連鎖律によって (1.2.2) から結論が従う． (証終)

特に $s > 1$ に対して $d_j = c_1 j^{-s}$, $\sum d_j = 1$ ととると

$$|\phi_\nu|_k^g(x) \le C^k k!^s, \quad k = 0, 1, ...$$

が成立する．

1.3 ガウス型の変換

ここでは $e^{iA(D)}$ が滑らかなコンパクト台の関数にどのように作用するかを調べる．ここで $A(\xi)$ は ξ の実二次形式でたとえば 1.1 節の σ_s のようなものを考えている．g を $\mathbf{R}^n$ 上の正定値二次形式とする．$K = \{x \mid g(x) < 1\}$ とし $u \in C_0^\infty(K)$ を考える．さて $|e^{iA(\xi)} - \sum_{j<k}(iA(\xi))^j/j!| \le |A(\xi)^k/k!|$ であるから両辺の Fourier (フーリエ) 変換を考えると Parseval (パーセバル) の等式から

$$\|e^{iA(D)}u - \sum_{j<k}(iA(D))^j u/j!\|_{L^2}^2 \le \|A(D)^k u/k!\|_{L^2}^2$$

が従う．$s > n/2$ として

$$|v(x)|^2 \le \left(\int |\hat{v}(\xi)| d\xi\right)^2$$
$$\le \int \langle\xi\rangle^{-2s} d\xi \int \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \le C \sum_{|\alpha| \le s} \|D^\alpha v\|_{L^2}^2 \tag{1.3.1}$$

であるから (ただし $\langle\xi\rangle^2 = 1+|\xi|^2$)

$$\sup |e^{iA(D)}u(x) - \sum_{j<k}(iA(D))^j u(x)/j!| \le \frac{C}{k!}\sum_{|\alpha|\le s}\|A(D)^k D^\alpha u\|_{L^2}$$

が成立する．$\|\cdot\|$ をユークリッドのノルムとするとき，M を n 次正則行列で $g(Mx) = \|x\|^2$ となるように選ぶと，$\tilde{A}(\xi) = A({}^tM^{-1}\xi)$, $\tilde{u}(x) = u(Mx)$ として

$$\begin{aligned}
&\sup_x |e^{iA(D)}u(x) - \sum_{j<k}(iA(D))^j u(x)/j!| \\
&= \sup_x |e^{i\tilde{A}(D)}\tilde{u}(x) - \sum_{j<k}(i\tilde{A}(D))^j \tilde{u}(x)/j!| \\
\le C\sup_{j\le s}\sup_{\|y\|\le 1} &|\tilde{A}(D)^k\tilde{u}|_j^e(y)/k! = C\sup_{j\le s}\sup_{y\in K}|A(D)^k u|_j^g(y)/k! \quad (1.3.2)
\end{aligned}$$

が従う．ここで $e(t) = \|t\|^2$ で C は g によらない．(1.3.2) をさらに調べる．$L(y) = \langle y-x, \eta\rangle$ とする．x はパラメーターとみている．さてフーリエ変換を考え，

$$\widehat{y_j u}(\xi) = -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\hat{u}(\xi), \quad \widehat{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}}(\xi) = \xi_j\hat{u}(\xi)$$

などに注意すると

$$[e^{iA(D)}, L] = 2e^{iA(D)}\langle A\eta, D\rangle$$

が分かる．今 L は K 上で零にならないとする．すると

$$e^{iA(D)}u = [e^{iA(D)}, L]L^{-1}u + Le^{iA(D)}L^{-1}u$$

において $y = x$ とおくと $L(x) = 0$ であるから

$$e^{iA(D)}u(x) = 2e^{iA(D)}(\langle A\eta, D\rangle L^{-1}u)(x)$$

が成立する．この操作を k 回くり返すことによって

$$e^{iA(D)}u(x) = 2^k e^{iA(D)}\big(\{\langle A\eta, D\rangle L^{-1}\}^k u\big)(x) \tag{1.3.3}$$

を得る．(1.3.2) の $k=0$ の式と (1.3.3) から

$$|e^{iA(D)}u(x)| \le 2^k C\sup_{j<s}\sup_{y\in K}|\{\langle A\eta, D\rangle L^{-1}\}^k u|_j^g(y) \tag{1.3.4}$$

が成立する．(1.3.4) を考慮して $|\{\langle A\eta, D\rangle L^{-1}\}^k u|_j^g$ を評価しよう．

補題 1.3.1 L は $\{y \mid g(y) \le R^2\} = RK,\ R > 1$ 上で零にならないとする．このとき

$$|L(0)/L|_k^g(y) \le k!\frac{R}{(R-1)^{k+1}}, \quad y \in K$$

が成立する．

証明:不等式は L を零でない定数倍しても不変であるから $L(y) = 1-\langle y, \eta\rangle$ としてよい．つぎに n 次正則行列 M が $L(My) = 1 - ay_1,\ g(My) = \|y\|^2$ となるように選べることに注意する．実際，$L(y) = 1 - ay,\ g(y) = \sum g_{ij}y_iy_j$ と仮定してよく，つぎに変数 y_n から順に Lagrange (ラグランジュ) の方法で標準形に変換していけばよい．従って $L(y) = 1 - ay_1$, $g(y) = \|y\|^2, K = \{y \mid \|y\| \le R\}$ と仮定してよい．このとき $-1 < aR < 1$ であり，従って $\|y\| \le 1$ のとき

$$\begin{aligned}|\partial_y^k(1-ay_1)^{-1}| &\le \frac{a^k k!}{(1-ay_1)^{k+1}} \le \frac{a^k k!}{(1-a)^{k+1}} \\ &\le \frac{R^{-k}k!}{(1-1/R)^{k+1}} = \frac{Rk!}{(R-1)^{k+1}}\end{aligned}$$

となって結論を得る． (証終)

さて $(\langle A\eta, D\rangle u)^{(i)}(x; X_1, ..., X_i) = u^{(i+1)}(x; X_1, ..., X_i, A\eta)$ であるから

$$|\langle A\eta, D\rangle^p u|_i^g \le g(A\eta)^{p/2}|u|_{i+p}^g$$

が成立する．従って，$\langle A\eta, D\rangle L^{-1} = L(0)^{-1}\langle A\eta, D\rangle(L(0)/L)$ と書くと，連鎖律と補題 1.3.1 から，帰納的に

$$|\{\langle A\eta, D\rangle L^{-1}\}^k u|_j^g \le C_{R,k+j}(g(A\eta)^{1/2}/L(0))^k \sup_{i\le k+j}|u|_i^g$$

を得る．(1.3.4) に上の評価を適用すると

$$|e^{iA(D)}u(x)| \le C_{R,k}\Big(\frac{g(A\eta)^{1/2}}{|L(0)|}\Big)^k \sup_y \sup_{j\le s+k}|u|_j^g(y)$$

が任意の $u \in C_0^\infty(K)$ に対して成立する．$g(A\eta)^{1/2}/L(0)$ をできるだけ小さく評価するため， $g(A\eta)^{1/2}/|L(0)| = g(A\eta)^{1/2}/|\langle x, \eta\rangle|$ に注意して，次の定義を導入しよう．

定義：$\xi \mapsto g(A\xi)$ の双対形式 $g^A(x)$ を

$$g^A(x) = \sup_{g(A\xi)<1}\langle x, \xi\rangle^2$$

で定義する．$A=I$ のときは双対形式を $g'(x)$ で表すことにする．

$$g^A(A\eta)=\sup_{y\in \mathrm{Ran}A}\frac{\langle \eta,y\rangle^2}{g(y)}$$

であり，とくに A が正則ならば $g^A(x)=g^{-1}(A^{-1}x)$ となる．

さて $\inf_{y\in RK} g^A(x-y)=a^2>0$ と仮定する．すなわち

$$\{g(y)<R^2\}\cap\{y\mid g^A(x-y)<a^2\}=\emptyset.$$

従って Hahn-Banach (ハーン–バナッハ) の定理から $\eta\in\mathbf{R}^n$ が存在して，$g(y)<R^2$, $g^A(z)<a^2$ を満たすすべての y, z に対して

$$\langle z+x,\eta\rangle>\langle y,\eta\rangle$$

が成立する．定義から $\inf_{g^A(z)<a^2}\langle z,\eta\rangle=-ag(A\eta)^{1/2}$，従って $\langle y,\eta\rangle\le\langle x,\eta\rangle-ag(A\eta)^{1/2}$ が $g(y)<R^2$ を満たすすべての y に対して成立する．$L(y)=\langle y-x,\eta\rangle$ とおくと，$\langle y,\eta\rangle\ge 0$, $g(y)<R^2$ なる y があるから

$$g(A\eta)^{1/2}/|L(0)|\le a^{-1}\le(\inf_{y\in RK} g^A(x-y))^{-1/2}$$

を得る．以上のことをまとめて次の基本的な評価を得る．

命題 1.3.1 g を正定値の二次形式，A を実二次形式とし，$K=\{y\mid g(y)<1\}$ とおく．このとき任意の $k\ge 0$, $R>1$, $2s>n$ および $u\in C_0^\infty(K)$ に対して

$$|e^{iA(D)}u(x)-\sum_{j<k}(iA(D))^j u(x)/j!|\le C\sup_{j\le s}\sup_{y\in K}|A(D)^k u|_j^g(y)/k!,$$

$$|e^{iA(D)}u(x)|\le C_{R,k}(1+\inf_{y\in RK} g^A(x-y))^{-k/2}\sup_{j\le s+k}\sup_{y\in K}|u|_j^g(y)$$

が成り立つ．

1.4　表象のガウス型変換

次の定義から始める．

定義：$m(x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上の正値関数とし，g は緩変化な二次形式とする．正の定数 c, C があって

$$g_x(y)<c\Longrightarrow m(x)/C\le m(x+y)\le Cm(x)$$

が成り立つとき $m(x)$ は g 連続であるという．

さてこの $m(x)$ と g を使って表象のクラスを導入しよう.

定義： $m(x)$ を g 連続とする. $S(m,g)$ を全ての $k \geq 0$ および全ての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\sup_x |u|_k^g(x)/m(x) < \infty$$

を満たす $u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ の全体とする. $\sup |u|_k^g(x)/m(x)$ で $S(m,g)$ にセミノルムを定義する.

まず $u \neq 0$ なる u に対して $1/u$ を評価しておく.

補題 1.4.1 $u \in C^k$ で $u \neq 0$ とする. このとき

$$\big|\frac{1}{u}\big|_k^g(x) \leq C_k\big(|u(x)|^{-1-1/k}|u|_1^g(x) + \cdots + |u(x)|^{-2/k}|u|_k^g(x)^{1/k}\big)^k$$

が成立する.

証明：$u(\hat{x}) = 1$ とする. $v(x) = 1 - u(x)$ とおくと, $u(x)\sum_{j\leq k} v(x)^j = 1 - v(x)^{k+1}$ すなわち $[1 - v(x)^{k+1}]/u(x) = \sum_{j\leq k} v(x)^j$. さて $v(\hat{x}) = 0$ 故両辺を微分して

$$\Big(\frac{1}{u}\Big)^{(k)}_{x=\hat{x}} = (\sum_{j\leq k} v(x)^j)^{(k)}_{x=\hat{x}}.$$

右辺は連鎖律から

$$(|v|_1^g)^{p_1}(|v|_2^g)^{p_2}\cdots(|v|_\ell^g)^{p_\ell}, \quad p_1 + 2p_2 + \cdots + \ell p_\ell = k$$

なる項の和で評価される. これらの項は $(|v|_1^g + (|v|_2^g)^{1/2} + \cdots (|v|_\ell^g)^{1/\ell})^k$ で評価されるので結論を得る. $u(\hat{x}) = a$ のときは $\tilde{u}(x) = a^{-1}u(x)$ とおいて同じ議論をくり返せばよい. (証終)

連鎖律および補題 1.4.1 によれば次は明らかである.

補題 1.4.2 $u_i \in S(m_i, g)$, $i = 1, 2$ なら $u_1u_2 \in S(m_1m_2, g)$. また $u \in S(m,g)$ かつ $1/|u| < C/m$ ならば $1/u \in S(1/m, g)$.

K を $\mathbf{R}^n$ のかってなコンパクト集合とするとき, 点 $x_1, ..., x_N$ があって K は $\{y \mid g_{x_i}(y - x_i) < c\}$ で覆われるのでかってな m に対して $C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \subset S(m,g)$ であることに注意しよう.

ここで次の定義をする.

定義：各点 $x \in \mathbf{R}^n$ に正定値二次形式 g_x が与えられているとする. この g_x が点 $x \in \mathbf{R}^n$ に関して A 緩増加とは g_x が緩変化であって, かつ定数 C, N が存在して

$$g_y(t) \leq Cg_x(t)(1 + g_y^A(x-y))^N, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n,\ \forall t \in \mathbf{R}^n$$

の成立することをいう．また g 連続な正値関数 $m(x)$ が点 x に関して A, g 緩増加とは，正数 C, N が存在して

$$m(y) \le Cm(x)(1+g_y^A(x-y))^N, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n$$

の成立するときをいう．

g_x が $x \in \mathbf{R}^n$ に関して A 緩増加ならば $g_x^A(t) \le Cg_y^A(t)(1+g_y^A(x-y))^N$ も成立する．A が正則なら逆も正しい．さて $\sqrt{c}/2 < R < R_0 < \sqrt{c}$ として $B_\nu = \{x \mid g_{x_\nu}(x-x_\nu) < R^2\}$, $U_\nu = \{x \mid g_{x_\nu}(x-x_\nu) \le R_0^2\}$, $U'_\nu = \{x \mid g_{x_\nu}(x-x_\nu) \le c\}$ とおく．1.2 節で構成した $\{B_\nu\}$ に従属する 1 の分解 $\{\phi_\nu\}$ をとって $u_\nu = \phi_\nu u$ とおく．$g(t) = g_{x_\nu}(t)/R^2$, $u = u_\nu(x+x_\nu)$ として命題 1.3.1 を適用すると

$$|e^{iA(D)}u_\nu(x)| \le C_{\tilde{R},k}(1+\inf_{y\in\tilde{R}K} g^A(x-x_\nu-y))^{-k/2} \sup_{x\in K}\sup_{j\le s+k}|u_\nu|_j^g(x)$$

が成立する．ここで $R\tilde{R} = R_0$ である．$\inf_{y\in\tilde{R}K} g^A(x-x_\nu-y) = R^2 = \inf_{z\in U_\nu} g_{x_\nu}^A(z-x)$ であるから

$$|e^{iA(D)}u_\nu(x)| \le C_k(1+\inf_{y\in U_\nu} g_{x_\nu}^A(x-y))^{-k/2} \sup_{B_\nu}\sup_{j\le s+k}|u_\nu|_k^g \quad (1.4.1)$$

が成立する．さて

$$d_\nu(x) = \inf_{y\in U_\nu} g_y^A(x-y)$$

とおく．

補題 1.4.3 $g_x \le g_x^A$ で g は x に関して A 緩増加とする．このとき C, N があって

$$\sum_\nu (1+d_\nu(x))^{-N} \le C$$

が成立する．

証明：$M_k = \{\nu \mid d_\nu(x) \le k\}$ とおく．いま $\#(M_k) \le Ck^N$ が示せたとすると, $M > N$ ととって

$$\begin{aligned}\sum_\nu (1+d_\nu(x))^{-M} &= \sum_{\nu\in M_1}(1+d_\nu(x))^{-M} + \cdots \\ &\quad + \sum_{M_{2^k}\setminus M_{2^{k-1}}}(1+d_\nu(x))^{-M} + \cdots \\ &\le |M_1| + |M_2|(1+1)^{-M} + \cdots + |M_{2^k}|(1+2^{k-1})^{-M} + \cdots \\ &\le \sum_k C2^N 2^{-(M-N)(k-1)} < +\infty\end{aligned}$$

から結論を得る．いま g は $\bar{x}$ に関して A 緩増加であるとして，$\#\{\nu \mid d_\nu(\bar{x}) \le k\} \le Ck^N$ を示す．まず $\bar{x}=0$, $g_0(t)=|t|^2$ と仮定してよいことをみておく．実際 $g_{\bar{x}}(Tt)=|t|^2$ となるように T を選び，$G_x(t)=g_{\bar{x}+Tx}(Tt)$, $\tilde{A}=T^{-1}A{}^tT^{-1}$ とおくと G_x は $x=0$ に関して $\tilde{A}$ 緩増加であり，$\tilde{U}_\nu=\{x \mid G_{\tilde{x}_\nu}(x-\tilde{x}_\nu) \le R_0^2\}$, $\tilde{x}_\nu=T^{-1}(x_\nu-\bar{x})$ とするとき $d_\nu(\bar{x})=\inf_{y\in\tilde{U}_\nu} G_y^{\tilde{A}}(-y)$ である．

