1 講義 I

$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ で自然数の全体を表す．基本的な性質のいくつかを述べる．m, n をかってな 2 つの自然数とするとき $m < n$, $m = n$, $m > n$ のいずれかが成立する．n を自然数とするとき $n + 1$ も自然数である．このことから自然数は無限個あることがわかる．有限個と仮定してその最大のものを N とすると $N + 1$ も自然数であるから矛盾である．重要なことは $S \subset \mathbb{N}$ が $1 \in S$ かつ "$n \in S \Longrightarrow n + 1 \in S$" なる性質をもてば $S = \mathbb{N}$ となることである (Peano の公理系, 1891, 数の概念について)．これは数学的帰納法の原理と呼ばれる．$P_1, P_2 \cdots$ と無限に続く命題の列があるとき，これがすべて真であることをいうためには，P_1 を検証し，かつ，任意の n に対して $P_1,...,P_n$ が成り立てば P_{n+1} も成り立つことを示せばよい．

以下整数の全体を $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ でまた有理数の全体を $\mathbb{Q}$ で表す．

1.1 素数

自然数 a, b がある．このとき $a = bc$ を満たす自然数 c があるとき b は a を整除する，あるいは b は a の約数であるという．また a は b の倍数であるという．b, c は a の整数因子という．a 自然数とするといつでも $a = a \cdot 1$ であるから 1 と a 自身は常に a の約数である．これらを自明な約数という．1 より大きな自然数で自明な約数しかもたないものを素数という．整除関係の理論の最初のものとして

定理 **1** (Euclid, 原論，B.C.270?) 1 より大きな自然数は素数の積として表される．

証明をしよう．a を与えられた自然数とする．a それ自身が素数でなければ素数の定義から a は 2 つの自然数 b, c の積，すなわち $a = bc$ である．ここで b, c はともに 1 より大，したがってともに a より小である．いま定理が a より小な自然数すべてに対して成り立っているものとする．とくに b, c に対しても成り立っている．従って b, c ともに素数の積となっている．したがって $a = bc$ も素数の積である．ところで $a = 2$ のときには定理は正しい．なぜなら 2 は素数であるから．以上から数学的帰納法の原理によって定理は 1 より大きいすべての自然数に対して正しい．

以上の証明はかなり形式的で素数の定義からの直接の帰結である．次の定理はこれとは性格が異なる．

定理 2 (Euclid, 原論) 素数は無限に存在する．

p_1,p_2,...,p_n を n 個の素数とする．これらがどのように選ばれていても，またどれほど多くても，これらとは異なる素数が必ず存在することを示そう．いま

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

なる自然数を考える．定理 1 によると，素数 p とある自然数 c (これは 1 のこともある．このときは a が素数) があって $a = pc$ となる．すなわち

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = pc.$$

さてこの素数 p は p_1, p_2,...p_n のどれとも異なることを示そう．実際，もし $p = p_k$ とすると，$b = p_1 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n$ として

$$pb + 1 = pc$$

したがって $p(c - b) = 1$ となる．ところが p は 1 より大きく，$c - b$ は必ず 1 以上であるからこれは矛盾である．したがってこのことは起こりえない．

1.2 素数定理

素数を求めることは原理的には簡単である．まず 2 を残して 2 の倍数をすべて除く．次に 3 を残して 3 の倍数をすべて除く,.... (エラトステネスの櫛) 数が大きくなるとだんだん素数は少なくなっていく．どのくらいの割合で少なくなっていくのか？(素数定理).

$$\pi(n) = n \text{ 以下の素数の個数}$$

とすると

定理 3 (素数定理)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1.$$

おおざっぱな言い方をすると，大きな自然数 n が素数である "確率" はだいたい $1/\log n$ である．素数定理は 1896 年頃 Hadamard と de la Vallée-Poisson によって独立に，高度な解析学上の手段を用いて独立に証明された．1948 年に A.Selberg によって初等的な (簡単ではない) 証明が与えられた．

2　講義 II

2.1　加群

$M = \{u, v, ...\}$ を整数の集合とする．$u, v \in M$ のとき必ず $u - v \in M$ という性質をもっているとき M を加群という．これを何回も繰り返すと

$$u, v \in M \Longrightarrow xu + yv \in M$$

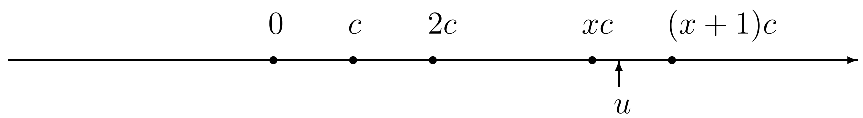
がすべての整数 x, y について成り立つことが分かる．このようなもののうちで一番簡単なものは，自然数 a を一つ固定してその整数倍の全体，すなわち

$$\{0, a, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, ...\}$$

という集合である．これを $\mathbb{Z}a$ で表すことにする．次に自然数 a, b を固定し，x, y にあらゆる整数値をとらせて，$xa + yb$ の全体の集合もこの性質をもっている．この加群を $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$ で表す．加群について基本的なことの一つは

補題 1 M をかってな加群とする．このとき一意的に定まる正の数 c があって，$M = \mathbb{Z}c$ となる．

これを確かめるには，c を M のなかの正の数のうちで最小のものとして，数直線上に加群 $\mathbb{Z}c$ の要素に対応する点を印づけていく．そうするとまず M が加群であることから $\mathbb{Z}c \subset M$ は明らかである．つぎに $u \in M$ とする．u は加群 $\mathbb{Z}c$ の要素になるか，またはその中の引き続く 2 つの数 xc, $(x+1)c$ の間にある．このとき $u - xc$ も M のなかにあり，$u - xc > 0$ である．これは $c > u - xc > 0$ となって c が M のなかで正の最小のものであったことに反する．従って $M = \mathbb{Z}c$ である．



定理 4 (最大公約数) $a, b \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}c$$

となる $c \in \mathbb{N}$ がただ一つ定まる．この c は a と b の最大公約数である．

このような c が定まることは補題 1 から分かる．c が a と b の最大公約数であることを示そう．まず

$$\mathbb{Z}c = \{..., -nc, ..., -2c, -c, 0, c, 2c, ..., nc, ...\}$$

に注意する．$a \in \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}c$ であり，$a \in \mathbb{Z}c$ であるから a は c の倍数である．同様にして $b \in \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}c$ から b は c の倍数である．従って a, b はともに c の倍数，すなわち c は a, b の公約数である．次に最大公約数であることを確かめよう．$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}c$ から $c = xa + yb$ となる $x, y \in \mathbb{Z}$ がみつかる．いま d を a と b の公約数とすると，この式から d は c の約数であることが分かる．したがって

$$c = df$$

となる $f \in \mathbb{N}$ が存在する．f は 1 以上であり，したがって d は c 以下となって c が公約数のなかで最大であることが分かる．

$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}$ のとき，a と b は互いに素であるという．

2.2 素因数分解

定理 5 いくつかの整数の積がある素数で割り切れるならば，それらの因数のうちの少なくとも一つはその素数で割り切れる．すなわち p を素数とし，$a_1 a_2 \cdots a_k$ $(a_j \in \mathbb{Z})$ が p で割り切れるとする．このとき $a_1,\ldots,a_k$ のうちの少なくとも一つが p で割り切れる．

２つの積のときに示せばよい (なぜか？)．ab が p で割り切れるとする．いま a が p で割り切れないとすると，a と p は互いに素である．定理 1 から

$$\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}p = \mathbb{Z}$$

である．即ち $1 = xa + yp$ を満たす $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する．この式に b を乗ずると

$$b = xab + byp$$

となるが ab は p で割り切れるから b は p で割り切れる．

<u>素因数分解</u>

定理 I.1 より 1 より大きな自然数 a は，いくつかの相異なる素数の組 $(p_1, ..., p_k)$ と自然数 $(n_i, ..., n_k)$ を用いて