$\nu\in M_k$ のとき，$g_{y_\nu}^A(-y_\nu)\le k$ なる $y_\nu\in U_\nu$ がある．このとき

$$g_{y_\nu}(t) \le Cg_0(t)(1+g_{y_\nu}^A(-y_\nu))^N \le Ck^N|t|^2$$

である．g は緩変化であるから，$|t|\le c_1k^{-N/2}$ とし c_1 を十分小さくとると $g_{x_\nu}(t)<(\sqrt{c}-R_0)^2$ が成り立つとしてよい．

$$\begin{aligned} g_{x_\nu}(y_\nu+t-x_\nu) &\le g_{x_\nu}(y_\nu-x_\nu)+g_{x_\nu}(t) \\ &\quad +2\sqrt{g_{x_\nu}(y_\nu-x_\nu)g_{x_\nu}(t)} < c \end{aligned}$$

より，$y_\nu+t\in U'_\nu$ となる．すなわち $V_\nu=\{y_\nu+t \mid |t|\le c_1k^{-N/2}\}$ とすると，$V_\nu\subset U'_\nu$. N_1 個以上の U'_ν の交わり，従って V_ν の交わりは空であるから

$$c'|M_k|k^{-nN/2} \le \sum_{\nu\in M_k} m(V_\nu) \le N_1 m(\bigcup_{\nu\in M_k} V_\nu)$$

となる．ところで仮定から

$$|y_\nu|^2=g_0(y_\nu)\le g_0^A(y_\nu)\le Cg_{y_\nu}^A(y_\nu)(1+g_{y_\nu}^A(-y_\nu))^N \le Ck^{N+1}$$

であるから $m(\cup_{\nu\in M_k}V_\nu)\le c''k^{n(N+1)/2}$ となって結論を得る．　(証終)

(1.4.1) から

$$|e^{iA(D)}u_\nu(x)| \le C_k(1+d_\nu(x))^{-k/2} \sup_{j\le s+k}\sup_{U_\nu}|u_\nu|_j^g \tag{1.4.2}$$

である．

系 1.4.1 $m(x)$ を x に関して A, g 緩増加とするとき，次が成立する．

$$\sum_\nu |e^{iA(D)}u_\nu(x)| \le Cm(x)\sup_{j\le s+k}\sup(|u|_j^g/m).$$

さて $g_x\le g_x^A$ で g_x は x に関して A 緩増大とする．$u\in S(m,g)$ に対して $(e^{iA(D)}u)(x)$ を

$$(e^{iA(D)}u)(x)=\sum_\nu e^{iA(D)}u_\nu(x)$$

で定義しよう．このとき $u \mapsto (e^{iA(D)}u)(x)$ は $S(m,g)$ の各有界集合の上で C^∞ 位相で連続な汎関数となる．実際 $\{u_p\}$ を $S(m,g)$ で有界で u_p は u に C^∞ で収束するとする．$\{u_{p\nu}\}$, $u_{p\nu} = \phi_\nu u_p$ は $S(m,g)$ で有界である．従って (1.4.2) から任意の $\epsilon > 0$ に対して，有限集合 M があって

$$\sum_{\nu \notin M} |e^{iA(D)} u_{\nu p}(x)| \le \epsilon$$

が全ての p に対して成立する．他方 $\nu \in M$ に対して $e^{iA(D)}u_{\nu p}(x)$ は $e^{iA(D)}u_\nu(x)$ に収束するから $e^{iA(D)}u_p(x)$ が $e^{iA(D)}u(x)$ に収束することが従う．このように $S(m,g)$ の各有界集合上で，C^∞ の位相で連続なとき，弱連続ということにする．まとめておくと

命題 1.4.1 g は x に関して A 緩増加で $g_x \le g_x^A$ を満たすとし，$m(x)$ は x に関して A, g 緩増加とする．このとき $S(m,g) \ni u \mapsto e^{iA(D)}u(x)$ は $S(m,g)$ 上で弱連続な汎関数に一意的に拡張される．さらに $S(m,g)$ のあるセミノルム $\|\cdot\|$ に対して

$$|e^{iA(D)}u(x)| \le m(x)\|u\|$$

が成り立つ．

$\{u_j\}$ は $S(m,g)$ で有界で u_j は u に各点収束するとする．このとき，u_j は C^∞ で u に収束する．実際，$K \subset \mathbf{R}^n$ を任意のコンパクト集合とするとき，$K \subset \cup_{p=1}^L \{g_{x_p}(x - x_p) < \delta\}$ となる $x_1,...,x_L$ が存在する．ここで $0 < \delta < c$ ととっておく．g は緩変化，m は g 連続であるから，K 上では m は正の定数，g は $x \in K$ によらない二次形式としてよく，従って

$$|\partial^\alpha u_j(x)| \le C_\alpha, \quad \forall j,\ \forall x \in K$$

が成立する．故に $\{u_j\}$ は一様有界，同等連続となって，u に K 上一様収束する．以下，導関数についても同様である．

次に $V \subset \mathbf{R}^n$ を部分空間として $e^{iA(D)}u$ を V 上で考えたい．まず，$t_j \in \mathbf{R}^n$ とするとき

$$|\langle t_1, D\rangle \cdots \langle t_k, D\rangle e^{iA(D)}u_\nu(x)| \le C_\ell (1+d_\nu(x))^{-\ell/2} m(x) \prod_{j=1}^k g_x(t_j)^{1/2} \|u_\nu\| \tag{1.4.3}$$

の成立することをみる．実際 $v = \langle t_1, D\rangle \cdots \langle t_k, D\rangle u_\nu$, $\tilde{m}(y) = m(y)\prod_{j=1}^k g_y(t_j)^{1/2}$ とおくと $\tilde{m}$ は x に関して A, g 緩増加であり，$v \in S(\tilde{m}, g)$ となるので，$e^{iA(D)}\langle t_1, D\rangle \cdots \langle t_k, D\rangle u_\nu = \langle t_1, D\rangle \cdots \langle t_k, D\rangle e^{iA(D)} u_\nu(x)$ に注意して (**??**) を適用すればよい．

命題 1.4.2 g は $x \in V$ について一様に A 緩増加かつ $g_x \leq g_x^A$ とし，m は $x \in V$ について一様に A, g 緩増加とする．このとき $\{u_p\}$ が $S(m,g)$ の有界集合で C^∞ 位相で $u_p \to u$，すなわち u に弱収束するとすると，

$$e^{iA(D)}u_p|_V$$

は $S(m,g)|_V$ で $e^{iA(D)}u|_V$ に弱収束する．特に，$u \in S(m,g)$ に対し，$e^{iA(D)}u|_V \in S(m,g)|_V$ である．

証明：$\{e^{iA(D)}u_p|_V\}$ の有界性については $t_j \in V$ ととって，(1.4.3) を $u_{p\nu}$ に適用すればよい．収束性については，$\{v_j\}$ が $S(m,g)$ で有界のときは C^∞ での収束と各点収束は同値であることに注意すればよい．　(証終)

さて

$$h(x)^2 = \sup_t \frac{g_x(t)}{g_x^A(t)}$$

とする．h は g 連続で，g が x に関して A 緩増加なら，h は x に関して A, g 緩増加である．次の簡単な補題に注意する．

補題 1.4.4 g を $\mathbf{R}^n$ 上の正定値二次形式とし，$g/g^A \leq h$ とする．このとき

$$|A(D)v(x)| \leq nh|v|_2^g(x).$$

証明：$g(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2$, $A(\xi) = \sum_{j=1}^n b_j\xi_j^2$ と仮定してよい．このとき $h = \sup|b_j|$ である．従って

$$b_jD_j^2v = b_j(v^{(2)}(x;e_j,e_j)/g(e_j))g(e_j)$$

から明らかである．　(証終)

最後に剰余項の評価を与えよう．

$$R_k = e^{iA(D)} - \sum_{j<k}(iA(D))^j/j!$$

とおく．いま $x \in U'_\nu$ とする．命題 1.4.1 より

$$|R_ku_\nu(x)| \leq C \sup_{j \leq s} \sup_{y \in U'_\nu} |A(D)^ku_\nu|_j^g(y)/k!$$

が成立している．補題 1.4.4 より，右辺は

$$C\frac{n^k}{k!}h(x)^km(x)\sup\bigl(|u|_{s+2k}^g/m\bigr)$$

で評価される．従って $x \in U'_\nu$ なる ν について和をとると

$$\sum_{\nu, x\in U'_\nu} |R_k u_\nu(x)| \le CN_2 h(x)^k m(x) \sup\bigl(|u|^g_{s+2k}/m\bigr)$$
$$\le h(x)^k m(x)\|u\| \tag{1.4.4}$$

が従う．次に $x \notin U'_\nu$ とする．

$$g_{x_\nu}(x-y) \ge (\sqrt{c}-R_0)^2 = c_1 > 0, \quad y \in U_\nu$$

であるから，

$$c_2 \le g_y(x-y) \le h(y)^2 g^A_y(x-y) \le Ch(x)^2(1+g^A_y(x-y))^{N'}$$

が成り立つ．従って

$$x \notin U'_\nu \Longrightarrow 1 \le Ch(x)^2(1+d_\nu(x))^{N'}$$

が従う．故に命題 1.4.1 より $u \in C_0^\infty(B_\nu)$ に対して $x \notin U'_\nu$ のとき

$$|e^{iA(D)}u(x)| \le C_\ell h(x)^k(1+d_\nu(x))^{(N'k-\ell)/2} \sup_{j\le s+\ell}\sup_{B_\nu}|u|^g_j \tag{1.4.5}$$

が成立する．ν に関する和を次のように分けると

$$\sum_\nu R_k u_\nu(x) = \sum_{\nu, x\in U'_\nu}\bigl(e^{iA(D)} - \sum_{j<k}(iA(D))^j/j!\bigr)u_\nu(x)$$
$$+ \sum_{\nu, x\notin U'_\nu} e^{iA(D)}u_\nu(x)$$

ある $S(m,g)$ のセミノルム $\|\cdot\|$ に対して

$$|R_k u(x)| \le Ch(x)^k m(x)\|u\|$$

となることが従う．

命題 1.4.3 命題 *1.4.2* と同じ仮定をする．このとき $u \in S(m,g)$ に対して

$$|R_k u|^g_\ell(x) \le h(x)^k m(x)\|u\|, \quad x \in V$$

が成立する．また $\{u_j\}$ が $S(m,g)$ で u に弱収束するとき，$R_k u_j$ も $S(mh^k, g)|_V$ で $R_k u$ に弱収束する．

証明：命題 1.4.2 の証明をくり返せばよい．　(証終)

例として $\mathbf{R}^{2n}$ 上の二次形式

$$g_{(x,\xi)}(dx,d\xi)=\langle\xi\rangle^{2\delta}|dx|^2+\langle\xi\rangle^{-2\rho}|d\xi|^2 \tag{1.4.6}$$

を考える．$\rho\le 1$ のとき，g は緩変化である．実際 $g_{(x,\xi)}(y,\eta)<c$ なら $|\eta|^2\le c\langle\xi\rangle^2$ であり，従って c が十分小さければ

$$(1+|\xi|)/2\le 1+|\xi+\eta|\le 2(1+|\xi|)$$

が成立するから明らかである．またこれから $\langle\xi\rangle^s$, $s\in\mathbf{R}$ が g 連続であることも明らかである．

定義：

$$S^m_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n)=S(\langle\xi\rangle^m,\langle\xi\rangle^{2\delta}|dx|^2+\langle\xi\rangle^{-2\rho}|d\xi|^2)$$

と定義する．

次に $a(x,\xi)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ とする．

$$(a(x,D)u,v)=(u,b(x,D)v),\quad \forall u,\ v\in\mathcal{S}$$

が成立するとすると $b(x,\xi)$ は

$$b(x,\xi)=e^{i\langle D_x,D_\xi\rangle}\bar{a}(x,\xi) \tag{1.4.7}$$

で与えられる．(1.4.7) を考えよう．$\mathbf{R}^{2n}$ 上の二次形式 $2\langle x,\xi\rangle$ の表現行列 A は $A^t(x,\xi)={}^t(\xi,x)$ である．このとき

$$g^A=\langle\xi\rangle^{2\rho}|dx|^2+\langle\xi\rangle^{-2\delta}|d\xi|^2$$

であり，従って $h^2=\langle\xi\rangle^{2(\delta-\rho)}$ である．故に $\delta\le\rho$ のときに限って $h\le 1$ である．g が A 緩増加であるための条件は

$$\langle\xi\rangle^{-2\delta}\langle\eta\rangle^{2\delta}+\langle\xi\rangle^{2\rho}\langle\eta\rangle^{-2\rho}\le C(1+|\xi-\eta|^2\langle\eta\rangle^{-2\delta})^N \tag{1.4.8}$$

である．$\delta<1$ ならば (1.4.8) が成立する．このとき $\langle\xi\rangle^s$ は A, g 緩増加である．従って，$a\in S(\langle\xi\rangle^m,g)$ とするとき，命題 1.4.3 によると

$$b(x,\xi)-\sum_{j<N}(i\langle D_x,D_\xi\rangle)^j\bar{a}(x,\xi)/j!\in S(\langle\xi\rangle^{m-N(\rho-\delta)},g)$$

である．

1.5　ワイル－ヘルマンダー対応

g_i を $\mathbf{R}^{2n}$ の正定値二次形式とし，$G(t_1,t_2)=g_1(t_1)+g_2(t_2)$ を考える． 1.1 節でみたように $\sigma(\hat{x},\hat{\xi},\hat{y},\hat{\eta})=\langle\hat{\xi},\hat{y}\rangle-\langle\hat{x},\hat{\eta}\rangle$ を考える．$A=2\sigma(\hat{x},\hat{\xi},\hat{y},\hat{\eta})$ とおく．同じ A でこの二次形式の表現行列を表すことにする：

$$A^t(\hat{x},\hat{\xi},\hat{y},\hat{\eta})={}^t(-\hat{\eta},\hat{y},\hat{\xi},-\hat{x}).$$

さて定義から

$$G^A(x,\xi,y,\eta)=\sup|\langle x,\hat{x}\rangle+\langle\xi,\hat{\xi}\rangle+\langle y,\hat{y}\rangle+\langle\eta,\hat{\eta}\rangle|^2/(g_1(-\hat{\eta},\hat{y})+g_2(\hat{\xi},-\hat{x}))$$

である．g_j^σ を

$$g_j^\sigma(w)=\sup_{z\in\mathbf{R}^{2n}}\frac{|\sigma(w,z)|^2}{g_j(z)}$$

とするとき $G^A(w_1,w_2)=g_1^\sigma(w_2)+g_2^\sigma(w_1)$ である．実際 $w=(x,\xi)$ に対し $w'=(\xi,-x)$ と書くことにすると，

$$\begin{aligned}|\sigma(w_1,\hat{w}_1')+\sigma(w_2,\hat{w}_2')|^2&\le\{g_1^\sigma(w_2)^{1/2}g_1(\hat{w}_2')^{1/2}+g_2^\sigma(w_1)^{1/2}g_2(\hat{w}_1')^{1/2}\}^2\\&\le\{g_1^\sigma(w_2)+g_2^\sigma(w_1)\}\{g_1(\hat{w}_2')+g_2(\hat{w}_1')\}.\end{aligned}$$

故に $G^A(w_1,w_2)\le g_1^\sigma(w_2)+g_2^\sigma(w_1)$ となる．他方 $\sigma(w_1,\hat{w}_1')=g_2^\sigma(w_1)^{1/2}g_2(\hat{w}_1')^{1/2}$, $\sigma(w_2,\hat{w}_2')=g_1^\sigma(w_2)^{1/2}g_1(\hat{w}_2')^{1/2}$ となる $\hat{w}_i'$ がある．これらの $\hat{w}_i'$ は適当に定数倍することによって， $g_2(\hat{w}_1')^{1/2}g_1^\sigma(w_2)^{1/2}=g_2^\sigma(w_1)^{1/2}g_1(\hat{w}_2')^{1/2}$ を満たすとしてよい．従って結論を得る．また

$$G\le H^2G^A\Longleftrightarrow g_2\le H^2g_1^\sigma\Longleftrightarrow g_1\le H^2g_2^\sigma \tag{1.5.1}$$