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

と書くことができる．このとき ”この分解は素因数を掛ける順序を度外視すればただ一通りである”．このことを確かめよう．すなわち a が $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ および $a = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots q_\ell^{m_\ell}$ と２通りに表現されたとすると，一方の積の順番を適当に並べ替えるともう一方に一致することを確かめよう．いま q は素数で a を割り切るとする (つまり，q_1,...,q_ℓ いずれかを考えている)．定理 2 から q は $p_i^{n_i}$ のうちのどれかを割り切る．それを $p_j^{n_j}$ としよう．q は $p_j \cdots p_j$ (n_j 個の積) を割り切るから，ふたたび定理 2 から q は p_j を割り切る．ところが q と p_j は互いに素であるから $q = p_j$ である．以上のことから a を割り切る素数は p_1,...,p_k のどれかに等しい．次に n_j は p_j が a を何回割り切るか，という回数であるから a から一意的に定まる．

3　講義 III

3.1　Fermat の定理

最初に $a, b \in \mathbb{Z}$ とし p を素数とするとき $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示そう．２項定理を使って示そう．２項定理より

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$$

である．ここで２項係数

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}, \quad p! = p(p-1)(p-2)\cdots 2 \cdot 1$$

は自然数である．

$$p! = \binom{p}{k} k!(p-k)!$$

と書くと $p!$ は p で割り切れ，一方 $k(k-1)\cdots 1(p-k)(p-k-1)\cdots 1$ のどの因子も p で割り切れないので $\binom{p}{k}$ は p で割り切れる．従って $(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れる．

定理 6 (Fermat の定理) $a \in \mathbb{Z}$ とし，また p は素数とする．このとき $a^p - a$ は p で割り切れる．

(Euler による証明 1736) $a \in \mathbb{N}$ として示せばよい（なぜか？）$a = 1$ のときは $a^p - a = 0$ 故主張は正しい．$a = b$ のとき主張は正しいと仮定する．すなわち

$$b^p - b \text{ は } p \text{ で割り切れる} \tag{1}$$

他方，上で示したように ($a = 1$ ととる)

$$(b+1)^p - b^p - 1 \text{ は } p \text{ で割り切れる} \tag{2}$$

(6) と (8) を加えると

$$(b+1)^p - (b+1) \text{ は } p \text{ で割り切れる}$$

したがって数学的帰納法によってすべての自然数 a に対して正しい．

3.2　加群の考え方による Fermat の定理の証明

$m \in \mathbb{Z}$ を固定する．$x, y \in \mathbb{Z}$ が $x - y \in \mathbb{Z}m$ のとき x と y は m を法にして合同である，といい

$$x \equiv y \mod m$$

と書く．任意の整数は mod m で 0,1,...,$m-1$ のどれかに合同である．また

$$x \equiv y,\ \ z \equiv u \Longrightarrow x + z \equiv y + u,\ \ xz \equiv yu$$

である．たとえば 2 番目の合同式は，$y = x + am$, $u = z + bm$ と書けるから ($a, b \in \mathbb{Z}$)

$$yu = (x + am)(z + bm) = xz + m(xb + za + abm)$$

となって $yu \equiv xz$ が分かる．つぎに $a \in \mathbb{Z}$ とし $aa' \equiv 1 \bmod m$ とな a' が存在するとき a' は mod m で a の逆数である，という．

1) $aa' \equiv 1$ は $aa' - 1 = m'm$ なる m' の存在することである．即ち $aa' + (-m')m = 1$．このことから a と m は互いに素である．逆に a と m が互いに素ならば $aa' + mm' = 1$ となる $a', m' \in \mathbb{Z}$ が存在するので $aa' \equiv 1 \bmod m$ である．

2) m が素数 p とする．このとき $a \not\equiv 0 \bmod p$ なら a は p と互いに素であるから $\bmod p$ で逆数をもつ．

3) $aa' \equiv 1 \bmod m$ とする．いま $ax \equiv ay \bmod m$ とするとき $a'ax \equiv a'ay \bmod m$，すなわち $x \equiv y \bmod m$ である．

(Ivory による Fermat の定理の証明, 1806, Dirichlet, 1828)

$a \not\equiv 0 \bmod p$ とする．a, $2a$,...,$(p-1)a$ は $\bmod p$ で互いに異なる．なぜなら，このうちの２つ，xa と ya を考えると，もし $xa \equiv ya \bmod p$ とすると，上に述べたことから $aa' \equiv 1 \bmod p$ となる a' があるので $x \equiv y \bmod p$ となるが x, y は $1, 2, ..., p-1$ のうちのいずれかであるからこのことは起こりえない．以上のことから a, $2a$,...,$(p-1)a$ は順番は別にして $\bmod p$ で 1, 2,...,$p-1$ に合同である．これらを掛け合わせると

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \mod p$$

が従う．$(p-1)! \not\equiv 0 \bmod p$ であるから $\bmod p$ で逆数が存在する．従って

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

この式に a を乗ずると $a^p \equiv a \bmod p$，すなわち $a^p - a \equiv 0 \bmod p$ である．

3.3 Wilson の定理

定理 7 p を素数とする．このとき

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p$$

である．

(Waring による証明，1740)．まず $p = 2$ のときは正しい．$p > 2$ とする．1,2,...,$p-1$ は $\bmod p$ で $\not\equiv 0$ であるから逆数が存在する．すなわち $i \in \{1, 2, ..., p-1\}$ のとき，$ij \equiv 1$ となる $j \in \{1, 2, ..., p-1\}$ がある．自分自身が逆数である場合を考える．すなわち $x^2 \equiv 1$. 従って $(x-1)(x+1) \equiv 0$ である．故に $x-1 \equiv 0$ または $x-1 \equiv 0$ が成立する [なぜか？]. $x \equiv 1$ または $x \equiv -1$ すなわち $x = 1$ と $x = p-1$ のときの

み自分自身が逆数となっている．その他のものは (偶数個ある) 2 つづつの積が $\equiv 1$ となるような対を作る．したがって

$$1 \equiv 1,\ \ p-1 \equiv -1,\quad pq \equiv 1\ \ (\frac{p-3}{2}\text{組})$$

の右辺どうし，左辺どうしを掛け合わせると

$$\text{左辺} = (p-1)! \equiv -1 = \text{右辺}$$

が得られる．

4　講義 IV

4.1　複素数

まず，実数について復習する．a をかってな実数としよう．一方で一本の直線を用意し (数直線と呼ぶ)，その上に一点（原点と呼ぶ）O を決めておく．$a > 0$ なら O から右に a だけ進んだところに，また $a < 0$ なら O から左に $|a| = -a$ だけ進んだところに点 A がただ一つ定まる．逆に，数直線上の点 A に対して，O から A までの距離 a が決まる．ここで，A が O の左側にあるときには，$a = -(OA\,\text{の長さ})$ とする．このように，実数と数直線上の点は一対一に対応する．しばしば，実数と数直線上の点を同一視することがある．すなわち，数直線上の点を実数とみなすことがよくある．

数直線上の点が実数とみなせるなら，たとえば平面上の点も ” 数 ” とみなせないだろうか？　平面上の点を ” 数 ” と呼ぶのは自由であるが，” 数 ” と呼ぶためには ” 数 ” の資格をもっていなければならないであろう．実数の持っている基本的な性質を備えていなければ数とよぶにはふさわしくないであろう．そこで実数の持っている基本的性質をもう一度復習しよう．