である．実際，$g_2\le H^2g_1^\sigma$ かつ $g_1\le H^2g_2^\sigma$ と $G\le H^2G^A$ が同値なことは容易．他方

$$g_2\le H^2g_1^\sigma\Longleftrightarrow|\sigma(w,z)|^2\le H^2g_1^\sigma(w)g_2^\sigma(z)\Longleftrightarrow g_1\le H^2g_2^\sigma$$

である．

さて g_i が $\mathbf{R}^{2n}$ で緩変化のとき，G が $\mathbf{R}^{4n}$ で緩変化であることは明らかである．次に G がいつ $\mathbf{R}^{4n}$ の対角線集合，すなわち $\{(z,z)\mid z\in\mathbf{R}^{2n}\}$ に関して一様に A 緩増加であるかを調べる．まず $W=(z,z)$ とする．$G_{W'}\le CG_W(1+G_{W'}^A(W-W'))^N$ なら $G_W^A\le CG_{W'}^A(1+G_{W'}^A(W-W'))^N$ すなわち，$g_{1z}^\sigma(v_2)+g_{2z}^\sigma(v_1)\le C(g_{1w_1}^\sigma(v_2)+g_{2w_2}^\sigma(v_1))M^N$ が成り立たねばならない．ただし，$M=1+g_{1w_1}^\sigma(w_2-z)+g_{2w_2}^\sigma(w_1-z)$ である．とくに $g_1=g_2=g$, $w_1=w_2=w$, $v_1=v_2=v$ とすると

$$g_z^\sigma(v)\le Cg_w^\sigma(v)(1+g_w^\sigma(w-z))^N \tag{1.5.2}$$

が成り立つ．これは次と同値である．

$$g_w(v) \le C g_z(v)(1+g_w^\sigma(w-z))^N, \quad z,\ w \in \mathbf{R}^{2n}. \tag{1.5.3}$$

定義：g が緩変化で (1.5.3) が成立するとき，g は σ 緩増加であるという．$\mathbf{R}^{2n}$ 上の正値関数 m が g 連続であってさらに

$$m(\tilde{w}) \le C m(w)(1+g_{\tilde{w}}^\sigma(w-\tilde{w}))^N, \quad w,\ \tilde{w} \in \mathbf{R}^{2n} \tag{1.5.4}$$

を満たすとき，m は σ, g 緩増加という．

補題 1.5.1 g を σ 緩増加，m_1, m_2 を σ, g 緩増加とする．このとき，$G = g \oplus g$ および $m = m_1 \otimes m_2$ は対角集合に関して，それぞれ一様に A および A, G 緩増加である．また $h(w)^2 = \sup g_w/g_w^\sigma$ とするとき，$\sup G_{(w,w)}/G_{(w,w)}^A = h(w)^2$ である．

証明：最後の主張は (1.5.1) から明らか．次に g が σ 緩増加であるから

$$G_{(w_1,w_2)}(v_1,v_2) \le C G_{(w,w)}(v_1,v_2)(1+g_{w_1}^\sigma(w_1-w)+g_{w_2}^\sigma(w_2-w))^N$$

が成り立つ．故に，G が対角集合に関して一様に A 緩増加をいうには，

$$\begin{aligned} g_{w_1}^\sigma(w_1-w)+g_{w_2}^\sigma(w_2-w) &\le C M^N, \\ M = (1+g_{w_1}^\sigma(w_2-w)+g_{w_2}^\sigma(w_1-w)) & \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

を示せば十分である．$w' = w_1 + w_2 - w$ とおくと

$$\begin{aligned} g_{w'}^\sigma(w_2-w) &\le C g_{w_1}^\sigma(w_2-w)(1+g_{w_1}^\sigma(w_2-w))^N \le C M^{N+1} \\ g_{w'}^\sigma(w_1-w) &\le C g_{w_2}^\sigma(w_1-w)(1+g_{w_2}^\sigma(w_1-w))^N \le C M^{N+1}. \end{aligned}$$

他方

$$\begin{aligned} g_{w_1}^\sigma(w_1-w) &\le C g_{w'}^\sigma(w_1-w)(1+g_{w'}^\sigma(w_2-w))^N \le C M^{N'} \\ g_{w_2}^\sigma(w_2-w) &\le C g_{w'}^\sigma(w_2-w)(1+g_{w'}^\sigma(w_1-w))^N \le C' M^{N'} \end{aligned}$$

であるから，これらをあわせればよい．また

$$m(w_1,w_2) \le C m(w,w)(1+g_{w_1}^\sigma(w-w_1)+g_{w_2}^\sigma(w-w_2))^N$$

であるから (1.5.5) から $m = m_1 \otimes m_2$ が G, A 緩増加であることが従う． (証終)

以上の結果を利用して，ワイル対応に関する基本的な結果を導く．

定理 1.5.1 g は $g \le g^\sigma$ を満たす σ 緩増加な $\mathbf{R}^{2n}$ 上の距離とする．また m_1, m_2 は σ, g 緩増加とする．このとき

$$a(x,\xi) = \exp\left(i\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)/2\right) a_1(x,\xi) a_2(y,\eta)|_{(x,\xi)=(y,\eta)} \quad (1.5.6)$$

は $S(m_1,g) \times S(m_2,g)$ から $S(m_1m_2,g)$ への弱連続な双線形写像，$(a_1,a_2) \mapsto a = a_1 \# a_2$ に拡張される．$h(x,\xi)^2 = \sup g_{(x,\xi)}/g^\sigma_{(x,\xi)}$ とするとき

$$a_1\#a_2(x,\xi) - \sum_{j<N} (i\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)/2)^j a_1(x,\xi)a_2(y,\eta)/j!|_{(y,\eta)=(x,\xi)} \quad (1.5.7)$$

は任意の N に対して $S(h^N m_1 m_2, g)$ への弱連続な写像となる．

証明：$a = a(x,\xi)$, $b = b(y,\eta)$ とするとき連鎖律から

$$|ab|_k^G(w_1,w_2) \le C_k \sum |a|_r^g(w_1)|b|_{k-r}^g(w_2)$$

である．従って，$\{a_\mu\}$, $\{b_\nu\}$ が $S(m_1,g)$, $S(m_2,g)$ の有界集合ならば $\{a_\mu b_\nu\}$ は $S(m_1 \otimes m_2, G)$ の有界集合である．従って a_μ, b_ν が $S(m_1,g)$, $S(m_2,g)$ で a, b に弱収束するなら $a_\mu b_\nu$ は $S(m_1 \otimes m_2, G)$ で ab に弱収束する．また $S(m_1 \otimes m_2, G)|_{\text{対角}} = S(m,g)$ であるから，$a_\mu \# b_\nu$ は $a\#b$ に $S(m_1m_2,g)$ で弱収束する．　(証終)

$(i\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)/2)^j a_1(x,\xi)a_2(y,\eta)$ は j が奇数ならば a_1, a_2 について反対称，すなわち，

$$\begin{aligned}&(i\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)/2)^j a_1(x,\xi)a_2(y,\eta)|_{(x,\xi)=(y,\eta)}\\ &= -(i\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)/2)^j a_2(x,\xi)a_1(y,\eta)|_{(x,\xi)=(y,\eta)}\end{aligned}$$

であるから，次を得る．

$$\begin{aligned}a_1\#a_2 - a_2\#a_1 - \{a_1,a_2\}/i &\in S(h^3 m_1 m_2, g),\\ a_1\#a_2 + a_2\#a_1 - 2a_1a_2 &\in S(h^2 m_1 m_2, g).\end{aligned}$$

ここで $\{a_1,a_2\}$ は a_1 と a_2 の Poisson (ポワソン) 括弧式と呼ばれ次式で定義されるものである．

$$\{a_1,a_2\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_1}{\partial \xi_j}\frac{\partial a_2}{\partial x_j} - \frac{\partial a_1}{\partial x_j}\frac{\partial a_2}{\partial \xi_j}.$$

次に g_1 と g_2 が異なる場合を考える．

補題 1.5.2 g_i は $\mathbf{R}^{2n}$ で σ 緩増加とする．さらに

$$
\begin{aligned}
&g^\sigma_{1w}(t) \le C g^\sigma_{1w_1}(t)(1+g^\sigma_{2w}(w_1-w))^N,\ \ t,w,w_1\in\mathbf{R}^{2n} \qquad (1.5.8)\\
&g^\sigma_{2w}(t) \le C g^\sigma_{2w_2}(t)(1+g^\sigma_{1w}(w_2-w))^N,\ \ t,w,w_2\in\mathbf{R}^{2n}
\end{aligned}
$$

が成立するとする．このとき $G=g_1\oplus g_2$ は対角集合に関して一様に A 緩増加である．従って $g=(g_1+g_2)/2$ は σ 緩増加である．次に m_j を σ, g_j 緩増加とする．いま

$$
\begin{aligned}
&m_1(w_1)\le C m_1(w)(1+g^\sigma_{2w}(w-w_1))^N,\ \ w,w_1\in\mathbf{R}^{2n} \qquad (1.5.9)\\
&m_2(w_2)\le C m_2(w)(1+g^\sigma_{1w}(w-w_2))^N,\ \ w,w_2\in\mathbf{R}^{2n}
\end{aligned}
$$

が成立するとすると $m=m_1\otimes m_2$ は対角集合に関して一様に A, G 緩増加である．

証明：まず

$$
g_{jw_1}(t)\le C g_{jw}(t)(1+g^\sigma_{w_1}(w-w_1))^N,\quad j=1,2 \qquad (1.5.10)
$$

を示す．これから g が σ 緩増加であることが従い，(1.5.5) から G が対角集合に対して一様に A 緩増加であることが分かる．さて (1.5.8) を示そう．まず次に注意する．

補題 1.5.3 F_i を $\mathbf{R}^n$ 上の正定値二次形式とし，その双対形式を F_i' で表す．このとき

$$
(F_1+F_2)'=\inf_{t\in\mathbf{R}^n}(F_1'(\cdot-t)+F_2'(t))
$$

である．

証明：まず結論は，座標の正則な線形変換 $x\mapsto Kx$ に依らないことに注意する．このことから，二次形式とその表現行列を同一視して

$$
F_1=I,\quad F_2=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}
$$

と仮定してよい．さて

$$
(I+F_2)'(x)=\sup\frac{|\sum_{j=1}^n x_jy_j|^2}{\sum(1+\mu_j)y_j^2}
$$

であるから $(I+F_2)'(x)=\sum x_j^2/(1+\mu_j)$ である．一方 $I'=I$, $F_2'=F^{-1}$ であるから

$$\inf\bigl[\sum(x_j-y_j)^2+\mu_j^{-1}y_j^2\bigr]=\sum\frac{x_j^2}{1+\mu_j}$$

から結論が従う．　(証終)

この補題から

$$g_w^\sigma(t)=2\inf_{t'}(g_{1w}^\sigma(t-t')+g_{2w}^\sigma(t'))$$

である．従って (1.5.8) は

$$g_{jw_1}(t)\le Cg_{jw}(t)M^N,\quad M=1+g_{1w_1}^\sigma(w-w')+g_{2w_1}^\sigma(w'-w_1)\tag{1.5.11}$$

が任意の t, w, w', $w_1\in\mathbf{R}^{2n}$ に対して成立することと同値である．ところで g_j は σ 緩増加ゆえ仮定を使うと

$$\begin{aligned}g_{jw_1}&\le Cg_{jw'}(1+g_{2w_1}^\sigma(w'-w_1)+g_{2w'}^\sigma(w'-w_1))^N\\&\le Cg_{jw'}(1+g_{2w_1}^\sigma(w'-w_1))^{N'}\le Cg_{jw'}M^{N'}.\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}g_{jw'}&\le Cg_{jw}(1+g_{1w'}^\sigma(w-w')+g_{1w}^\sigma(w-w'))^{N'}\\&\le Cg_{jw}(1+g_{1w'}^\sigma(w-w'))^{N'}.\end{aligned}$$

さらに

$$g_{1w'}^\sigma(w-w')\le Cg_{1w_1}^\sigma(w-w')(1+g_{2w'}^\sigma(w-w'))^N$$
$$\le Cg_{1w_1}^\sigma(w-w')(1+g_{2w_1}^\sigma(w'-w_1))^{N'}\le Cg_{1w_1}^\sigma(w-w')M^{N'}$$

であるから結論を得る．$m=m_1\otimes m_2$ が対角集合に関して一様に A, G 緩増加であることは，(1.5.9) から

$$m(w_1,w_2)\le Cm(w,w)(1+G_{(w,w)}^A(w-w_1,w-w_2))^N$$

であり，G が対角集合に関して一様に A 緩増加であることから

$$G_{(w,w)}^A(w-w_1,w-w_2)\le CG_{(w_1,w_2)}^A(w-w_1,w-w_2)(1+G_{(w_1,w_2)}^A(w-w_1,w-w_2))^N$$

が成立し，従って結論を得る．　(証終)

定理 1.5.2 *g_1, g_2 は σ 緩増加で (1.5.8) を満たすとする．さらに*

$$H(x,\xi)^2=\sup g_{1(x,\xi)}/g_{2(x,\xi)}^\sigma=\sup g_{2(x,\xi)}/g_{1(x,\xi)}^\sigma\le 1\tag{1.5.12}$$

が成立するとする．$g=(g_1+g_2)/2$ とし，m_j は σ, g_j 緩増加で *(1.5.9)* を満たすとする．このとき *(1.5.6)* は $S(m_1,g_1)\times S(m_2,g_2)$ から $S(m_1m_2,g)$ への弱連続な双線形写像 $(a_1,a_2)\mapsto a_1\#a_2$ に拡張される．また *(1.5.7)* は任意の N に対して $S(H^N m_1m_2,g)$ への弱連続な写像となる．

命題 1.5.1 g_1, g_2 は σ 緩増加で $h_j(w)^2=\sup g_{jw}/g^\sigma_{jw}\le 1$ を満たすとする．今 g_1 と g_2 が共形，即ちある正値関数 m があって $g_2=mg_1$ とする．このとき *(1.5.8)* が成立する．また

$$H(w)^2=h_1(w)h_2(w)$$

である．

証明：まず $h_2^2=m^2h_1^2$ であるから

$$H(w)^2=\sup g_{2w}/g^\sigma_{1w}=m(w)h_1(w)^2=h_1(w)h_2(w)$$

は明らかである．$g_{1w}(w_1-w)\le c$ ならば g_1 は緩変化であるから (1.5.8) の第一式は明らか．$g_{1w}(w_1-w)\ge c$ とすると，$m(w)h_1(w)=h_2(w)\le 1$ および $g^\sigma_{1w}h_1(w)^2\ge g_{1w}$ から

$$\begin{aligned}g^\sigma_{2w}(w-w_1)^2&=m(w)^{-2}g^\sigma_{1w}(w-w_1)^2\\ \ge m(w)^{-2}h_1(w)^{-2}&g_{1w}(w-w_1)g^\sigma_{1w}(w-w_1)\\ &\ge cg^\sigma_{1w}(w-w_1)\end{aligned}$$

が成立する．g_1 は σ 緩増加ゆえ (1.5.8) の第一式が従う．(1.5.8) の第二式の証明も同様である．　(証終)

例として

$$\begin{aligned}g_1&=|dx|^2+\langle\xi\rangle^{-2}|d\xi|^2,\\ g_2&=\langle\xi\rangle^{2\delta}|dx|^2+\langle\xi\rangle^{-2\rho}|d\xi|^2\end{aligned}$$

を考える．$\rho=1-\delta, 0\le\delta\le 1/2$ とする．このとき $H(x,\xi)=\langle\xi\rangle^{-\rho}$ であり，$a_j\in S(m_j,g_j)$ とするとき，定理 1.5.3 から

$$a_1\#a_2(x,\xi)-\sum_{j<N}(i\sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)/2)^ja_1(x,\xi)a_2(y,\eta)/j!|_{(y,\eta)=(x,\xi)}$$
$$\in S(m_1m_2\langle\xi\rangle^{-N\rho},g),\quad g=g_1+g_2$$

が成立する．

ここで 1.1 節で導入した対応の間の関係をみておこう．いま $a_\mu(x,D) = b_\nu(x,D)$ とすると

$$b(x,\xi) = \int e^{-i\langle t,\xi\rangle} K_{b_\nu}(x+\nu t, x-(1-\nu)t)dt$$

であり，また $K_{b_\nu}(x,y) = K_{a_\mu}(x,y)$ であるから

$$\begin{aligned} b(x,\xi) &= \int e^{i\langle t,\eta\rangle} a(x+(\nu-\mu)t, \eta+\xi)d\eta dt \\ &= e^{-i(\nu-\mu)\langle D_x, D_\xi\rangle} a(x,\xi) \end{aligned} \tag{1.5.13}$$

となる．(1.5.13) を調べよう．$B(x,\xi) = 2\langle x,\xi\rangle$ とする．おなじ B でこの二次形式 B の表現行列 $B\ {}^t(x,\xi) = {}^t(\xi,x)$ を表すことにする．このとき $g^B_{(x,\xi)}(y,\eta) = g^\sigma_{(x,\xi)}(y,-\eta)$ であり，$g(x,\xi) = g(x,-\xi)$ ならば $g^B_{(x,\xi)} = g^\sigma_{(x,\xi)}$ である．これらのことから次を得る．

定理 1.5.3 g を σ 緩増加で $g \le g^\sigma$ を満たすとし、$g_{(x,\xi)}(t,\tau) = g_{(x,\xi)}(t,-\tau)$ とする．また m は σ, g 緩増加であるとする．このとき， $e^{i\kappa\langle D_x,D_\xi\rangle}$ は任意の $\kappa \in \mathbf{R}$, $|\kappa| \le 2$ に対して $S(m,g)$ 上の弱連続な同型写像となる．また

$$e^{i\kappa\langle D_x,D_\xi\rangle}a(x,\xi) - \sum_{j<N} \langle i\kappa D_x, D_\xi\rangle^j a(x,\xi)/j! \in S(h^N m, g)$$

がすべての N に対して成立する．

この節の最後に，ワイル対応の，シンプレクティックな線形変換および平行移動の下での不変性についてみておく．$\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi$ 上の線形変換 χ が $\sigma(\chi(x,\xi), \chi(y,\eta)) = \sigma((x,\xi),(y,\eta))$ を満たすとき χ をシンプレクティック変換と言う．次の 5 つのタイプの変換を考える．(c)–(e) はシンプレクティック変換である．

(a) $x \mapsto x + x_0$ なる $\mathbf{R}^n_x$ での平行移動,

(b) $\xi \mapsto \xi + \xi_0$ なる $\mathbf{R}^n_\xi$ での平行移動,

(c) x_j, ξ_j を $\xi_j, -x_j$ に置き換え，残りの座標は不変にする変換 $\chi(x,\xi)$,

(d) $\mathbf{R}^n$ の正則線形変換 T にによって $\chi(x,\xi) = (Tx, {}^tT^{-1}\xi)$ で与えられる $\chi(x,\xi)$,

(e) n 次実対称行列 A によって $\chi(x,\xi) = (x, \xi - A\xi)$ で与えられる $\chi(x,\xi)$.

まず次のことを確かめよう．

補題 1.5.4 任意のシンプレクティックな線形変換は上の *(c)–(e)* のタイプのシンプレクティックな線形変換の合成で得られる．

証明：G を (a)–(e) のタイプの線形シンプレクティック変換で生成される群とする．G は推移的である．実際，任意の (x,ξ), $x \neq 0$ に対しては，ある η があって (d) タイプで $(1,0,...,0,\eta) \mapsto (x,\xi)$ となる．$A(1,0,...,0)=\eta$ なる対称行列があるから，(e) タイプで $e_1=(1,0,...,0) \mapsto (1,0,...,0,\eta)$ となる．$(0,\xi)$, $\xi \neq 0$ に対しては，(c) タイプで $(-\xi,0) \mapsto (0,\xi)$ であり，(d) タイプで $e_1=(1,0,...,0) \mapsto (-\xi,0)$ となる．χ を任意の線形シンプレクティック変換とする．$\chi^{-1}(e_1)=(\hat{x},\hat{\xi})$ とすると $\tilde{\chi}(\hat{x},\hat{\xi})=e_1$ なる $\tilde{\chi} \in G$ があるから $\chi_1=\chi\tilde{\chi}^{-1}$ とおくと，$\chi_1(e_1)=e_1$ で $\sigma(\chi_1(x,\xi),e_1)=\sigma((x,\xi),e_1)=\xi_1$． 従って χ_1 は ξ_1 座標を動かさない，すなわち

$$\chi_1(x,\xi)=(*,...,*,\xi_1,*,...,*).$$

$\chi_1 \in G$ を示す．n に関する帰納法で示す．$\chi_1(x,\xi)=(y(x,\xi),\eta(x,\xi))$ と書き $\chi_2(x',\xi')=(y'(0,x',0,\xi'),\eta'(0,x',0,\xi'))$ とおくと，明らかに χ_2 は $\mathbf{R}^{2(n-1)}$ のシンプレクティック変換であり帰納法の仮定から $\chi_2 \in G$ である．$\chi_3=\chi_1\chi_2^{-1}$ とおこう．ただしここでは $\chi_2(x',\xi')$ は (x_1,ξ_1) 平面上では恒等写像と考えている．χ_3 は ξ_1 座標を保ち，$\chi_3(0,x',0,\xi')$ は恒等写像であるから

$$\chi_3(x,\xi)=(x_1+\varphi_1(x_1,\xi_1),...,x_n+\varphi_n(x_1,\xi_1),\xi_1,\xi_2+\psi_2(x_1,\xi_1),...,\xi_n+\psi_n(x_1,\xi_1))$$

の形をしている．$\chi_3(e_1)=e_1$ から $\varphi_j(1,0)=0$, $\psi_j(1,0)=0$ であり，従って

$$\chi_3(x,\xi)=(x_1+a_1\xi_1,...,x_n+a_n\xi_1,\xi_1,\xi_2+b_2\xi_1,...,\xi_n+b_n\xi_1)$$

である．他方 χ_3 がシンプレクティックであるから

$$\sum_{j=1}^{n}(d\xi_j+b_jd\xi_1)\wedge(dx_j+a_jd\xi_1)=\sum d\xi_j \wedge dx_j$$

が成立している．ただし，$b_1=0$．故に $a_j=b_j=0$, $j \geq 2$ となり $\chi_3(x,\xi)=(x_1+a_1\xi_1,x_2,...,x_n,\xi_1,...,\xi_n)$ である．さて $\chi_4 \in G$ は x_1,ξ_1 を $\xi_1,-x_1$ に置き換えるものとする．また $Ax=(a_1x_1,0,...,0)$ なる n 次対称行列として $\chi_5(x,\xi)=(x,\xi-Ax) \in G$，さらに $Tx=(-x_1,x_2,...,x_n)$ なる正則行列 T をとって $\chi_6(x,\xi)=(Tx,{}^tT^{-1}\xi) \in G$ とするとき

$$\chi_6\chi_4\chi_5\chi_4=\chi_3 \in G$$

となって証明が終る．　(証終)

最後に次の定理を示そう．

定理 1.5.4 $\mathbf{R}^{2n}$ 上の任意のシンプレクティックな線形変換 および平行移動 χ に対して，$L^2(\mathbf{R}^n)$ 上のユニタリ変換 U が絶対値 1 の定数倍を除いて一意的に決まり，任意の $a \in \mathcal{S}$ に対して

$$U^{-1}a^w(x,D)U = (a\circ\chi)^w(x,D) \tag{1.5.14}$$

が成立する．また U は $\mathcal{S}$ および $\mathcal{S}'$ 上の同型を与える．

証明：ユニタリ変換 U の存在を示す (一意性は略す)．(a)-(e) の場合のみを考えればよい．(a) $Uf(x) = f(x-x_0)$; (b) $Uf(x) = e^{i\langle x,\xi_0\rangle}f(x)$; (c) U は x_j に関するフーリエ変換，(d) $Uf(x) = f(T^{-1}x)|\det T|^{-1/2}$; (e) $Uf(x) = e^{-i\langle Ax,x\rangle/2}f(x)$ ととればよい．最後に (1.6.5) をみるには，直接計算してみれば容易に確かめられる．たとえば (c) の場合は，一変数で考えればよく，このとき

$$U^{-1}a^w(x,D)Uu = \int e^{izx}e^{i(z-w)\xi}a(\frac{z+w}{2},\xi)e^{-iwy}u(y)dyd\xi dwdz$$

で $(z+w)/2 \to z$, $(z-w)/2 \to w$ と積分変数を変換すると右辺は

$$\begin{aligned} &2\int e^{i(z+w)x}\check{a}(z,2w)e^{-i(z-w)y}u(y)dydwdz \\ &= \int e^{iz(x-y)}a(z,-\frac{x+y}{2})u(y)dydz = (a\circ\chi)^w u \end{aligned}$$

となる．ここで $\check{a}$ は a の ξ に関するフーリエ変換を表す．(e) については

$$U^{-1}a^wUu = \int e^{i\langle Ax,x\rangle/2}e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a(\frac{x+y}{2},\xi)e^{-\langle Ay,y\rangle/2}u(y)dyd\xi$$

において，$\xi + A(x+y)/2 \to \xi$ と変換すると，右辺は

$$\int e^{i\langle x-y,\xi\rangle}a(\frac{x+y}{2},\xi-\frac{A(x+y)}{2})u(y)dyd\xi$$

となって結論を得る．　(証終)

1.6　擬微分作用素の有界性 (Calderón-Vaillantcourt)

次の補題から始める．

補題 1.6.1 任意の $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\|a^w(x,D)u\| \le c\|\hat{a}\|_{L^1} = c\|a\|_{FL^1}$$

である．

証明：$a^w(x,D)$ のシュワルツ核は

$$K(x,y) = c\int a(\frac{x+y}{2},\xi)e^{i\langle x-y,\xi\rangle}d\xi = c\int \hat{a}(\theta, y-x)e^{i\langle x+y,\theta/2\rangle}d\theta$$

である．従って

$$\int |K(x,y)|dy \le c\|a\|_{FL^1}, \quad \int |K(x,y)|dx \le c\|a\|_{FL^1}$$

が成立する．ここで

$$\begin{aligned}|Ku(x)|^2 &\le \int |K(x,y)||u(y)|^2dy \int |K(x,y)|dy \\ &\le c\|a\|_{FL^1}\int |K(x,y)||u(y)|^2dy.\end{aligned}$$

故に，$\int |Ku(x)|^2dx \le c^2\|a\|_{FL^1}^2 \int |u(y)|^2dy.$ (証終)

最初に次を示そう．

定理 1.6.1 g は σ 緩増加，m は σ, g 緩増加とする．このとき，任意の $a \in S(m,g)$ に対して，$a^w(x,D)$ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$，および $\mathcal{S}'$ から $\mathcal{S}'$ への連続写像である．また a_j が a に弱収束するとき，$a_j^w(x,D)u$, $u \in \mathcal{S}$ は $a^w(x,D)u$ に $\mathcal{S}$ で収束する．

証明：$\{\phi_\nu\}$ を 1.4 節の単位分解とし，$a = \sum a_\nu$, $a_\nu = \phi_\nu a$ としよう．まず $a_\nu^w(x,D)$ の L^2 有界性をみておく．一次変換 χ_ν があって

$$|b_\nu|_k^e = |a_\nu|_k^{g_{w_\nu}}, \quad b_\nu = a_\nu \circ \chi_\nu$$

となる．従って，$|b_\nu|_k^e \le C_k m(w_\nu)$．ここで e はユークリッドの距離で，C_k は ν に依存しない．故に部分積分によって

$$|\hat{b}_\nu(w)| \le C_N\langle w\rangle^{-2N}m(w_\nu).$$

このことから $\|b_\nu\|_{FL^1} \le C'm(w_\nu)$．従って $\|a_\nu\|_{FL^1} = \|b_\nu\|_{FL^1}$ に注意すると補題 1.6.1 から

$$\|a_\nu^w(x,D)\| \le Cm(w_\nu).$$

$a_\nu^w(x,D)$ が $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への連続写像であることをみるために，$\|a_\nu^w(x,D)\|$ のより精密な評価を与える．そのために 1.4 節の考察を繰り返す．L を一次関数で U_ν 上では零にならないものとする．$b(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ とするとき

$$(x_j b)^w(x,D)u = b^w(x,D)x_j u + \frac{i}{2}\{b,x_j\}^w(x,D)u,$$
$$(\xi_j b)^w(x,D)u = b^w(x,D)D_j u + \frac{i}{2}\{b,\xi_j\}^w u$$

は容易であるから，$L^w(x,D)=L(x,D)$ に注意すると，系 1.4.1 から

$$a_\nu^w(x,D)u = (a_\nu/L)^w(x,D)L(x,D)u + i\{a_\nu/L,L\}^w(x,D)u/2 \quad (1.6.1)$$

が成立する．補題 1.3.1 から

$$|L(w_\nu)/L|_k^{g_{w_\nu}}(z) \le k!R_0/R(R_0-R)^{k+1}, \quad z \in B_\nu$$

であるから，a_ν/L が $S(m(w_\nu)/L(w_\nu), g_{w_\nu})$ で一様に有界なことは明らかである．次に $t \in \mathbf{R}^{2n}$ を $L(w)=\sigma(w,t)$ となるように定めると，$t=H_L$ で

$$\{a_\nu/L,L\} = \frac{1}{L}\{a_\nu,L\} = -L^{-1}H_L a_\nu = -L^{-1}a_\nu^{(1)}(w;t)$$

故，$\{a_\nu/L,L\}$ が $S(m(w_\nu)g_{w_\nu}(t)^{1/2}/L(w_\nu), g_{w_\nu})$ で一様に有界なことが分かる．ここで $L(x,D)=\langle t_1,x\rangle u + \langle t_2,D\rangle u$ と書けるから，$g_0(t)=g_0(t_1,t_2)\le 1$ ならば

$$\|L(x,D)u\| \le C\sum\{\|x_j u\| + \|D_j u\|\}$$

が成立する．他方，$g_{w_\nu}(t)\le 1$ ならば，上でみたように

$$\|a_\nu^w(x,D)u\| \le C\{m(w_\nu)/L(w_\nu)\}\|L(x,D)u\| + C\{m(w_\nu)/L(w_\nu)\}\|u\|$$

である．従って，右辺は

$$C_1\frac{m(w_\nu)}{L(w_\nu)}\sum_{|\alpha+\beta|\le 1}\|x^\alpha D^\beta u\|$$

で評価される．さて a_ν/L^2 および $\{a_\nu/L^2,L\}$ はそれぞれ，$S(m(w_\nu)/L(w_\nu)^2, g_{w_\nu})$ と $S(m(w_\nu)g_{w_\nu}(t)^{1/2}/L(w_\nu)^2, g_{w_\nu})$ で一様に有界であるから，$R_\nu \le L(w_\nu)$ とすると，(1.6.1) より

$$\|\Big(\frac{a_\nu}{L}\Big)^w(x,D)u\| \le Cm(w_\nu)R_\nu^{-2}\sum_{|\alpha+\beta|\le 1}\|x^\alpha D^\beta u\|$$

が成立する．この議論を繰り返すことによって，$g_0(t) + g_{w_\nu}(t) \le 1$ ならば

$$\|a_\nu^w(x,D)u\| \le C_N m(w_\nu) R_\nu^{-N} \sum_{|\alpha+\beta|\le N} \|x^\alpha D^\beta u\| \tag{1.6.2}$$

が成り立つ. 次に, R_ν を評価しよう．$G = g_0 + g_{w_\nu}$ とおく．今 $\inf_{U_\nu} G^\sigma(z) \ge a^2 > 0$ とする．すなわち，$\{g_{w_\nu}(z) < R_0^2\} \cap \{G^\sigma(z+w_\nu) < a^2\} = \emptyset$ とする．ハーン–バナッハ の定理から，ある Y があって，$g_{w_\nu}(w) < R_0^2$, $G^\sigma(z) < a^2$ を満たすすべての w, z に対して

$$\sigma(w,Y) < \sigma(z - w_\nu, Y)$$

が成り立つ．$\sigma(z,Y) < 0$, $G^\sigma(z) < a^2$ なる z が存在するから

$$\sigma(w,Y) < -\sigma(w_\nu, Y), \quad \forall w,\ g_{w_\nu}(w) < R_0^2$$

である．一方 $\inf_{G^\sigma(z)<a^2} \sigma(z,Y) = -aG(Y)^{1/2}$ であるから，$\sigma(w,Y) < -\sigma(w_\nu,Y) - aG(Y)^{1/2}$ となる．他方，$\sigma(w,Y) > 0$, $g_{w_\nu}(w) < R_0^2$ なる w があるから，$\sigma(w_\nu, Y) < -aG(Y)^{1/2}$，すなわち

$$\sigma(w_\nu, \frac{Y}{G(Y)^{1/2}}) < -a$$

である．さて $t = Y/G(Y)^{1/2}$, $L(w) = \sigma(w,t)$ と選ぶと，$G(t) = 1$ で，$w \in U_\nu$，すなわち $g_{w_\nu}(w - w_\nu) < R_0^2$ のとき，

$$L(w) = \sigma(w - w_\nu, t) + \sigma(w_\nu, t) = G(Y)^{-1/2}[\sigma(w - w_\nu, Y) + \sigma(w_\nu, Y)] < 0$$