- 実数の間では足し算（および引き算）と掛け算ができる (零でない数で割り算もできる)

- 足し算，掛け算は可換であり，足し算と掛け算の間では分配法則が成り立つ

などの基本的な性質が成り立っている．

では，平面上の点の間に，実数の和と積が満たす性質をすべて満たすように，和や積が定義できるであろうか？　答えは Yes である．他方で，空間上の点の間にはこのような和と積を定義することはできない．

どのように，平面上の点の間に，和と積を定義するか，を説明しよう．平面上の点に名前を付けるために，まず，水平な直線 (当面 x 軸と呼ぼう) とそれに垂直な直線 (当面 y 軸と呼ぼう) を描き，交点を O としよう．水平な直線上には，実数が乗っているとしよう．このようにすると，平面上のかってな点 z は (a, b) と表される．ここで，a は z の x 座標，b は z の y 座標である．x 軸上の点は $(a, 0)$ と表され，これは実数 a と同一視する．平面上の２点 $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ の間に，和 $z + w$ と積 zw を次のように定義しよう．

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$zw = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$z+w$, zw が平面上のどこの点なのかについては，後ほど説明することにする．このように和，積を定めると，和，積は可換で，すなわち $z+w = w+z$, $zw = wz$ で和，積の間に分配法則 $v(z + w) = vz + vw$ が成り立つことを確かめるのは簡単である．ここではもっと便利な名前の付け方について考える．

$$(0, 1)(b, 0) = (0, b)$$

であるから

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$$

と表される．$(a, 0)$, $(b, 0)$ は実数 a, b に他ならないから a, b で表すことにし，特別な点 (=数) $(0, 1)$ を i で表すことにすると，

$$z = (a, b) = a + ib$$

と表すことができる．

$$ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) \ \ (= -1)$$

である．$w = (c, d) = c + id$ であり，和，積は可換で分配法則が成り立つから

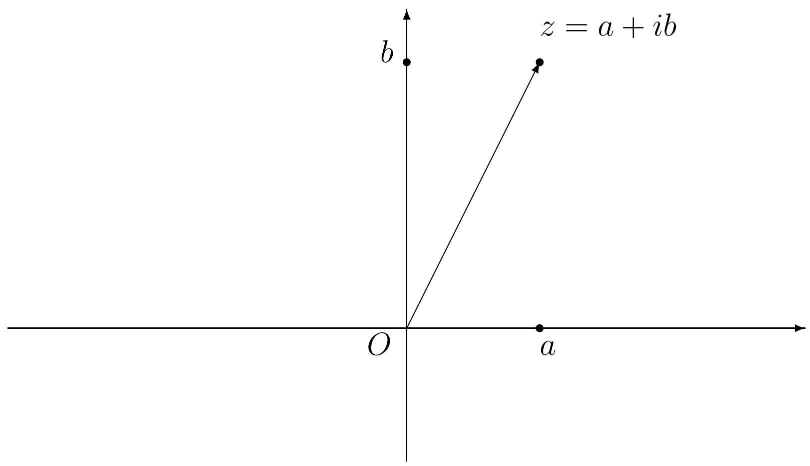
$$zw = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + iibd = ac - bd + i(ad + bc)$$

である．すなわち，実際の計算では，$ii = i^2$ が現れるたびにそれを -1 で置き換えればよい．$(0,0) = 0 + i0$ は単に 0 で表すことにする．$0z = 0$ である．$z = a + ib \neq 0$ とは $(a,b) \neq (0,0)$ のことであるから $a^2 + b^2 \neq 0$ と同値である．このとき $1/z$ を求めてみよう．$1/z = x + iy$ とおく．すなわち $z(x + iy) = 1$ をみたすように x, y を決める．$(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$ であることに注意して

$$(a - ib)z(x + iy) = (a^2 + b^2)(x + iy) = a - ib$$

から $x = a/(a^2 + b^2), y = -b/(a^2 + b^2)$ となる．従って

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$



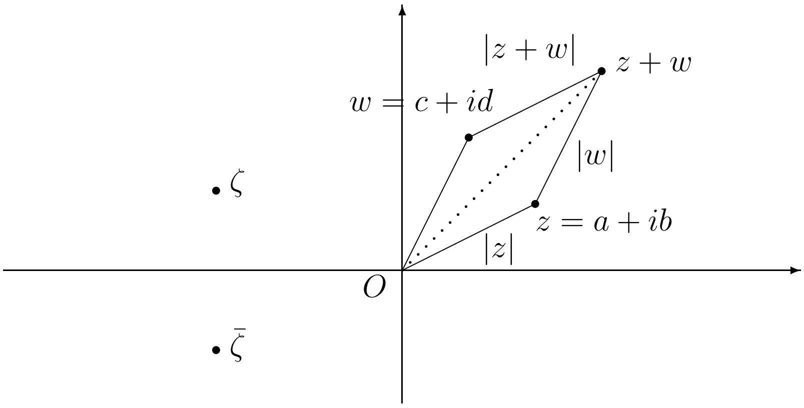
このように，和，積を定めた平面上の点を 複素数 と呼び，この平面を複素平面という．i を虚数単位という．$z = a + ib$ と表すとき，a を複素数 z の実部，b を虚部と呼び，いままで x 軸，y 軸と呼んできたものは，これからは，実軸，虚軸と呼ぶことにする．b を実数とするとき，ib の形の複素数は虚軸上に乗っている．

4.2　複素数の性質

$z = a + ib$ に対して $\bar{z} = a - ib$ を z の共役複素数という．複素平面上では，z と $\bar{z}$ は実軸に関して対称である．$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ を z の絶対値といい，$|z|$ と記す．これは O から z までの距離に他ならない．次のことは簡単に確かめられる．

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

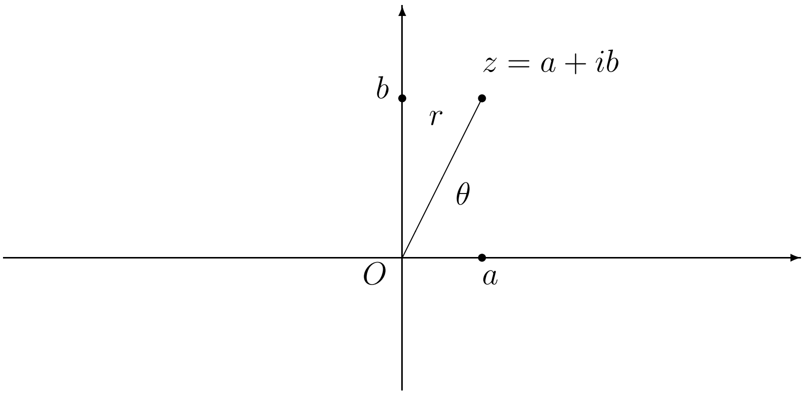
$z+w$ の表す点は，Oz と Ow を隣り合う２辺とする平行四辺形の頂点であるから，最後の不等式は３角不等式と呼ばれ，３角形の２辺の和は残りの１辺より長い，ということから分かる．