であり，また $L(w_\nu) < -a$ であるから，$|1/L(w_\nu)| \le a^{-1} \le (\inf_{z\in U_\nu} G^\sigma(z))^{-1/2}$ が従う．以上のことから

$$R_\nu = \inf_{w\in U_\nu} G^\sigma(w)^{1/2} \tag{1.6.3}$$

ととることができる．$\sigma(z,w) = \langle Jz, w\rangle$ とすると，$G^\sigma(w) = G'(J^{-1}w)$ であるから，補題 1.5.1 を使うと

$$\begin{aligned} G^\sigma(w) &= \inf_z (g_0'(J^{-1}w - z) + g_{w_\nu}'(z)) \\ &= \inf_{w=w_1+w_2} \{g_0^\sigma(w_1) + g_{w_\nu}^\sigma(w_2)\} \end{aligned}$$

である．いま，ある N があって

$$\sum (1+R_\nu)^{-N} < +\infty, \quad g_0(w_\nu) \le C(1+R_\nu)^N \tag{1.6.4}$$

が成立すると仮定しよう．このとき，$R_\nu \to \infty$ であるから (1.6.2) において，R_ν を $1+R_\nu$ で置き換えてよい．まず，m が σ, g 緩増加であるから $m(w_\nu) \le m(0)(1+g^\sigma_{w_\nu}(w_\nu))^N$．他方 g は σ 緩増加故，$g^\sigma_{w_\nu}(w_\nu) \le C(1+g^\sigma_0(w_\nu))^N$．ところで ある C があって $g^\sigma_0 \le Cg_0$ となることは明らかであるから，

$$m(w_\nu) \le C(1+g_0(w_\nu))^N \le C(1+R_\nu)^{N'}$$

が成立する．従って $\sum \|a^w_\nu(x,D)u\|$ は収束し，$a^w(x,D)u = \sum a^w_\nu(x,D)u$ である．次に $u \in \mathcal{S}$ なら $a^w(x,D)u \in \mathcal{S}$ であることをみる．$M(x,D)$ を (x,D) について線形とする．このとき $M(x,D)a^w_\nu(x,D)$ の表象は $Ma_\nu + \{M, a_\nu\}/2i$ で，$S(\tilde{m}_\nu, g_{w_\nu})$ で有界である．ここで ある N があって $\tilde{m}_\nu \le C(1+g_0(w_\nu))^N$ である．実際，$1/g_{w_\nu} \le [C/g_0](1+g_0(w_\nu))^N$ から $M(x,\xi) \in S((1+g_0(w_\nu))^N, g_{w_\nu})$ となる．また $M(w) = \sigma(w,t)$ と書くとき，$\{M, a_\nu\}(w) = a^{(1)}_\nu(w,t)$ であるから，

$$|\{M, a_\nu\}|^{g_{w_\nu}}_r \le Cm(w_\nu)g_{w_\nu}(t)^{1/2} \le C'(1+g_0(w_\nu))^{N'}$$

となる．従って，$M(x,D)a^w_\nu(x,D)$ にこれまでの議論を適用すると，

$$\sum \|M(x,D)a^w_\nu(x,D)u\| \le C \sum_{|\alpha+\beta| \le N} \|x^\alpha D^\beta u\|$$

を得る．以下，この議論を繰り返して，$a^w(x,D)u \in \mathcal{S}$ が従う．

次に a_j が 0 に $S(m,g)$ で弱収束するとする．まず $a_j = \sum a_{j\nu}$ と分解して，$\{a_{j\nu}\}$ は $S(m,g)$ で有界である．従って

$$\|a^w_{j\nu}(x,D)u\| \le C_N m(w_\nu)(1+R_\nu)^{-N} \sum_{|\alpha+\beta| \le N} \|x^\alpha D^\beta u\|$$

が成立する．ここで C_N は j, ν に依らない．任意の $\epsilon > 0$ に対して $L(\epsilon)$ があって

$$\sum_{\nu > L(\epsilon)} \|a^w_{j\nu}(x,D)u\| \le \epsilon C_N \sum_{|\alpha+\beta| \le N} \|x^\alpha D^\beta u\|.$$

他方，$\sum_{\nu \le L(\epsilon)} \|a^w_{j\nu}(x,D)u\| \to 0$ は明らかであるから，$\|a^w_j(x,D)u\| \to 0$ が従う．導関数についても同様である．

最後に (1.6.4) を示す．$M_k = \{\nu \mid R^2_\nu \le k\}$ とおいて，$\#(M_k)$ を評価しよう．$\nu \in M_k$ とすると，$w'_\nu \in U_\nu$ と w''_ν があって $g^\sigma_{w_\nu}(w'_\nu - w''_\nu) \le k$, $g^\sigma_0(w''_\nu) \le k$ である．$g^\sigma_{w'_\nu}(w'_\nu - w''_\nu) \le Ck$ であるから

$$g^\sigma_{w''_\nu}(w'_\nu - w''_\nu) \le Cg^\sigma_{w'_\nu}(w'_\nu - w''_\nu)(1+g^\sigma_{w'_\nu}(w'_\nu - w''_\nu))^N \le C'k^{N+1}$$

従って

$$g_{w_\nu}^\sigma(z) \le C g_{w'_\nu}^\sigma(z) \le C_1 g_{w''_\nu}^\sigma(z) k^{N'} \le C_2 g_0^\sigma(z) k^{N_2}.$$

これから $g_0(z) \le C_2 g_{w_\nu}(z) k^{N_2}$ が従い

$$g_0(w_\nu - w'_\nu) \le C g_{w_\nu}(w_\nu - w'_\nu) k^{N_2} \le C' k^{N_2}$$

が成立する．次に

$$\begin{aligned} g_{w_\nu}(z) &\le C g_{w'_\nu}(z) \le C_1 g_{w''_\nu}(z) k \le C'_1 g_0(z)(1 + g_{w''_\nu}^\sigma(w''_\nu))^N k \\ &\le C''_1 g_0(z)(1 + g_0^\sigma(w''_\nu))^{N'} k \le C_2 g_0(z) k^{N_3} \end{aligned}$$

である．故に $g_0(w - w_\nu) \le c k^{-N_3}$ ならば

$$g_{w_\nu}(w - w_\nu) \le C g_0(w - w_\nu) k^{N_3} \le R^2$$

すなわち $w \in B_\nu$ である．今度は $g_0(w_\nu)$ を評価する．まず

$$\begin{aligned} g_0^\sigma(w'_\nu - w''_\nu) &\le C g_{w''_\nu}^\sigma(w'_\nu - w''_\nu)(1 + g_{w''_\nu}^\sigma(w''_\nu))^N \\ &\le C g_{w''_\nu}^\sigma(w'_\nu - w''_\nu)(1 + g_0^\sigma(w''_\nu))^{N''} \le C' k^{N'''} \end{aligned}$$

から次が従う．

$$g_0(w'_\nu)/2 \le g_0(w'_\nu - w''_\nu) + g_0(w''_\nu) \le g_0^\sigma(w'_\nu - w''_\nu) + g_0^\sigma(w''_\nu) \le C k^{N_4}.$$

これと $g_0(w_\nu - w'_\nu) \le C k^{N_2}$ とから $g_0(w_\nu) \le c k^{N_5}$ を得る．以下 $|M_k|$ の評価は 1.4 節と同じである． (証終)

系 1.6.1 定理 *1.6.1* と同じ仮定をする．$a_j \in S(m_j, g)$ とする．このとき

$$a_1^w(x, D) a_2^w(x, D) u = (a_1 \# a_2)^w(x, D) u, \quad \forall u \in \mathcal{S}.$$

証明：$a_j(x, \xi) = \sum a_{j\nu}(x, \xi)$ と分解する．さて

$$\begin{aligned} &|a_{1\nu}^w(x, D)[a_{2\nu}^w(x, D)u - a_2^w(x, D)u]|_{\ell, \mathcal{S}} \\ &\le C \|a_{1\nu}\|_{k, S(m_1, g)} |a_{2\nu}^w(x, D)u - a_2^w(x, D)u|_{\ell', \mathcal{S}} \end{aligned}$$

であり，$a_{1\nu}^w(x, D) a_2^w(x, D) u$ は $\mathcal{S}$ で $a_1^w(x, D) a_2^w(x, D) u$ に収束するから $\mathcal{S}$ で $a_{1\nu}^w(x, D) a_{2\nu}^w(x, D) u \to a_1^w(x, D) a_2^w(x, D) u$ となる．他方，定理 1.5.1 から $(a_{1\nu} \# a_{2\nu})$ は $a_1 \# a_2$ に $S(m_1 m_2, g)$ で弱収束する．故に，$(a_{1\nu} \# a_{2\nu})^w(x, D) u$ は $(a_1 \# a_2)^w(x, D) u$ に $\mathcal{S}$ で収束し，結論を得る．(証終)

系 1.6.2 定理 *1.6.1* と同じ仮定をする．さらに $g \le g^\sigma$ かつ $g_{(x,\xi)}(t,\tau) = g_{(x,\xi)}(t,-\tau)$ であるとする．$a_j \in S(m_j, g)$ とし， $a_1(x,D)a_2(x,D) = a_3(x,D)$ とする．このとき

$$a_3(x,\xi) = e^{i\langle D_\xi, D_y\rangle} a_1(x,\xi)a_2(y,\eta)|_{(y,\eta)=(x,\xi)} \tag{1.6.5}$$

が成立する．

証明：$b_j(x,\xi) = e^{-i\langle D_x, D_\xi\rangle/2} a_j(x,\xi)$ とすると，$a_j(x,D) = b_j^w(x,D)$ である．他方

$$b_3(x,\xi) = e^{i(\langle D_\xi, D_y\rangle - \langle D_x, D_\eta\rangle)/2} b_1(x,\xi)b_2(y,\eta)|_{(y,\eta)=(x,\xi)}.$$

ここで

$$e^{i\langle D_x, D_\xi\rangle/2} f(x,\xi,y,\eta)|_{(y,\eta)=(x,\xi)} = e^{i\langle D_x+D_y, D_\xi+D_\eta\rangle/2} f(x,\xi,y,\eta)|_{(y,\eta)=(x,\xi)}$$

と

$$\begin{aligned}\langle D_x + D_y, D_\xi + D_\eta\rangle + \langle D_\xi, D_y\rangle - \langle D_x, D_\eta\rangle \\ -\langle D_x, D_\xi\rangle - \langle D_y, D_\eta\rangle = 2\langle D_\xi, D_y\rangle\end{aligned}$$

に注意すればよい．　(証終)

この節の主目標は次の定理である．

定理 1.6.2 g は σ 緩増加，かつ $g \le g^\sigma$ とし，m は σ, g 緩増加であるとする．このとき $a^w(x,D)$ が全ての $a \in S(m,g)$ に対して L^2 有界であるための必要十分条件は m が有界であることである．

十分性のみを示す．まず次の補題から始める．

補題 1.6.2 (Cotlar の補題) A_i, $i \in I$ を高々可算個からなる，ヒルベルト空間 H_1 からヒルベルト空間 H_2 への有界作用素の族とし

$$\sum_k \|A_j^* A_k\|^{1/2} \le M, \quad \sum_k \|A_j A_k^*\|^{1/2} \le M$$

が成立しているとする．このとき和

$$Su = \sum_{j\in I} A_j u, \quad u \in H_1$$

は H_2 で強収束し，かつ $\|S\| \le M$ である．

証明：まず $\#(I)=N<+\infty$ のときを考える．まず $\|S\|^{2m}=\|(S^*S)^m\|$ である．実際，$\|(S^*S)^m\|\le\|S^*S\|^m\le\|S\|^{2m}$ は明らか．一方 $\|S^*S\|=\|S\|^2$ から $S^*Su_j-\|S\|^2u_j\to 0$ なる列 $\{u_j\}$ がある．従って $(S^*S)^2u_j-\|S\|^2(S^*S)u_j\to 0$ となり $(S^*S)^2u_j-\|S\|^4u_j\to 0$ が従う．故に $\|(S^*S)^2\|=\|S\|^4$ である．以下同様である．さて $S=\sum_{i\in I}A_i$ に対して $(S^*S)^m$ を考えよう．一般項は $A_{j_1}^*A_{j_2}\cdots A_{j_{2m-1}}^*A_{j_{2m}}$ で

$$\begin{aligned}&\|A_{j_1}^*A_{j_2}\cdots A_{j_{2m-1}}^*A_{j_{2m}}\|\\ &\le\min(\|A_{j_1}^*A_{j_2}\|\cdots\|A_{j_{2m-1}}^*A_{j_{2m}}\|,\\ &,\|A_{j_1}^*\|\|A_{j_2}A_{j_3}^*\|\cdots\|A_{j_{2m-2}}A_{j_{2m-1}}^*\|\|A_{j_{2m}}\|)\end{aligned}$$

である．$\min(a,b)\le\sqrt{ab}$ であるから，$\|A_{j_1}^*\|,\|A_{j_{2m}}\|\le M$ に注意すると

$$\|S\|^{2m}\le M\sum\|A_{j_1}^*A_{j_2}\|^{1/2}\|A_{j_2}A_{j_3}^*\|^{1/2}\cdots\|A_{j_{2m-2}}A_{j_{2m-1}}^*\|^{1/2}\|A_{j_{2m-1}}^*A_{j_{2m}}\|^{1/2}$$

が成立している．仮定を用い，j_{2m} で加え，次に j_{2m-1} で加え，以下同様に加えていくと

$$\|S\|^{2m}\le M^{2m-1}\sum_{j_1,j_2}\|A_{j_1}^*A_{j_2}\|^{1/2}\le M^{2m}\sum_{j_1}=NM^{2m}$$

を得る．従って，$\|S\|\le MN^{1/2m}$．ここで $m\to\infty$ として $\|S\|\le M$ が従う．次に $\#(I)=+\infty$ とする．いま

$$V=\{w\mid w=\sum_{j,\,\text{有限}}A_j^*v_j\}$$

とおく．$w\in V$ のとき $\sum A_kw$ は収束する．実際 $u=A_j^*v$ とすると

$$\begin{aligned}&\sum_k\|A_kA_j^*v\|\le\sum_k\|A_kA_j^*\|\|v\|\\ &=\sum_k\|A_jA_k^*\|\|v\|\le M\|v\|\sum_k\|A_jA_k^*\|^{1/2}<+\infty\end{aligned}$$

であることから収束が分かる．従って $\|Sw\|\le M\|w\|$ でもある．このことから，$\overline{V}$ の元 w に対しても $\sum A_kw$ は収束し，$\|Sw\|\le M\|w\|$ である．今 $H_1=\overline{V}\oplus\overline{V}^\wedge$ と分解すると，$(A_ju,v)=(u,A_j^*v)$ より $w\in\overline{V}^\wedge$ なら $\forall k\in I$ に対して $A_kw=0$ であるから結論が従う．　(証終)

定理の証明：$a\in S(1,g)$ とする．$a=\sum a_\nu,\ a_\nu=\phi_\nu a$ と分解する．$a^w(x,D)=\sum a_\nu^w(x,D)$ であり，補題 1.5.1 から $\|a_\nu^w(x,D)\le C$ である．

ここで C は ν によらない．$A_\nu = a_\nu^w(x,D)$ として補題 1.6.2 を適用したい．$a_\nu^w(x,D)^* = \bar{a}_\nu^w(x,D)$ であるから

$$a_{\nu\mu}^w(x,D) = \bar{a}_\nu^w(x,D)a_\mu^w(x,D),\ \ b_{\nu\mu}^w(x,D) = a_\nu^w(x,D)\bar{a}_\mu^w(x,D)$$

を考えることになる．議論は平行であるから $a_{\nu\mu}^w(x,D)$ のみを考察すれば十分である．$G = g \oplus g$ とする．$G_w^A(t_1,t_2) = g_{w_1}^\sigma(t_2) + g_{w_2}^\sigma(t_1)$, $w = (w_1, w_2)$ であった．

$$K = \{G_{(w_\mu,w_\nu)}(w_1 - w_\mu, w_2 - w_\nu) \le 2R_0^2\}$$

とする．ここで

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(W) &= \inf_{\tilde{W}\in K} G_W^A(W - \tilde{W}) \\ &= \inf_{(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)\in K}\{g_{w_1}^\sigma(w_2 - \tilde{w}_2) + g_{w_2}^\sigma(w_1 - \tilde{w}_1)\} \\ &\ge \inf_{\tilde{w}_1\in U_\mu,\tilde{w}_2\in U_\nu}\{g_{w_1}^\sigma(w_2 - \tilde{w}_2) + g_{w_2}^\sigma(w_1 - \tilde{w}_1)\} \end{aligned}$$

である．対角集合上での評価が問題であるから

$$D_{\mu\nu}(w,w) \ge \inf_{U_\nu} g_w^\sigma(w - \tilde{w}_2) + \inf_{U_\mu} g_w^\sigma(w - \tilde{w}_1) \tag{1.6.6}$$

を考えることになる．右辺を $M(w)$ とおこう．$\bar{a}_\nu(x,\xi)a_\mu(y,\eta)$ は $S(1,g)$ の有界集合であるから，(**??**) を利用すると

$$|a_{\nu\mu}(w)| \le C_k(1 + M(w))^{-k} \tag{1.6.7}$$

が成立する．$\tilde{w}_1 = w'$, $\tilde{w}_2 = w''$ で (1.6.6) は最小値をとるとする．このとき $g_w^\sigma(w' - w'') \le 2[g_w^\sigma(w - w') + g_w^\sigma(w - w'')] \le 2M(w)$ であり，従って

$$\begin{aligned} g_{w_\nu}^\sigma(w' - w'') \le Cg_{w''}^\sigma(w' - w'') \le C_1 g_w^\sigma(w' - w'')(1 + g_w^\sigma(w - w''))^N \\ \le C_2(1 + M(w))^{N+1} \end{aligned}$$

である．故に $d_{\nu\mu} = \min_{w'\in U_\mu, w''\in U_\nu}(w' - w'')$ とおくとき

$$1 + d_{\nu\mu} \le C(1 + M(w))^{N+1}$$

が成立する．他方

$$\begin{aligned} 1 + g_{w_\nu}(w - w_\nu) \le C(1 + g_{w''}(w - w'')) \le C_1(1 + g_{w''}^\sigma(w - w'')) \\ \le C_2(1 + g_w^\sigma(w - w''))^{N+1} \le C_3(1 + M(w))^{N+1} \end{aligned}$$

であるから，まとめると

$$|a_{\nu\mu}(w)| \le C_k(1+d_{\mu\nu})^{-k}(1+g_{w_\nu}(w-w_\nu))^{-k}$$

が，任意の k に対して成立する．次にこの評価を微分にまで広げよう．すなわち

$$|a_{\nu\mu}|_r^g(w) \le C_{kr}(1+d_{\nu\mu})^{-k}(1+g_{w_\nu}(w-w_\nu))^{-k}$$

を示そう．さて $X=(t,t)\in \mathbf{R}^{4n}$ として $\langle X,D\rangle a_{\nu\mu}$ を考える．$g_{w_\nu}(t)\le 1$ とする．最初に $w''\in U_\nu$ でああるから

$$\begin{aligned} q_w(t) &\le C g_{w''}(t)(1+g_w^\sigma(w-w''))^N \\ &\le C' g_{w_\nu}(t) \le C' g_{w_\nu}(t) M(w)^N \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

に注意する．さて

$$\begin{aligned} \langle X,D\rangle \bar{a}_\nu(x,\xi)a_\mu(y,\eta) = (&\langle X,D\rangle \bar{a}_\nu(x,\xi))a_\mu(y,\eta) \\ &+\bar{a}_\nu(x,\xi)(\langle X,D\rangle a_\mu(y,\eta)) \end{aligned}$$

において，(1.6.8) より $|\langle X,D\rangle \bar{a}_\nu(w)|$ は $|a_\nu|_1^g(w)M(w)^{N/2}$ で評価される．他方 $|\langle X,D\rangle a_\mu(w)|$ は $C|a_\mu|_1^{g_{w_\nu}}(w)(g_{w_\nu}(t)/g_{w_\nu}(t))^{1/2}$ で評価される．ところで

$$\begin{aligned} g_{w_\mu}(t)/g_{w_\nu}(t) &\le C g_{w'}(t)/g_{w''}(t) \\ \le C'(1+g_{w''}^\sigma(w'-w''))^N &\le C''(1+g_{w_\nu}^\sigma(w'-w''))^N \\ &\le C''(1+d_{\nu\mu})^N \end{aligned}$$

であるから，$\langle X,D\rangle \bar{a}_\nu(x,\xi)a_\mu(y,\eta)$ に (1.6.7) 式を適用して

$$|a_{\nu\mu}|_1^g(w) \le C(1+d_{\mu\nu})^{-N}(1+g_{w_\nu}(w-w_\nu))^{-N}$$

が成立する．以下高次の微分に対しても同様である．

さて $\|(1+g_{w_\nu}(w-w_\nu)^{-N}\|_{FL^1}$ を考察する．FL^1 ノルムは，アフィン変換の下で不変であるから，

$$g_{w_\nu}(w-w_\nu) = |w-w_\nu|^2 \quad (\text{ユークリッドノルム})$$

としてよく，従って $\|(1+g_{w_\nu}(w-w_\nu))^{-N}\|_{FL^1}$ は ν に依らない．故に

$$\|a_{\nu\mu}^w(x,D)\| \le C_N(1+d_{\nu\mu})^{-N}$$

が任意の N に対して成立する．ここで C_N は ν に依らない．最後に

$$\sum_\nu (1+d_{\nu\mu})^{-N} < +\infty,\ \ \sum_\mu (1+d_{\nu\mu})^{-N} < +\infty \tag{1.6.9}$$

を示そう．いま $z' \in U_\nu$, $z'' \in U_\mu$ とすると

$$1 + g^\sigma_{w_\nu}(z' - z'') \le C(1 + g^\sigma_{z'}(z' - z''))$$
$$\le C'(1 + g^\sigma_{z''}(z' - z''))^N \le C''(1 + g_{w_\mu}(z' - z''))^N$$

であるから，$1 + d_{\nu\mu} \le C''(1 + d_{\mu\nu})^{N'}$ である．故に (1.6.9) の最初の不等式を示せば十分である．補題 **??** の証明に従う． $M_k = \{\mu \mid d_{\nu\mu} \le k\}$ とおいて $\#(M_k)$ を評価する．補題 **??** の証明と同様にして，$w_\nu = 0$ で $g_{w_\nu}(t) = |t|^2$ と仮定できる．$\mu \in M_k$ とすると，$z' \in U_\mu$, $z'' \in U_\nu$ があって $g^\sigma_{w_\nu}(z' - z'') \le k$ となる．従って

$$|z'| \le |z''| + |z' - z''| \le g_{w_\nu}(z'')^{1/2} + g_{w_\nu}(z'' - z')^{1/2}$$
$$\le R_0 + Ck^{1/2} \le C'k^{1/2}$$

一方，

$$g_{z'}(t) \le g_{w_\nu}(t)(1 + g^\sigma_{w_\nu}(z' - w_\nu))^N$$
$$= g_{w_\nu}(t)(1 + g_{w_\nu}(z' - w_\nu))^N,$$
$$g_{w_\nu}(w_\nu - z') \le 2\{g_{w_\nu}(w_\nu - z'') + g_{w_\nu}(z' - z'')\}$$
$$\le Ck, \quad k \ge k_0$$

であるから $g_{z'}(t - z') \le ck^N g_{w_\nu}(t - z')$，すなわち

$$|t - z'| \le c'k^{-N} \Longrightarrow t \in U'_\mu$$

が成立する．B 個以上の U'_μ の交わりは空であるから，$c'\#(M_k)k^{-Nn/2} \le Bk^{n/2}$ となり，$\#(M_k) \le C'k^{(N+n)/2}$ が従う．以下 1.4 節と全く同じである．

1.7　擬微分作用素の有界性 (Sharp Gårding)

この節では，次の定理を証明する．

定理 1.7.1 g は σ 緩増加で，

$$h(x,\xi)^2 = \sup_t \frac{g_{(x,\xi)}(t)}{g^\sigma_{(x,\xi)}(t)} \le 1$$

を満たしているとする．いま $0 \le a(x,\xi) \in S(1/h, g)$ ならば

$$(a^w(x,D)u, u) \ge -C\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{S}$$

が成立する．ここで内積は $L^2(\mathbf{R}^n)$ の内積である．

証明：$G = (a+1)^{-1}h^{-1}g$ とおくと，$\sup G_w/G_w^\sigma \leq 1$ である．実際 $G_w^\sigma(t) = (a(w)+1)h(w)g_w^\sigma(t)$ であるから $\sup G_w/G_w^\sigma = (a(w)+1)^{-1} \leq 1$ である．さて

命題 1.7.1 g を σ 緩増加とし，$G = mg$ は緩変化で $G \leq G^\sigma$ が成立しているとする．ただし，$m \geq \delta > 0$ である．このとき G は σ 緩増加である．

証明：任意の $w, w_1 \in \mathbf{R}^{2n}$ に対して

$$G_{w_1} \leq CG_w(1 + G_{w_1}^\sigma(w-w_1))^N$$

を示す．まず G は緩変化故，$c_1 > 0$ があって，$G_w(w-w_1) < c_1$ ならば $G_w/C \leq G_{w_1} \leq CG_w$ となって，主張は成立する．次に，$G_w(w-w_1) \geq c_1$ とする．最初に $g_{w_1}(w-w_1) < c$ のときを考察する．このとき

$$c_1 \leq m(w)g_w(w-w_1) \leq Cm(w)g_{w_1}(w-w_1) \leq Cm(w)h(w_1)^2 g_{w_1}^\sigma(w-w_1).$$

他方，$G \leq G^\sigma$ より $m^2(w_1)h^2(w_1) \leq 1$. 従って $c_1 \leq Cm(w)m(w_1)^{-2}g_{w_1}^\sigma(w-w_1)$ が成立する．すなわち，

$$m(w_1) \leq C'm(w)m(w_1)^{-1}g_{w_1}^\sigma(w-w_1)$$

である．このことから，g が緩変化であるから

$$m(w_1)g_{w_1} \leq Cm(w)g_w(1 + m(w_1)^{-1}g_{w_1}^\sigma(w-w_1))$$

となり，結論を得る．次に $g_{w_1}(w-w_1) \geq c$ の時を考える．このとき

$$g_{w_1}^\sigma(w-w_1)/m(w_1) = G_{w_1}^\sigma(w-w_1) \geq G_{w_1}(w-w_1) \geq cm(w_1)$$

から $cm(w_1)^2 \leq g_{w_1}^\sigma(w-w_1)$ となって

$$g_{w_1}^\sigma(w-w_1) \leq CG_{w_1}^\sigma(w-w_1)^2$$

である．さて g は緩増加であり，$m \geq \delta > 0$ であるから

$$\begin{aligned} G_{w_1} = m(w_1)g_{w_1} &\leq C'm(w_1)m(w)(1 + G_{w_1}^\sigma(w-w_1)^2)^N \\ &\leq C''G_w(1 + G_{w_1}^\sigma(w-w_1))^{2N+1} \end{aligned}$$

が従う．ここで $m(w_1) \leq CG_{w_1}^\sigma(w-w_1)$ を使った．　(証終)

定理の証明に戻ろう．

$$|a^{(k)}(w;t_1,...,t_k)| \leq C_k(a(w)+1)^{1-k/2}h(w)^{-k/2}\prod_{j=1}^{k} g_w(t_j)^{1/2} \quad (1.7.1)$$

を確かめよう．この不等式から

$$a+1 \in S(a+1, G) \tag{1.7.2}$$

であることが分かる．$h \le 1$, $(a+1)h \le C+1$ であるから，$k \ge 2$ のときはこの不等式は明らかに成立する．$k=1$ の時を考える．w を一つ固定して，$g_w(Mt) = |t|^2$ となるように M を選ぶと，$|M^* f|_r^e = |f|_r^{g_w}$ であった．ただし $M^* f = f(Mw)$．さて $F(z) = h(w)a(w+Mz)$ とおくと， $F(z) \ge 0$ であって，上に注意したことから，$a \in S(1/h, g)$ より

$$|\partial_z^\alpha F(z)| \le C_\alpha, \quad |z| < c$$

が，全ての α に対して成立する．ここで次の Gleaser の不等式を示しておく．

補題 1.7.1 $f \in C^2(-\delta, \delta)$ を非負とする．このとき

$$\delta^2 |f'(0)|^2 \le f(0)(f(0) + 2 \sup_{|x|<\delta} \delta^2 |f''(x)|)$$

が成立する．

証明：x/δ を新しい変数に導入することによって，$de = 1$ と仮定してよい．f を定数倍することによって，$f(0) = 1$ と仮定できる．テイラー展開から

$$0 \le f(x) \le 1 + f'(0)x + Mx^2/2, \quad |x| < 1, \quad M = \sup_{|x|<1} |f''(x)|$$

である．$M \le 2$ ならば $x^2 = 1$ と選ぶと $|f'(0)| \le 1 + M/2 \le (1+2M)^{1/2}$ となる．$M > 2$ ならば，$x^2 = 2/M$ と選ぶと，$|f'(0)| \le 2/|x| = (2M)^{1/2}$ となり，この場合も正しい． (証終)

さてこの補題から $\nabla F(0)|^2 \le CF(0)$ が成立する．このことから

$$|h(w)a^{(1)}(w; Mt)|^2 \le |\nabla F(0)|^2 |t|^2 \le CF(0)|t|^2$$

である．すなわち $|h(w)a^{(1)}(w;t)|^2 \le Ch(w)a(w)g_w(t)$．従って $k=1$ のときも正しい．

ここで，命題 1.7.1 を適用するため，G が緩変化であることをみる．$w_1 = w + Mz$ とおく．$G_w(w - w_1) \le c_1$ とすると，$g_w(w_1 - w) = |z|^2 \le c_1 h(w)(a(w)+1) = c_1(F(0) + h(w))$ である．ところで，

$$\begin{aligned} F(z) &= F(0) + \langle \nabla F(0), z \rangle + F^{(2)}(\theta z; z, z) \\ &\ge F(0) - |\nabla F(0)||z| - C|z|^2, \quad |z| < c \\ \ge F(0) - \epsilon |\nabla F(0)|^2 - C_\epsilon |z|^2 &\ge (1 - C\epsilon)|F(0)| - C_\epsilon |z|^2 \end{aligned}$$

である．従って，$F(z)+h(w) \geq (1-C\epsilon)(F(0)+h(w))-C_\epsilon|z|^2$ が成立する．いま $|z|^2 < c_1(F(0)+h(w))$ ならば，ϵ, c_1 を十分小さくとることによって

$$F(z)+h(w) \geq (F(0)+h(w))/2$$

が成立するとしてよい．すなわち $2h(w)^{-1}(a(w)+1)^{-1} \geq h(w)^{-1}(a(w_1)+1)^{-1}$ が成立する．一方，$G_w(w-w_1) \leq c_1$ から $g_w(w-w_1) \leq c_1(C+1)$ であり，c_1 を十分小さくとると $g_w?C \leq g_{w_1} \leq Cg_w$ である．さらに，このことから， $h(w)/C^2 \leq h(w_1) \leq C^2h(w)$ も従う．これらをあわせて，G が緩変化であることが従う．故に補題 1.7.1 によれば G は σ 緩増加である．

つぎに $a(w)+1$ が G 連続かつ σ, G 緩増加であることを示す．まず

$$\begin{aligned} a(w') &= a(w) + \int_0^1 a^{(1)}(w;\theta(w-w'))d\theta \\ &\leq a(w) + C(a(w)+1)^{1/2}h(w)^{-1/2}g_w(w-w')^{1/2} \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

である．いま $G_w(w-w') \leq c$，すなわち $g_w(w-w') \leq c(a(w)+1)h(w)$ とすると，$a(w') \leq a(w)+C(a(w)+1) \leq C'(a(w)+1)$．すなわち，$a(w)+1$ は G 連続である．(1.7.3) から

$$a(w') \leq a(w) + C(a(w)+1)G_w(w-w')^{1/2}$$

である．ところで，$G_w(w-w') \leq G_w^\sigma(w-w') \leq C(1+G_{w'}(w-w))^N$ であることから，$a(w)+1$ は σ, G 緩増加であることが分かる．次の簡単な補題から，任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して $(a+1)^s \in S((a+1)^s, G)$ であることが分かる．