３角不等式を繰り返し適用すると

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

も容易に確かめられる．積について，少し詳しく調べるために，複素数 $z=a+ib$ の別の表現を導入する．

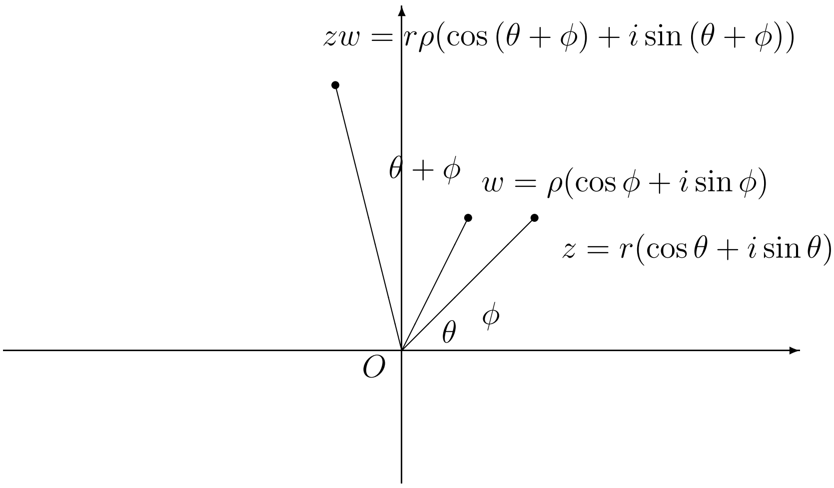


上図のとき，$a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$ であるから $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とも書ける．これを z の極形式表示といい，θ を z の偏角という．$r=|z|$ である．z の偏角は一意には決まらない．$\theta+2k\pi,\ k$：整数 も z の偏角である．ただし $0\le\theta<2\pi$ と決めておけば一意である．

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta), w=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ とするとき，三角関数の加法定理から

$$\begin{cases} \cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi=\cos(\theta+\phi) \\ \cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi=\sin(\theta+\phi) \end{cases}$$

であるから $zw = r\rho\bigl(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\bigr)$



従って

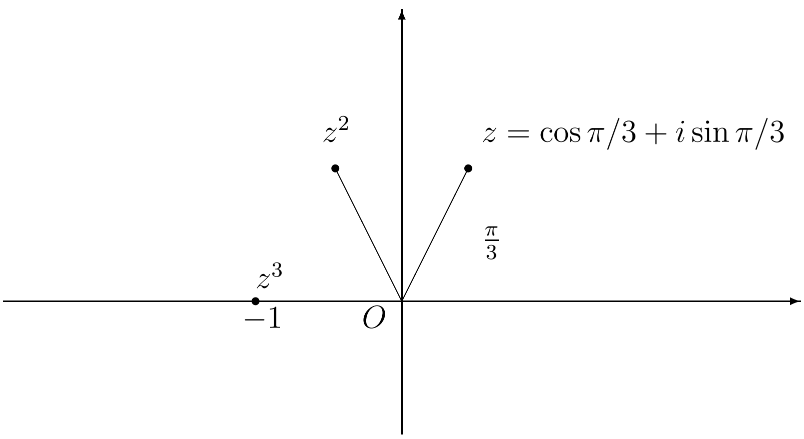
$$|zw| = |z||w|$$

は明らかである．とくに m を自然数として $\overbrace{z\cdots z}^{m} = z^m$ と書くとき

$$z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$

である．例えば $z = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$ とすると

$$z^3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$



である．

5 講義 V

5.1 n 次方程式，解を見つける

複素数 $a_0, a_1,...,a_n$ を係数とする z の多項式

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

を z の 複素係数多項式という．$a_0, a_1,...,a_n$ が実数のときは実係数多項式という．$a_0 \neq 0$ のとき n を $f(z)$ の次数という．z が複素数のとき $f(z)$ も複素数であることに注意しよう．

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

を n 次代数方程式という．

定理 8 (代数学の基本定理) 1 次以上の任意の代数方程式は少なくとも 1 つの解をもつ (複素数の中に).

定理を証明するには，$f(\alpha) = 0$ を満たす複素数 α を見つければよい．これは $|f(\alpha)| = 0$ を満たす α を見つけることと同等である．

もし $f(0) = a_n = 0$ ならば 0 が求める解であるから証明は終わる．以下 $f(0) \neq 0$ としよう．

最初に $|z| = |z + w - w| \leq |z + w| + |-w| = |z + w| + |w|$ から

$$|z + w| \geq |z| - |w|$$

であることを注意しておく．$f(z) = z^n\big(a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n}\big)$ と書くと

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z|^n\Big|a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\Big| \\ \geq |z|^n\Big(|a_0| - \Big|\frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\Big|\Big) &\geq |z|^n\Big\{|a_0| - \Big(\Big|\frac{a_1}{z}\Big| + \cdots + \Big|\frac{a_n}{z^n}\Big|\Big)\Big\} \\ &\geq |z|^n\Big\{|a_0| - \Big(\frac{|a_1|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_n|}{|z|^n}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

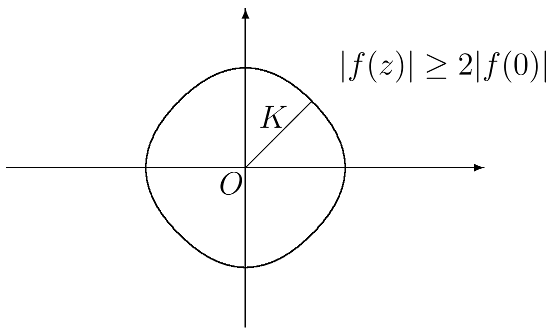
$M = \max(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|)$ とおくと，$|z| \geq K(> 1)$ のとき

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |z|^n\Big\{|a_0| - M\Big(\frac{1}{|z|} + \cdots + \frac{1}{|z|^n}\Big)\Big\} \\ &\geq K^n\Big\{|a_0| - M\big(\frac{1}{K} + \cdots + \frac{1}{K^n}\big)\Big\}. \end{aligned}$$

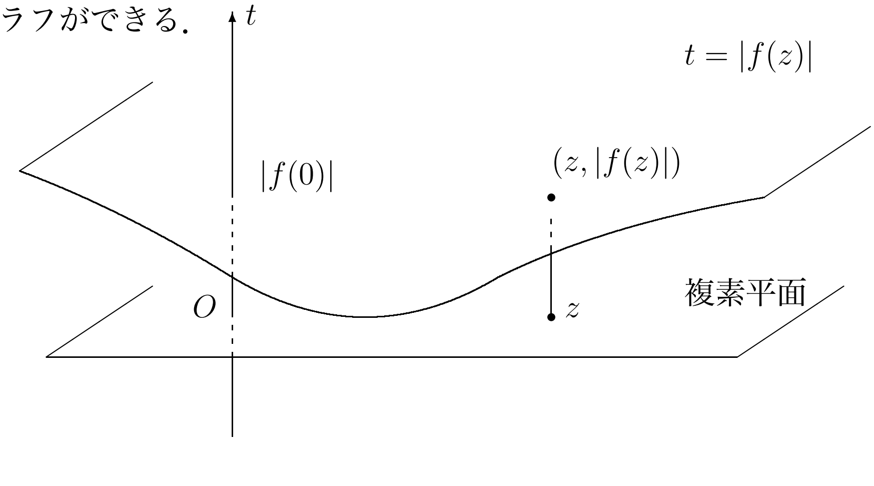
いま K を $M(1/K+\cdots+1/K^n)\leq|a_0|/2$ かつ $K\geq 4|a_n|/|a_0|$ が成立するように十分大きく選ぶと, $|z|\geq K$ のとき

$$|f(z)|\geq K^n\frac{|a_0|}{2}\geq K\frac{|a_0|}{2}\geq 2|a_n|=2|f(0)|$$

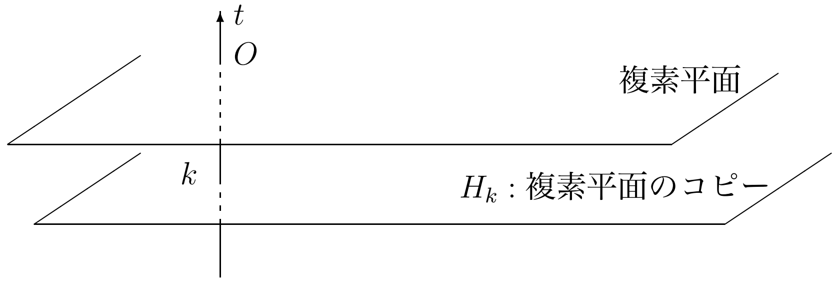
となる．従って $|z|\geq K$ の範囲では $|f(z)|\geq 2|f(0)|$ である．