補題 1.7.2 $F(t) \in C^\infty((0,\infty))$ で全ての j に対して

$$|t^jF(j)(t)| \leq C_jF(t), \quad t>0$$

を満たすとする．このとき $m \in S(m,G)$, $m>0$ ならば $F(m) \in S(F(m),G)$ である．

証明：次に注意すれば容易である．

$$\begin{aligned} \Big(\prod_{j=1}^k \langle t_j, D\rangle\Big)F(m) = \sum C_{s,k_1,\ldots,k_s}F^{(s)}(m)m^{(k_1)}(w;t_{1j_1},\ldots,t_{1j_{k_1}}) \\ \cdots m^{(k_s)}(w;t_{sj_1},\ldots,t_{sj_{k_s}}) \end{aligned}$$

ここで，$\{t_{ij_\ell} \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq j_\ell \leq k_i\} = \{1,2,\ldots,k\}$ である． (証終)

定理の証明を終えよう．$F(t) = t^{1/2}$, $m = a+1$ とくと，補題 1.7.2 から $b = (a+1)^{1/2} \in S(b, G)$ である．ところで，$G_w/G_w^\sigma \leq (a(w); 1)^{-2}$ であるから，定理 1.5.1 によると

$$b^w(x, D)^2 - (a^w(x, D) + 1) = c^w(x, D) \in S(1, G)$$

となる．一方 $(b^w(x, D)^2 u, u) = \|b^w(x, D)u\|^2$ であるから，定理 1.6.1 によって $c^w(x, D)$ は $L^2(\mathbf{R}^n)$ 有界であり，従って結論を得る． (証終)

最後のベクトル値の擬微分作用素について注意しておく．B_i, $i = 1, 2$ を二つのバナッハ空間としよう．$a(x, \xi) : (x, \xi) \to a(x, \xi) \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ をベクトル値の表象とする．

$$\|a\|_k^G(w) = \sup \|a^{(k)}(w; t_1, ..., t_k)\|_{\mathcal{L}(B_1, B_2)} / \prod G(t_k)^{1/2}$$

とし，$\sup_w \|a\|_k^G(w)/m(w) < +\infty$ のとき $a \in S(m, G)$ と定義する．また

$$a(x, D)u = \int e^{i\langle x-y, \xi\rangle} a(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi, \ \ u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n, B_1)$$

によってベクトル値の擬微分作用素が定義される．この設定の下で，今までの議論はそのままベクトル値の表象，擬微分作用素に適用される．

1.8 擬微分作用素の有界性 (Fefferman-Phong)

この節では，次の定理を証明する．

定理 1.8.1 g は σ 緩増加で，

$$h(x, \xi)^2 = \sup_t \frac{g_{(x,\xi)}(t)}{g^\sigma_{(x,\xi)}(t)} \leq 1$$

を満たしているとする．いま $0 \leq a(x, \xi) \in S(1/h^2, g)$ ならば

$$(a^w(x, D)u, u) \geq -C\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{S}$$

が成立する．ここで内積は $L^2(\mathbf{R}^n)$ の内積である．

次の補題から始めよう．

補題 1.8.1 $0 \leq f \in C^\infty(B_2)$, $B_r = \{x \in \mathbf{R}^\nu \mid |x| < r\}$ とし，さらに

$$|f|_4^e(x) \leq 1, \quad x \in B_2$$
$$\max(|f(0)|, |f|_2^e(0)) = 1$$

を満たすとする．ここで $e(x)=|x|^2$ はユークリッドノルムである．このとき，つぎのような f によらない $r>0$ がある．

$$\frac{1}{2}<\max\left(|f(x)|,|f|_2^e(x)\right)<2,\ \ x\in B_r \tag{1.8.1}$$
$$|f|_j^e(x)<8,\ \ x\in B_r,\ \ j=0,1,2,3, \tag{1.8.2}$$
$$f(x)=f_1(x)+g(x)^2 \tag{1.8.3}$$

ここで，f_1，$g\in C^\infty(B_r)$ で，さらにある $y\in\mathbf{R}^n\setminus 0$ があって B_r で $f_1\geq 0$, $\langle y,\partial\rangle f_1(x)=0$ が成立する．また $\sup_{B_r}|D^\alpha f_1|$, $\sup_{B_r}|D^\alpha g|$ は $\sup_{B_r}|D^\beta f|$, $|\beta|\leq 2+|\alpha|$ で評価される．

証明：まず

$$\frac{1}{2}|\sum_{|\alpha|=2}\partial^\alpha f(0)x^\alpha|=\frac{1}{2}|f^{(2)}(0;x,x)|\leq\frac{1}{2}|f|_2^e(0)|x|^2,$$
$$\frac{1}{24}|\sum_{|\alpha|=4}\partial^\alpha f(y)x^\alpha|\leq\frac{1}{24}|f|_4^e(y)|x|^4,\ \ y=\theta x,\ \ 0<\theta<1,$$

に注意すると，f の原点のまわりのテイラー展開から

$$0\leq f(x)\leq 1+f_1(x)+|x|^2/2+f_3(x)+|x|^4/24,\quad |x|<2 \tag{1.8.4}$$

が成立する．ここで $f_j(x)$ は j 次のテイラー多項式である．(1.8.4) 式，および (1.8.4) で x を $-x$ に置き換えて得られる不等式から

$$|f_1(x)+f_3(x)|\leq 1+|x|^2/2+|x|^4/24,\quad |x|\leq 2 \tag{1.8.5}$$

が従う．(1.8.5) を $|x|\leq 1$ で考えて

$$|f_1(x)+f_3(x)|\leq\frac{3}{2}+\frac{1}{24}$$

また，$|x|\leq 2$ で考えて， $x=2x$ とおくと

$$|2f_1(x)+8f_3(x)|\leq 3+\frac{2}{3},\quad |x|\leq 1$$

を得る．従って

$$6|f_1(x)|=|8(f_1(x)+f_3(x))-(2f_1(x)+8f_3(x))|\leq 16,$$
$$6|f_3(x)|=|2f_1(x)+8f_3(x)-2(f_1(x)+f_3(x))|<7$$

の成立することが分かる．従って $|f|_1^e(0)\leq 3$, $|f|_3^e(0)\leq 7$ である．故に，$r>0$ を十分小にとれば (1.8.2) が成り立つ．$f(0)=1$ とすると

$f(x)=1+f^{(1)}(\theta x;x)$ から，また $|f|^e_2(0)=1$ ならば $f^{(2)}(y;x_1,x_2)=f^{(2)}(0;x_1,x_2)+f^{(3)}(\theta y,x_1,x_2,y)$ から

$$\Big|\frac{f^{(2)}(y;x_1,x_2)}{|x_1||x_2|}-\frac{f^{(2)}(0;x_1,x_2)}{|x_1||x_2|}\Big|\le 7|y|.$$

故に (1.8.1) を得る．(1.8.3) を示そう．$|f|^e_2(0)=1$ と仮定する．$|f|^e_2(0)|/2=\sup|f_2(x)|/|x|^2=1/2$ から $1/2$ または $-1/2$ は $f_2(x)$ の固有値である．T を直交行列とするとき，$f^T(x)=f(Tx)$ について補題を証明すればよいので，$y=e_1=(1,0,...,0)$ がその固有ベクトルであるとしてよい．このとき $f_2(x)=(\pm 1/2)x_1^2+g(x_2,...,x_\nu)$ であるから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)=\pm 1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_j}(0)=0,\ \ (j\neq 1)$$

は明らかである．従って

$$0\le f(x_1,0,...,0)\le f(0)+x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\pm\frac{1}{2}x_1^2+\frac{7}{6}|x_1|^3+\frac{x_1^4}{24}$$

である．さて $f(0)<1/100$ と仮定し，$x_1=\pm 1/3$ を $x_1\partial f(0)/\partial x_1\le 0$ となるように選ぶと，$1/100-1/18+7/162+3^{-4}/24<0$ から

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)=1$$

であることが分かる．次に $|x_1|=r,\ |x'|<r,\ x'=(x_2,...,x_n)$ に対して

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)-x_1\Big|<\frac{1}{2}|f|^e_3|x|^2+\frac{1}{6}|f|^e_4|x|^3<4|x|^2+\frac{|x|^3}{6}$$

が成り立っている．いま

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\Big|+4r^2+\frac{r^3}{6}<r/\sqrt{2} \tag{1.8.6}$$

を満たす r が存在するとすると，$\partial f(x)/\partial x_1$ は $|x_1|=r/\sqrt{2},\ |x'|<r/\sqrt{2}$ で x_1 と同じ符号である．従って

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x')=0 \tag{1.8.7}$$

は任意の $|x'|<r/\sqrt{2}$ に対して一意的な解 $x_1=X(x')$ をもつ．以下 $r/\sqrt{2}$ を r とかく。

$$\partial X/\partial x_j=-\partial_1\partial_j f(X,x')/\partial_1^2 f(X,x')$$

であるから，X の k 次の微分は f の $k+1$ 次までの微分で評価される．さてテイラー展開から

$$f(x_1,x') = f(X(x'),x') + (x_1 - X(x'))^2 Q(x),$$
$$Q(x) = \int_0^1 (1-\theta)\partial_1^2 f(X(x') + \theta(x_1 - X(x')), x')d\theta$$

と書ける．ここで Q の k 次の微分は f の $k+2$ 次までの微分で評価されることを注意しておく．$Q(x) \ge 1/4$ であるから

$$f_1(x) = f(X(x'),x'),\ \ g(x) = (x_1 - X(x'))Q(x)^{1/2}$$

とおいて (1.8.3) を得る．ここで $f(0) < r^4/8 (< 1/100)$ ならば (1.8.6) を満たす r が存在することを確かめる．いま $r(< 1/2)$ は

$$4r + \frac{r^2}{6} < \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \ \frac{1}{2} < \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) < 2, \quad x \in B_r$$

が成立するよう小さくとっておく．$|f|_2^e(x) < 2,\ x \in B_r$ であるから，補題 1.7.2 から

$$r^2|f'(0)|^2 \le f(0)(f(0) + 4r^2) \le f(0)$$

となって $|f'(0)| \le r/2\sqrt{2}$ を満たす．従って (1.8.6) を満たす r がとれる．

最後に $f(0) > r^4/8$ の場合を考える．$r_0 < r$ を $|x| \le r_0$ ならば $f(x) > r^4/9$ となるように選ぶ．このとき

$$x \in B_{r_0},\ \ f(0) < r^4/8 \Longrightarrow f(x) = f_1(x) + g(x)^2,$$
$$x \in B_{r_0},\ \ f(0) \ge r^4/8 \Longrightarrow f(x) = (\{f(x)\}^{1/2})^2$$

となって補題が証明された．　(証終)

次に

補題 1.8.2 g を $\mathbf{R}^{2n}$ 上の正定値二次形式で $g/g^\sigma \le \lambda^2 \le 1$ を満たすとする．$0 \le a \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ が

$$|a|_k^g(w) \le \lambda^{-2}, \quad w \in \mathbf{R}^{2n},\ \ k \le N \tag{1.8.8}$$

を満たすとする．いま N が十分大ならば

$$(a^w(x,D)u, u) \ge -C\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{S} \tag{1.8.9}$$

が成り立つ．ここで C は $g,\ a$ に依らない定数である．

証明：$a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ としてよい．実際 $\chi(w) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ を $0 \le \chi(w) \le 1$ で原点の近くでは恒等的に 1 となるものとする．$a_\epsilon(w) = (1-\epsilon)\chi(\epsilon^2 w)a$ とおこう．このとき

$$|a_\epsilon|_k^g \le |(1-\epsilon)\chi(\epsilon^2 w)||a|_k^g + \sum_{j\ge 1}\binom{k}{j}|(1-\epsilon)\chi(\epsilon^2\cdot)|_j^g|a|_{k-j}^g$$

であり，$|\chi(\epsilon^2\cdot)|_j^g \le C_j\epsilon^{2j}$ であるから，ϵ を十分小にとると

$$|a_\epsilon|_k^g \le (1-\epsilon)\lambda^{-2} + \sum_{j\ge 1}\binom{k}{j}\epsilon^{2j}C_j\lambda^{-2} \le \lambda^{-2}$$

となる．いま a_ϵ にに対して (1.8.9) が成立するとすると，a_ϵ は a に $S(\lambda^{-2}, g)$ で弱収束するから定理 1.6.1 によれば $\mathcal{S}$ で $a_\epsilon^w(x,D)u \to a^w(x,D)u$ となって a に対しても成立する．ここで次の補題を認めよう．

補題 1.8.3 g を $\mathbf{R}^{2n}$ 上の正定値二次形式とする．このとき

$$g(\chi(x,\xi)) = \sum \lambda_j(x_j^2 + \xi_j^2)$$

となる $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$ の線形シンプレクティック写像が存在する．ここで λ_j は g から一意的にきまり

$$\sup g/g^\sigma = \max \lambda_j^2$$

である．

この補題と定理**??** によれば

$$g = \sum \lambda_j(x_j^2 + \xi_j^2), \quad \lambda_j \le \lambda$$

と仮定してよい．明らかに $g = \lambda\sum(x_j^2 + \xi_j^2)$ に対しても (1.8.8) が成立している．従って (1.8.8) は

$$|a|_k^e(w) \le \big\{\sup |a^{(k)}(w; t_1, ..., t_k)|/\prod g(t_j)^{1/2}\big\} \tag{1.8.10}$$
$$\times\big\{\prod g(t_j)^{1/2}/|t_j|\big\} \le \lambda^{-2}\lambda^{k/2} = \lambda^{(k-4)/2},\ \ k \le N,\ \ w \in \mathbf{R}^{2n}$$

と書き換えられる．ここで e はユークリッドの距離である．さて補題 1.8.2 を n に関する帰納法で示そう．今 a はある方向に定数であるとすると，定理 1.5.4 から a は ξ_1 に依らないとしてよい．このとき $a^w(x,D)$ を x_1 をパラメーターとする $x' = (x_2, ..., x_n)$ 変数に関する作用素とみると，帰納法の仮定から $(a^w(x_1, x', D')u, u) \ge -C\|u\|^2$ が x_1 に一様に成立する．従って x_1 について積分すれば望む結果を得る．

次に緩変化で σ 緩増加な距離 $G = H(x, \xi)e$ で $H \le 1$, $a \in S(1/H^2, G)$ をみたすものが存在することを示す．このような H が存在すれば $|a|_2^e \le H^{-1}$ であることに注意して

$$1/H(w) = \max(1, a(w)^{1/2}, |a|_2^e(w))$$

と定義しよう．最初に G が緩変化であることを確かめる．$f(z) = H(w)^2 a(w + z/H(w)^{1/2})$ とおくと，

$$f^{(k)}(z; t_1, ..., t_k) = H(w)^2 a^{(k)}(w+z/H(w)^{1/2}; t_1/H(w)^{1/2}, ..., t_k/H(w)^{1/2}) \tag{1.8.11}$$