複素平面の原点 O を通り、複素平面に垂直な直線を考え，これを t 軸と呼ぼう．複素平面上の点 z から t 軸に平行に t だけ進んだ位置の点を (z,t) で表すことにしよう．いま複素平面上の各点 z に対して $(z,|f(z)|)$ の位置に点をプロットしよう．このようにして，複素平面の上方に $t=|f(z)|$ のグラフができる．

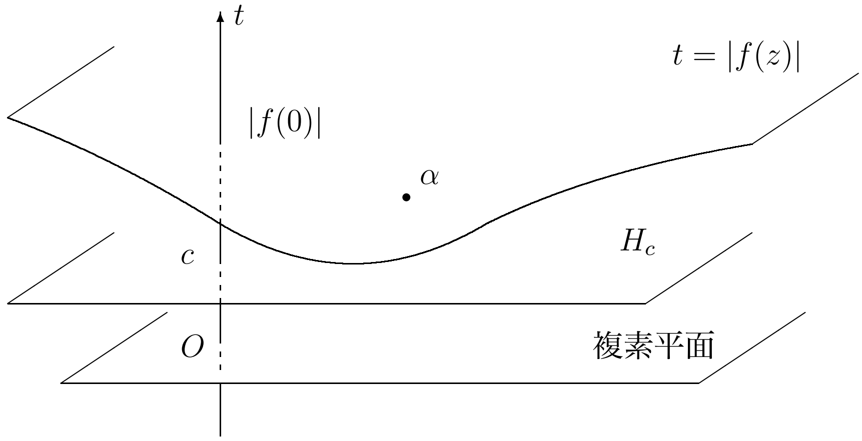


さて，t 軸と $t=k$ で交わる複素平面のコピーを H_k で表そう．H_0 は複素平面に他ならない．この複素平面のコピー H_k を $k<0$ から始めて t 軸の正の方向に動かしていく．$|f(z)| \geq 0$ であるから，平面 H_k は $k<0$ なら $|f(z)|$ のグラフと交点をもつことはない．



H_0 は複素平面であるから，H_0 がグラフと交点を持てば，交点の一つを α とするとき $|f(\alpha)|=0$ となりこの α が求める解となって証明が終わる．

そこで H_0 はグラフと交点を持たないと仮定して，さらに複素平面のコピー H_k を t 軸の正の方向に動かしていく．$|z| \geq K$ なら $|f(z)| \geq 2|f(0)|$ であるから，H_k を t 軸の正の方向に動かしていくと，$|z|<K$ なる点で(交点は一つとは限らない) H_k は初めて $|f(z)|$ のグラフと交点をもつ．このときの k を c としよう．$c>0$ である．即ち $k<c$ なら H_k はグラフと交点をもたず，H_c はグラフと交点を持つ．交点を z とすると $|z|<K$ である．



交点の一つを α とすると

$$(*) \qquad \text{すべての複素数}\, z \,\text{に対して}\, |f(z)| \geq |f(\alpha)| = c$$

が成り立っている．

さて $g(z) = f(z+\alpha)/f(\alpha)$ は z の多項式であり，$g(0) = 1$ であるから

$$g(z) = 1 + b_1 z + \cdots + b_n z^n, \quad b_n \neq 0$$

と表される．b_1, b_2,...,b_n のうち，0 でない最初のものを $b_m = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$). すなわち $b_1 = \cdots = b_{m-1} = 0$, $b_m \neq 0$. $L = \max(|b_{m+1}|, ..., |b_n|)$ とし，$\rho > 0$ を十分小さく

$$1 - r\rho^m > 0, \;\; 0 < r\rho^m - \frac{L\rho^{m+1}}{1-\rho} = \rho^m\Big(r - \frac{L\rho}{1-\rho}\Big) < 1$$

が成立するように選ぶ．複素数 $\gamma = \rho(\cos\dfrac{\pi-\theta}{m} + i\sin\dfrac{\pi-\theta}{m})$ を考える．このとき

$$\begin{aligned} b_m\gamma^m &= b_m\rho^m\big(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\big) \\ &= \rho^m r(\cos\theta + i\sin\theta)\big(\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\big) \\ &= r\rho^m(\cos\pi + i\sin\pi) = -r\rho^m \end{aligned}$$

となる．一方

$$
\begin{aligned}
|g(\gamma)| &\leq |1+b_m\gamma^m| + |b_{m+1}\gamma^{m+1}+\cdots+b_n\gamma^n| \\
&\leq |1-r\rho^m| + |b_{m+1}||\gamma|^{m+1}+\cdots+|b_n||\gamma|^n \\
&\leq |1-r\rho^m| + |b_{m+1}|\rho^{m+1}+\cdots+|b_n|\rho^n \\
&\leq 1-r\rho^m + L(\rho^{m+1}+\cdots+\rho^n) \leq 1-r\rho^m+\frac{L\rho^{m+1}}{1-\rho} < 1.
\end{aligned}
$$

従って，複素数 $\beta=\gamma+\alpha$ に対して

$$
|f(\beta)| = |f(\gamma+\alpha)| = |g(\gamma)||f(\alpha)| < |f(\alpha)|
$$

となって $(*)$ に矛盾する．従ってこの場合は起こりえず，結局 H_0, すなわち複素平面がグラフと交点をもつ．

6　講義 VI

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ のいずれかとする．$\mathbb{K}[x]$ で $\mathbb{K}$–係数多項式の全体をあらわすことにする．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \\
g(x) &= \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n
\end{aligned}
$$

とするとき，$f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ が

$$
f(x)+g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i,\ \ f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i,\ \ c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k
$$

で定義される．($f(x)$, $g(x)$ がともに n 次ということではない．$a_n=0$, $b_n=0$ のこともある)　次のことは容易に確かめられる．

$$
\begin{aligned}
\deg(f(x)+g(x)) &\leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}, \\
\deg(f(x)g(x)) &= \deg f(x) + \deg g(x).
\end{aligned}
$$

$\mathbb{K}$–係数多項式 $f(x)$, $g(x)$ に対して $f(x)=g(x)q(x)$ となる $\mathbb{K}$–係数多項式 $q(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる，$g(x)$ は $f(x)$ を

割り切る，という．また $g(x)$ を $f(x)$ の約数，$f(x)$ を $g(x)$ の倍数という．任意の多項式は，自分自身および 0 次多項式 $(=\mathbb{K})$ で割り切れる．$f(x)$ が自分自身の定数倍と 0 次多項式しか約数をもたないとき，$f(x)$ は既約である，という．たとえば $f(x)=x^2+1$ は $\mathbb{R}[x]$ で考えると既約であるが $\mathbb{C}[x]$ で考えると既約でない．実際，$x^2+1=(x+i)(x-i)$ と書ける．

定理 9 *$f(x)$ を $\mathbb{K}$–係数多項式，$g(x)$ を $\mathbb{K}$–係数多項式で 0 でないとする．このとき*

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

となる $\mathbb{K}$–係数多項式 $q(x), r(x)$ が丁度一組存在する (但し，$r(x)$ は 0 か又は $g(x)$ より低次の多項式である).

証明：まず一意性を示そう．今

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),\quad f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)$$

としよう．ここで $\deg r_1, \deg r_2<\deg g$ である．両式を辺々引くと

$$g(x)(q_1(x)-q_2(x))=r_2(x)-r_1(x).$$

今 $q_1(x)-q_2(x)\neq 0$ とすると左辺の deg は $\deg g$ より大かまたは等しい．これは矛盾である．従って $q_1(x)=q_2(x)$. 従って $r_1(x)=r_2(x)$.

次に $q(x), r(x)$ の存在を示そう．$f(x)=0$ なら $q(x)=0, r(x)=0$. $f(x)\neq 0$ とし $\deg f$ に関する数学的帰納法で示そう．$\deg f=0$ のとき $f(x)=c(\neq 0)$ である．$\deg g=0$ なら $g=d(\neq 0)$ であるから $f(x)=\frac{c}{d}g(x)$. $\deg g>0$ ならば $q=0$, $r=f$ とすればよい．さて，$\deg f=n>0$ とし，$n-1$ 次以下の多項式 $f(x)$ に対しては主張は正しいとする．

$$\begin{aligned} f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0\\ g(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m,\quad b_0\neq 0\end{aligned}$$

としよう．$\deg f<\deg g$ なら $q=0, r=f$ と選べばよい．$\deg f\geq \deg g$ のとき

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)$$

とおくと $f_1(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式であるから，帰納法の仮定より

$$f_1(x)=q_1(x)g(x)+r(x)$$

を満たす $q_1(x)$, $r(x)$ ($\deg r \leq m-1$) がある．従って

$$f(x) = f_1(x) + \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x) = \left[q_1(x) + \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}\right]g(x) + r(x)$$

となって $\deg f = n$ のときも主張は正しい．

系 **1** (剰余定理) $f(x)$ を $x - \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{K}$) で割った余りは $f(\alpha)$ に等しい．

$h(x)$ が $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ の各々を割り切るとき，$h(x)$ は $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ の公約数である，という．次数の最も高い公約数を最大公約数という．0 でない多項式 $k(x)$ が $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ の各々で割り切れるとき，$k(x)$ は $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ の公倍数である，という．次数の最も低い公倍数を最小公倍数という．

定理 **10** $d(x)$ が $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ の最大公約数ならば

$$d(x) = f_1(x)u_1(x) + f_2(x)u_2(x) + \cdots + f_m(x)u_m(x)$$

となるような多項式 $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$ が存在する．

証明：$A = \{f_1(x)u_1(x) + f_2(x)u_2(x) + \cdots + f_m(x)u_m(x) \mid u_i(x) \in \mathbb{K}[x]\}$ とおく．A の元のうち，次数最低のものを一つ選んでそれを $\phi(x)$ とする．

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x)$$

としよう．$f_i(x)$ を $\phi(x)$ で割って

$$f_i(x) = \phi(x)q_i(x) + r_i(x), \quad \deg r_i < \deg \phi \quad \text{または} \quad r_i(x) = 0$$

とする．

$$\begin{aligned} r_i(x) &= f_i(x) - \phi(x)q_i(x) \\ &= f_i(x)\{1 - u_i(x)q_i(x)\} - \sum_{j \neq i} f_j(x)u_j(x)q_i(x) \end{aligned}$$

であるから，$r_i(x) \in A$. $\deg r_i < \deg \phi$ であるから $r_i = 0$ である．すなわち，$\phi(x)$ は $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ の公約数である．従って $\deg \phi \leq \deg d$. 一方，$\phi(x)$ の形から $\phi(x)$ は $d(x)$ で割り切れるから $\phi(x) = c(x)d(x)$. 次数の関係から零でない定数 c があって $\phi(x) = cd(x)$.

$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ の最大公約数が定数のとき，$f_1(x), \ldots, f_m(x)$ は互いに素であるという．

系 2 $f_1(x)$,$f_2(x)$,...,$f_m(x)$ が互いに素であるためには

$$f_1(x)u_1(x) + f_2(x)u_2(x) + \cdots + f_m(x)u_m(x) = 1$$

となるような $u_1(x)$, $u_2(x)$,...,$u_m(x)$ が存在することが必要十分である．

定理 11 (素因数分解の一意性) 0 でない任意の $\mathbb{K}$ 多項式は何個かの既約多項式の積に分解される．この分解は定数倍と積の順序を除けば一意である．すなわち

$$f(x) = ap_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x), \quad a \in \mathbb{K}, \ \ p_j(x) \ \ \mathbb{K}--\text{係数多項式}$$

と書ける．ここで $p_j(x)$ の最高次の係数は 1 である．

分解の可能性は数学的帰納法による．

系 3 任意の n 次多項式は n 個の一次式の積に分解される：

$$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

証明：$f(x) = 0$ の一つの根を α_1 とすると $f(\alpha_1) = 0$. 剰余定理より $f(x)$ は $x - \alpha_1$ で割り切れる．すなわち

$$f(x) = (x-\alpha_1)f_1(x)$$

ここで $f_1(x)$ は $n-1$ 次多項式である．この操作を続ければよい．

$\alpha = \alpha_j$ とするとき，この分解で $(x-\alpha)$ の現れる個数を根 α の重複度という．

系 4 n 次代数方程式は，重複度もこめて丁度 n 個の根を持つ．

系 5 2 つの n 次以下の多項式 $f(x)$, $g(x)$ が，$n+1$ 個の相異なる点 α_1, α_2,...,α_{n+1} で同じ値をとるならば $f(x) = g(x)$ である．

証明：$h(x) = f(x) - g(x)$ は n 次以下の多項式である．$h(x) = 0$ は α_1, α_2,...,α_{n+1} を根にもつから n 次以下の多項式ではありえない．従って $h(x) = 0$ である．

7 講義 VII

7.1 幾何的ベクトルの復習

平面内，あるいは空間内の有向線分 PQ をベクトルとよび $\vec{PQ}$ と表す．これらを単一の文字 $\vec{u}$,$\vec{v}$ 等で表す．$\vec{PP}$ は $\vec{o}$ で表す．平行移動によって重なるものは同じものと見なす．数 a をベクトル $\vec{u}$ に掛けることができる (スカラー倍). ベクトルの和はベクトル，数とベクトルの積はベクトルである．次の性質がある．

(A.1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(A.2) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

(A.3) $\vec{u}+\vec{o}=\vec{u}$

(A.4) $\forall\vec{u}$ に対して $\vec{u}+\vec{v}=\vec{o}$ なる $\vec{v}$ が存在する．

(A.5) $1\vec{u}=\vec{u}$

(A.6) $(ab)\vec{u}=a(b\vec{u})$

(A.7) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

(A.8) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

a_1,...,a_n を数とする．このとき $a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+\cdots+a_n\vec{u}_n$ を $\vec{u}_1$,...,$\vec{u}_n$ の線形結合という．$x_1\vec{u}_1+\cdots+x_n\vec{u}_n=\vec{0}$ から $x_1=0$,...,$x_n=0$ が従うとき $\vec{u}_1$,...,$\vec{u}_n$ は線形独立であるという．すなわち，自明な線形結合 $0\vec{u}_1+0\vec{u}_2+\cdots+0\vec{u}_n$ のみが $\vec{o}$ となり，それ以外の線形結合は $\vec{o}$ とならないときに線形独立という．そうでないとき線形従属という．２個のベクトルは平行でなければ線形独立．３個のベクトルは同一点を始点にして描いたとき，同一平面内になければ線形独立．２個の線形独立な平面ベクトルば存在するが３個以上の平面ベクトルは常に線形従属．３個の線形独立な空間ベクトルは存在するが，４個以上の空間ベクトルは常に線形従属．

距離，角，内積 (スカラー積)

$$(\vec{u},\vec{v})=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha,\quad |\vec{u}|:\vec{u}\text{の長さ，}\quad \alpha:\vec{u}\text{ と }\vec{v}\text{ のなす角}$$

内積には次の性質がある．

- $(\vec{u},\vec{u}) \geq 0,\ \ (\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u}),\ \ (\vec{u},\vec{u}) = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{o}$
- $(a\vec{u}+b\vec{v},\vec{w}) = a(\vec{u},\vec{w}) + b(\vec{v},\vec{w})$
- $(\vec{u},a\vec{v}+b\vec{w}) = a(\vec{u},\vec{v}) + b(\vec{u},\vec{w})$

$(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2 = 1$ のとき，$\vec{u}$ を単位ベクトルという，$(\vec{u},\vec{v}) = 0$ のとき $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は直交するという．ベクトルからベクトルへの関数 $\vec{u} \mapsto f(\vec{u})$ が線形であるとは

$$f(a\vec{u}+b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$$

がすべての数 a, b とすべてのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対して成立すること．例：$\vec{v}$ は固定して $\vec{u} \mapsto (\vec{u},\vec{v})$. $\vec{u}$ は固定して $\vec{v} \mapsto (\vec{u},\vec{v})$.