であるから (1.8.10) から $|f|_4^e \le 1$ である．また

$$f(0) = H(w)^2 a(w) \le 1, \quad |f|_2^e(0) = H(w)|a|_2^e(0) \le 1$$

である．いま $f(z) + 1 - f(0)$ に補題 1.8.1 を適用すると $r > 0$ があって $H(w)^{1/2}|w - w_1|^2 \le r^2$ のとき

$$H(w)^2 a(w_1) \le 1 + H(w)^2 a(w), \quad H(w)|a|_2^e(w_1) < 2$$

が成立する．故に $|a|_2^e(w_1)$, $a(w_1)^{1/2} \le 2/H(w)$ となって

$$1/H(w_1) \le 2/H(w), \quad H(w)|w - w_1|^2 < r^2$$

すなわち $G_w(w - w_1) < r^2$ のとき $G_w \le 2G_{w_1}$ が成立する．故に G は緩変化．$G \le G^\sigma$ は自明であるから，命題 1.7.1 によって G は σ 緩増加である．再び補題 1.8.1 から $|z| < r$ で $|f|_j^e(z) \le 8$, $j < 4$ が成立している．いま $\chi \in C_0^\infty(\{z \mid |z| < r\})$ を $|z| < r/2$ では恒等的に 1 となるものとする．このとき $|\chi f|_j^e(z) \le C_j$, $j < 4$, $z \in \mathbf{R}^{2n}$ は明らかである．$1/H(w) \le \lambda^{-1}$ であるから $k \ge 4$ のとき (1.8.11) から $|f|_k^e \le 1$ となって

$$|\chi f|_k^e \le C_k, \quad k = 0, 1, ...$$

が成立する．

さて補題 **??** から $\mathbf{R}^{2n}$ の点列 $\{w_\nu\}$ があって $B'_\nu = \{w \mid G_{w_\nu}(w - w_\nu) < r^2/4\}$ は $\mathbf{R}^{2n}$ を覆い，B 個以上の $B_\nu = \{w \mid G_{w_\nu}(w - w_\nu) < r^2\}$ の交わりは空となる．さらに $\phi_\nu \in C_0^\infty(B'_\nu)$ で

$$|\phi_\nu|_k^G \le C_k, \quad \sum \phi_\nu^2(w) = 1$$

を満たすものが存在する．実際，補題 **??** の ϕ_ν を ψ_ν と書き $\phi_\nu = \psi_\nu/(\sum \psi_\nu^2)^{1/2}$ とおけばよい．$a_\nu(w) = \chi(H(w_\nu)^{1/2}(w - w_\nu))^2 a(w)$ とおくと $w \in B'_\nu$ なら $a_\nu(w) = a(w)$ であるから

$$\sum \phi_\nu(w)^2 a_\nu(w) = a(w)$$

である．また $a_\nu(w_\nu+z/H(w_\nu)^{1/2})=\chi(z)f(z)H(w_\nu)^{-2}$ であるから

$$a_\nu \in C_0^\infty(B_\nu), \quad |a_\nu|_k^G \le C_1 H^{-2}, \quad k \le N$$

も容易である．いま ν に依らない定数 C_2 があって次の不等式が成立すると仮定しよう．

$$(a_\nu^w(x,D)u,u) \ge -C_2(u,u), \quad u \in \mathcal{S}. \tag{1.8.12}$$

さて $\Phi(x,\xi)=\{\phi_\nu(x,\xi)\} \in \mathcal{L}(\mathbf{C},\ell^2)$ をベクトル値のシンボルと考える．各点で B 個以上の ϕ_ν は考えなくてよいから，$\Phi(x,\xi) \in S(1,G)$ である．定理 1.7.1 から $\Phi^w(x,D):\mathcal{S}(\mathbf{R}^n,\mathbf{C}) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^n,\ell^2)$ は L^2 有界であり，従って

$$\sum_\nu \|\phi_\nu^w(x,D)u\|^2 \le C\|u\|^2 \tag{1.8.13}$$

が成立する．またベクトル値シンボル $A(x,\xi)=\{a_\nu(x,\xi)\delta_{\nu\mu}\} \in \mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)$ を考える．ここで $A(x,\xi)\{u_\nu\}=\sum a_\nu u_\nu$ である．

$$\|A(x,\xi)\|_{\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)}^2 = \sup_\nu |a_\nu(x,\xi)|, \quad \|A\|_k^G \le \sum |a_\nu|_k^G$$

に注意すると $A(x,\xi) \in S(H^{-2},G)$ である．さて $\sum \phi_\nu^w(x,D)a_\nu^w(x,D)\phi_\nu^w(x,D)$ は $\Phi^w(x,D)A^w(x,D)\Phi^w(x,D)$ であるからこのシンボルを考察する．まず $A^w\Phi^w$ のシンボルは

$$\begin{aligned}A\#\Phi &= \{a_\nu\delta_{\nu\mu}\}\{\phi_\mu\} + \frac{i}{2}\sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)\{a_\nu\delta_{\nu\mu}\}(x,\xi)\{\phi_\mu\}(y,\eta) + S(1,G)\\ &= \{a_\nu\phi_\nu\} + \frac{i}{2}\{a_\nu,\phi_\nu\} + S(1,G)\end{aligned}$$

であり $\Phi^w(A^w\Phi^w)$ のシンボルは

$$\begin{aligned}&\{\phi_\nu\}\big(\{a_\nu\phi_\nu\} + \frac{i}{2}\{a_\nu,\phi_\nu\} + S(1,G)\big)\\ &+\frac{i}{2}\sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)\{\phi_\nu(x,\xi)\}\big(\{a_\nu\phi_\nu\}(y,\eta) + \frac{i}{2}\{a_\nu,\phi_\nu\}(y,\eta) + S(1,G)\big)\\ &= \sum \phi_\nu a_\nu \phi_\nu + \frac{i}{2}\sum \phi_\nu\{a_\nu,\phi_\nu\} + \frac{i}{2}\{\phi_\nu, a_\nu\phi_\nu\} + S(1,G)\\ &= \sum \phi_\nu a_\nu \phi_\nu + S(1,G) = a + S(1,G)\end{aligned}$$

である．故に $\sum \phi_\nu^w(x,D)a_\nu^w(x,D)\phi_\nu^w(x,D) = a^w(x,D) + R^w(x,D)$ となる．ただし $R \in S(1,G)$．従って (1.8.13) より

$$\begin{aligned}(a^w(x,D)u,u) &= \sum (a_\nu^w(x,D)\phi_\nu^w(x,D)u, \phi_\nu^w(x,D)u) - (R^w(x,D)u,u)\\ &\ge -C_2C_3\|u\|^2 - C_4\|u\|^2\end{aligned}$$

となって結論を得る．

最後に (1.8.13) を示そう．$H_\nu = H(w_\nu)$ とおく．$f(z) = H_\nu^2 a(w_\nu + z/H_\nu^{1/2}) + 1 - a(w_\nu)H_\nu^2$ に補題 1.8.1 を適用すると $f(z) = f_1(z) + g(z)^2$ と書け，従って

$$\chi(z)^2 f(z) = \chi(z) f_2(z) + (\chi(z)g(z))^2$$

と書ける．ここで $f_2(z)$ は $f_1(z)$ を y 方向には定数で χ の台では恒等的に 1 となる関数で切り落としたものである．もとの変数に戻り

$$\chi_\nu = \chi((w - w_\nu)H_\nu^{1/2}), \quad b_\nu = f_2((w-w_\nu)H_\nu^{1/2})/H_\nu^2,$$
$$c_\nu = (\chi g)((w-w_\nu)H_\nu^{1/2})/H_\nu$$

とすると

$$a_\nu(w) = \chi_\nu^2(w) b_\nu(w) + c_\nu(w)^2 - \kappa_\nu \chi_\nu(w)^2$$

が成り立つ．ここで $\kappa_\nu = (1 - a(w_\nu)H_\nu^2)/H_\nu^2$ である．$|f|_k^e \le C_k$ であったから，補題 1.8.1 によれば b_ν, c_ν, χ_ν のそれぞれ $S(H_\nu^{-2}, H_\nu e)$, $S(H_\nu^{-1}, H_\nu e)$, $S(1, H_\nu e)$ におけるいくらでも多くのセミノルムは，N を大きくとれば，有限である．また，それらは ν について有界である．帰納法の仮定から

$$(b_\nu^w(x,D)u, u) \ge -C_5\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{S}$$

が成立する．ところで定理 1.5.1 から $\chi_\nu^w(x,D) b_\nu(x,D) \chi_\nu^w(x,D)$ のシンボルが $\chi_\nu b_\nu \chi_\nu + S(1, H_\nu e)$ であることなどに注意すると

$$r_\nu^w(x,D) = a_\nu^w(x,D) - \chi_\nu^w(x,D) b_\nu^w(x,D) \chi_\nu^w(x,D)$$
$$-c_\nu^w(x,D) c_\nu^w(x,D) - \kappa_\nu \chi_\nu^w(x,D) \chi_\nu^w(x,D)$$

のシンボルに対して，いくらでも多くの $S(1, He)$ でのセミノルムが ν に関して有界である．従って定理 1.6.2 から $(r_\nu^w(x,D)u, u) \ge -C\|u\|^2$ となり (1.8.12) が成立し，補題の証明が終る． (証終)

最後に定理 1.8.1 を示そう．$\{\phi_\nu\}$ は補題 1.8.2 と同じものとする．$\psi_\nu \in C_0^\infty(B_\nu)$ を非負で $\psi_\nu \phi_\nu = \phi_\nu$ を満たし $S(1, g)$ で有界なものとする．$a_\nu = \psi_\nu a$ とおくと $a = \sum \phi_\nu a_\nu \phi_\nu$ である．仮定から a_ν の $S(h^{-2}, g_{w_\nu})$ でのセミノルムは ν について有界である．故に補題 1.8.2 から

$$(a_\nu^w(x,D)u, u) \ge -C\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{S}$$

が成立する．ここで C は ν に依らない．従って

$$\sum (a_\nu^w(x,D) \phi_\nu^w(x,D)u, \phi_\nu^w(x,D)u) \ge -C'\|u\|^2$$

が従う．一方補題 1.8.2 の証明でみたように

$$\sum \phi_\nu^w(x,D)a_\nu^w(x,D)\phi_\nu^w(x,D) - a^w(x,D)$$

は L^2 有界であるから結論を得る．　(証終)

系 **1.8.1** $0 \le a \in S^{2(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $0 \le \delta < \rho \le 1$ とする．このとき $a^w(x,D)$, $a(x,D) + a^*(x,D)$ は下から L^2 有界である．

証明：まず

$$\sup g/g^\sigma = h^2 = \langle \xi \rangle^{2(\delta-\rho)}, \quad g = \langle \xi \rangle^{2\delta}|dx|^2 + \langle \xi \rangle^{-2\rho}|d\xi|^2$$

であるから $S^{2(\rho-\delta)}_{\rho,\delta} = S(h^{-2}, g)$ となって $a^w(x,D)$ に対する主張は定理 1.8.1 そのものである．$a(x,D) = b^w(x,D)$ とすると，式 (1.5.13) から $b(x,\xi) = e^{-i\langle D_x, D_\xi \rangle/2}a(x,\xi)$ で $a(x,D)^* = \bar{b}^w(x,D)$ であり，$\bar{b}(x,\xi) = e^{i\langle D_x, D_\xi \rangle/2}\bar{a}(x,\xi)$ となる．a は実数値であるから

$$b = a - \frac{i}{2}\langle D_x, D_\xi \rangle a + S(1,g),$$
$$\bar{b} = a + \frac{i}{2}\langle D_x, D_\xi \rangle a + S(1,g).$$

故に $b + \bar{b} = 2a + S(1,g)$ で $a(x,D) + a(x,D)^* = (b+\bar{b})^w = 2a^w(x,D) + S(1,g)$ となって結論が従う．　(証終)

定理 1.7.1 はベクトル値の擬微分作用素の場合にも成立する．まず補題 1.8.2 のベクトル版を示す．

補題 **1.8.4** g は $\mathbf{R}^{2n}$ 上の正定値二次形式で $g/g^\sigma \le \lambda^2 \le 1$ を満たすとする．$0 \le a \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n}; \mathcal{L}(H,H))$ は

$$|a|_k^g(w) \le \lambda^{-1}, \quad w \in \mathbf{R}^{2n}, \ \ k \le N \tag{1.8.14}$$

を満たすとする．ただしここで H はあるヒルベルト空間である．このとき N が十分大ならば

$$(a^w(x,D)u, u) \ge -C\|u\|^2, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n; H) \tag{1.8.15}$$

が成立する．

証明：補題 1.8.2 の証明と同様にして $g = \lambda e$ と仮定できる．e はユークリッドの距離である．仮定から

$$|a|_k^e(w) \le \lambda^{(k-2)/2}, \quad k \le N$$

が従う．a の原点のまわりの 1 次のテイラー展開を $A_0+A_1(x,\xi)$ とすると $|a|_2^e\le 1$ であるから任意の $v\in H$ に対して

$$(A_0v,v)+(A_1(x,0)v,v)+|x|^2\|v\|^2/2\ge 0,$$
$$(A_0v,v)+(A_1(0,\xi)v,v)+|\xi|^2\|v\|^2/2\ge 0$$

が成立する．それぞれの不等式で x, ξ をそれぞれ $2x$, 2ξ で置き換えたものを $v=u(x)$, $v=\hat{u}(\xi)$ に適用して，それらを加えると

$$(A_0u,u)+(A_1(x,D)u,u)\ge -\sum(\|x_ju\|^2+\|D_ju\|^2) \tag{1.8.16}$$

を得る．さて再びテイラー展開から

$$a(x,\xi)=A_0+A_1(x,\xi)+\sum x_jx_kR_{jk}(x,\xi)+\sum\xi_j\xi_kS_{jk}(x,\xi)$$
$$+2\sum x_j\xi_kT_{jk}(x,\xi)$$

と書ける．ここで R_{jk}, S_{jk} は j,k について対称であり，R_{jk}, S_{jk}, T_{jk} の $S(1,g)$ でのいくらでも多くの (N を大きくとれば) セミノルムが有限である．さて

$$x_ja^w(x,D)=\big((x_j+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\xi_j})a\big)^w(x,D),$$
$$D_ja^w(x,D)=\big((\xi_j-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x_j})a\big)^w(x,D)$$

などに注意すると

$$a^w(x,D)=A_0+A_1(x,D)+\sum x_jR_{jk}^w(x,D)x_j+\sum D_jS_{jk}^w(x,D)D_k$$
$$+\sum x_jT_{jk}^w(x,D)D_k+\sum D_kR_{jk}^w(x,D)x_j-R^w(x,D)$$

と書ける．ここで

$$4R=\sum\partial^2R_{jk}/\partial\xi_j\partial\xi_k+\sum\partial^2S_{jk}/\partial x_j\partial x_k-2\sum\partial^2T_{jk}/\partial\xi_j\partial x_k$$

であり，従って R の $S(\lambda,g)$ でのセミノルムは有限である．定理 1.6.2 によれば R_{jk}^w, S_{jk}^w, T_{jk}^w, R^w は L^2 有界であり，さらに $\|u\|^2\le\|x_j\|^2+\|D_ju\|^2$ に注意すると (1.8.16) から

$$(a^w(x,D)u,u)\ge -C\sum(\|x_ju\|^2+\|D_ju\|^2) \tag{1.8.17}$$

が従う．次に任意の $(y,\eta)\in\mathbf{R}^{2n}$ に対して

$$(a^w(x,D)u,u)\ge -C\sum(\|(x_j-y_j)u\|^2+\|(D_j-\eta_j)u\|^2) \tag{1.8.18}$$

の成立することを確かめる．実際，定理 **??** から

$$\begin{aligned}(a^w(x,D)u,u) &= ((a\circ\chi)^w(x,D)U^{-1}u, U^{-1}u)\\ &\geq -C\sum(\|x_jU^{-1}u\|^2+\|D_jU^{-1}u\|^2)\end{aligned}$$

であるから $(a\circ\chi)(x,\xi)=a(x+y,\xi+\eta)$ と χ を選べば必要な結果を得る．さて $\phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ を

$$\sum\phi(x-\nu)^2=1$$

となるように選ぶ．ここで和は全ての整数点 ν にわたる．$\phi_\nu(x)=\phi(x-\nu)$ とおこう．(1.8.18) を $y=\nu$ に u を $\phi_\nu u$ におきかえて適用すると $x_j-\nu_j$ が ϕ_ν の台上で有界なことより，

$$\sum_\nu\|(x_j-\nu_j)\phi_\nu u\|^2\leq C\|u\|^2$$

が成立する．$g=|dx|^2+\lambda|d\xi|^2$ とすると，$a\in S(\lambda^{-1},g)$．また $\phi_\nu\in S(1,g)$ でセミノルムは ν について有界である．従って補題 1.8.2 の証明でみたように

$$\sum\phi_\nu^w(x,D)a^w(x,D)\phi_\nu^w(x,D)$$

のシンボルは $a+b$ とかけ b の $S(1,g)$ でのいくらでも多くのセミノルムが有限となる．従って

$$(a^w(x,D)u,u)\geq -C(\|u\|^2+\sum\|(D_j-\eta_j)u\|^2) \tag{1.8.19}$$

が成立する．ここで u を $\phi_\nu^w(D)u$ に，また η を ν に置き換えて (1.8.19) を導くのと同じ議論を繰り返して補題を得る．　(証終)

定理 1.8.1 の証明の局所化の手続きを繰り返せば次の定理を得る．

定理 1.8.2 g を σ 緩増加な距離とし $h(x,\xi)=\sup g/g^\sigma\leq 1$ を満たすとする．いま $a\in S(1/h,g)$ が $\mathcal{L}(H,H)$ で非負の値をとるとすると

$$(a^w(x,D)u,u)\geq -C\|u\|^2,\quad u\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n;H)$$

が成立する．ここで H はヒルベルト空間である．