互いに直交する単位ベクトルの集まりを正規直交系という．$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ を空間ベクトルの正規直交系とすると，任意の空間ベクトル $\vec{u}$ に対して

$$\vec{u} = (\vec{u},\vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{u},\vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{u},\vec{e}_3)\vec{e}_3$$

である．

7.2 連立一次方程式

n 個の未知数 x_1,...,x_n に対する p 個の一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{12}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = y_p \end{cases} \tag{3}$$

ここで a_{jk} は j 番目の方程式の x_k の係数．$p < n$ のとき 劣決定系,$p > n$ のとき優決定系, $p = n$ のとき正方系という．$y_1 = 0$,...,$y_p = 0$ のとき方程式系は斉次である，という．

(1) を考えるときの原理: (1) の 1 つの方程式にある数を掛けて他の方程式に加えることによって (1) を別の系に変えても (それを (1)' とする) (1) と (1)' は全く同じ解 (の全体) をもつ．方程式 (系) は解を表現しているものと考えると，重要なのは表現されている内容 (解の全体) で表現の仕方 (方程式) ではない．

例えば，(1) の第一式に b を掛けて第二式に加えると

$$(1)'\text{の第二式}: (a_{21}+b_{11})x_1+\cdots+(a_{2n}+ba_{1n})x_n = y_2+by_1$$

今 $x=(x_1,...,x_n)$ が (1)' の解なら，2 式 − (1 式) $\times\, b$ から (1) の 2 式が得られる．

さて $a_{11}\neq 0$ とする．(1 式) $-\,(a_{k1}/a_{11})\times(k$ 式) を考えると，(1) と同じ解 (の全体) をもち，x_1 が 1 式にしか現れない線形方程式系を得る．このとき右辺 y_1,...,y_p は y_1, $y_2-(a_{21}/a_{11})y_1$,...,$y_p-(a_{p1}/a_{11})y_1$ で置き換えられる．$a_{21}\neq 0$ $(a_{11}=0)$ なら第二方程式以外から x_1 を消去できる．

− − 未知数の番号のつけかえ，方程式の順番の入れ替え − −−

で，(1) の方程式系は

$$\begin{cases} c_{11}z_1 \quad +\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad +c_{1n}z_n = h_1(y) \\ \qquad c_{22}z_2 \quad +\cdots \qquad\qquad\quad +c_{2n}z_n = h_2(y) \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}z_r \quad +\cdots \quad +c_{rn}z_n = h_r(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = h_{r+1}(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = h_p(y) \end{cases} \tag{4}$$

に変換される．ここで $h_1(y)$,...,$h_p(y)$ は y_1,...,y_p の線形結合．z_1, z_2,...,z_n は未知数 x_1,...,x_n を適当な順番に並び変えたもの．従ってもちろん全体としては $\{z_1,...,z_n\}=\{x_1,...,x_n\}$．$c_{11}$,...,$c_{rr}$ は零でない数．(1) と (2) は同じ解 (全体で) を持つ．(2) を解析する．

$$\text{解を少なくとも一つ持つ} \iff h_r(y)=0,...,h_p(y)=0$$

このとき，z_{r+1},...,z_n は任意に与えることができ，その後，z_r,...,z_1 を順に決めていく．

定理 **12** (劣決定系) 斉次線形方程式系が劣決定系のとき，この系には少なくとも 1 つの自明でない解，すなわち，未知数のうち少なくとも 1 つは零でないような解，が存在する．

証明：斉次方程式系だから，すべての j に対して $h_j(y)=0$ である．さて $p<n$ であるから $r\leq p<n$. 従って z_{r+1},...,z_n を自由に選べるので零でないように選んでおけばよい．

(2) にあらわれる r を方程式系 (1) の階数という．(2) の形への変形は一通りではないので，どのように変形して (2) の形にもってきても同じ r が現れることを示さなければならない．さて (1) が別の変形で　(3) に到達したとしよう．

$$\begin{cases} c'_{11}z_1 \quad + \cdots & & & +c'_{1n}z_n = h'_1(y) \\ \qquad c'_{22}z_2 \quad + \cdots & & & +c'_{2n}z_n = h'_2(y) \\ & \ddots & & \\ & & c'_{ss}z_s \quad + \cdots & +c'_{sn}z_n = h'_s(y) \\ & & & 0 = h'_{s+1}(y) \\ & & & \vdots \\ & & & 0 = h'_p(y) \end{cases} \tag{5}$$

いまたとえば $s < r$ としよう．右辺が 0 斉次方程式を考えよう．(1) の解でかつ $z_{r+1} = 0,...,z_n = 0$ であるものを考える．これは (2) に方程式 $z_{r+1} = 0,...,z_n = 0$ を加えたものを考えることであり，解は $z = 0$ のみである．一方 (3) に $z_{r+1} = 0,...,z_n = 0$ を加えたものを考えるとこれは方程式の数が $s + n - r < n$ で劣決定系となって非自明な解をもち矛盾する．

定理 13 (正方系) 正方系に対して次ぎは同値である．

(i) 階数は未知数の数と等しい．

(ii) 方程式系は任意の右辺に対して解を持つ．

(iii) 斉次方程式は自明な解しか持たない．

7.3　斉次線形方程式系の解

斉次線形方程式系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{12}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases} \tag{6}$$

の解を $x = (x_1, ..., x_n)$ と書こう．解の全体を K と書くことにする．このとき，$y = (y_1, ..., y_n)$ も解ならば $x + y$ を $(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ で定め

ると $x+y$ も解である．すなわち $x+y \in K$. また a を実数とするとき ax を $(ax_1, ..., ax_n)$ で定めると ax も解，すなわち $ax \in K$ である．また，このように和 $x+y$，実数 a との積 ax を定めるとこれは (A.1)∼ (A.8) を満たす.

8　講義 VIII

8.1　線形代数

線形代数：幾何ベクトル，線形方程式系などの計算で通常おこなわれる計算に対する数学モデルであって線形空間とそれらの間の線形写像の理論.

8.2　線形空間

u, v,... を要素とする集合 V でそこでは，和 $u+v$ と数との積 au が定義されていて (A.1)∼ (A.8) が成立する．V の要素はベクトル，数はスカラーという．スカラーが $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ に応じて，実線形空間，複素線形空間，という.

例 1 平面，空間の幾何ベクトルの全体，(実ベクトル空間)

例 2. 斉次線形方程系の解の全体

例 3. ある集合 $E \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $u(t)$ $(t \in E)$ の全体. $(u+v)(t) = u(t) + v(t)$, $(au)(t) = au(t)$ で和とスカラー倍を定義する.

v_1,...,v_p をベクトル，a_1,...,a_p をスカラーとするとき $a_1v_1 + \cdots + a_pv_p$ を v_1,...,v_p の a_1,...,a_p を係数とする線形結合という．どの v_i も残りのベクトルの線形結合で表すことができないとき線形独立, ある v_i が残りのベクトルの線形結合で表されるとき，v_1,...,v_p は線形従属である，という.
これは次のようにいってもよい：

$v_1, ..., v_p$　　は線形独立

$\Longleftrightarrow a_1v_1 + \cdots + a_pv_p = 0$ となる自明でない線形結合がある.

$v_1, ..., v_p$　　は線形従属

$\Longleftrightarrow a_1v_1 + \cdots + a_pv_p = 0$ となるのは自明な線形結合に限る

補題 2 $v_1,\ldots,v_p$ の $q\ (>p)$ 個の線形結合は常に線形従属である．

証明：$q\ (>p)$ 個の線形結合

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{1p}v_p \\ u_2 = a_{21}v_1 + \cdots + a_{2p}v_p \\ \vdots \\ q_q = a_{q1}v_1 + \cdots + a_{qp}v_p \end{cases}$$

を考えよう．$x_1u_1+\cdots+x_qu_q = 0$ なる自明でない線形結合をみつけよう．

$$\begin{aligned} & x_1u_1 + \cdots + x_qu_q \\ = & x_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{1p}v_p) + \cdots + x_q(a_{q1}v_1 + \cdots + a_{qp}v_p) \\ = & (a_{11}x_1 + \cdots + a_{q1}x_q)v_1 + \cdots + (a_{1p}x_1 + \cdots + a_{qp}x_q)v_p \end{aligned}$$

ここでつぎの斉次線形方程式を考える：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{q1}x_q = 0 \\ \vdots \\ a_{1p}x_1 + \cdots + a_{qp}x_q = 0 \end{cases}$$

これは劣決定系なので自明でない解 $x_1,\ldots,x_q$ が存在する．

V を線形空間とし，$U \subset V$ を部分集合とする．$\forall u, v \in U$, $\forall a, b$ スカラー，に対して $au+bv \in U$ が成立するとき，U を線形部分空間という．V 自身も線形部分空間である．線形部分空間 U が有限生成であるとは，U が，ある有限個の決まったベクトルの線形結合全体からなっていることである．U が，線形独立な v_1, $v_2,\ldots,v_n$ から生成されているとき $v_1,\ldots,v_n$ を U の基という．U の基の個数を U の次元という．有限生成のとき，有限次元, そうでないとき無限次元という．たとえば，ある区間で定義された関数の全体からなる線形空間は，無限次元である．
無限次元線形空間の例：

- $\{f(x); [a,b]$ から $\mathbb{R}$ への関数の全体$\}$

$$f_j(x) = \begin{cases} 1, & 1/j < x \le 1/(j+1), \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

  は線形独立．

- $\{v(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$; 多項式の全体 $\}$ 1, x,...,x^n,... は線形独立.

補題 3 U が有限生成ならば，有限個からなる基が存在する.

証明：U が v_1,...,v_p で生成されているとする．v_1,...,v_p は線形独立か否か？　線形独立なら v_1,...,v_p は基．そうでなければある v_i は残りの線形結合なので v_i を除いてその残りが線形独立かどうか調べる．この操作を繰り返して v_{i_1},...,v_{i_n} がえられる．これらはどの一つも残りの線形結合ではない．さて

$$\{v_1, ..., v_p\} = \{v_{i_1}, ..., v_{i_n}, v_{j1}, ..., v_{j_m}\}$$

と書くとき，v_{jk} は $v_{i_1}, ..., v_{in}$ の線形結合である．このことを確かめるには，例えば v_p が v_1,...,v_{p-1} の線形結合で，v_{p-1} が v_1,...,v_{p-2} の線形結合ならば，v_p は v_1,...,v_{p-2} の線形結合であることに注意すればよい.

補題 4 基の数は一意的に決まる.

U を線形空間とし，v_1,...,v_r　および u_1,...,u_s がともに U の基であるとする．いま $s < r$ とすると $v_j \in U$ であるから

$$v_j = a_{j1} u_1 + \cdots + a_{js} u_s, \quad j = 1, ..., r$$

補題によると u_1,...,u_s の $r (> s)$ 個の線形結合は線形従属であるから，矛盾する．すなわち $s \geq r$. 同様にして $r \geq s$.

線形関数：U, V は線形空間とする．写像 $F : U \to V$ が線形であるとは

$$F(au + bv) = aF(u) + bF(v), \forall a, b \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ \forall u, v \in U$$

の成立することをいう．とくに $V = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ のとき F を線形形式という. U の次元を n とし，e_1,...,e_n を一組の基とすると $F(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 F(e_1) + \cdots + x_n F(e_n)$ であるから，線形関数は一組の基の上で値が決まれば完全に決まる．f_1,...,f_p を V の一組の基とすると，

$$F(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} f_k, \quad (j = 1, ..., n)$$

U から V への線形関数の全体と $p \times n$ 行列 (a_{kj}) の全体が一対一に対応している.

次に

$$\mathrm{Im} F = \{F(u) \in V \mid u \in U\},\ \ \mathrm{Ker} F = \{u \in U \mid F(u) = 0\}$$

をそれぞれ F の像, F の核という．V と U の線形部分空間である.

8.3　像と核の次元に関する定理

定理 14 U, V を線形空間とし，$F : U \to v$ を線形関数，また $\dim U < +\infty$ とする．このとき

$$\dim \mathrm{Ker} F + \dim \mathrm{Im} F = \dim U$$

が成立する．

証明：$e_1,...,e_p$ を $\mathrm{Ker}F$ の基とし，$\mathrm{Ker}F$ に属さない $e_{p+1},...,e_n$ を加えて $e_1,...,e_p,e_{p+1},...,e_n$ を U の基とする．このとき

$$F(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_{p+1}F(e_{p+1}) + \cdots + x_nF(e_n)$$

である．すなわち，$\mathrm{Im}F$ はベクトル $F(e_{p+1}),...,F(e_n)$ で生成されている．さらにこれらのベクトルは線形独立である．なぜなら $c_{p+1}F(e_{p+1})+\cdots+c_nF(e_n) = F(c_{p+1}e_{p+1}+\cdots c_ne_n) = 0$ とすると $c_{p+1}e_{p+1}e_{p+1}+\cdots+c_ne_n \in \mathrm{Ker}F$. 従って $c_{p+1} = 0,...,c_n = 0$.

この結果を線形方程式系に応用してみよう．まず $e_1,...,e_n$ を U の，$f_1,...,f_p$ を V の基とし，線形関数 F を

$$F(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj}f_k$$

で定めると，線形方程式系

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = y_k, \quad k = 1, ..., p$$

は $F(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = y_1f_1 + \cdots + y_pf_p$ と同値である．実際

$$F(\sum_{j=1}^{n} x_je_j) = \sum_{j=1}^{n} x_jF(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj}f_k = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j)f_k$$

さて $y_1 = \cdots = y_p = 0$ で $p < n$ とすると斉次劣決定系である．$\dim \mathrm{Im}F \le \dim V = p$ であるから $\dim \mathrm{Ker}F = n - \dim \mathrm{Im}F \ge n - p \ge 1$ となる．したがって $0 \ne x_1e_1+\cdots+x_ne_n \in \mathrm{Ker}F$ を選んでくると $F(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) = 0$ すなわち $x_1,...,x_n$ は非自明な解である．

$p = n$ のときは正方系である．このとき $\mathrm{dimKer}F = 0$ から $\mathrm{dim}V = \mathrm{dimIm}F$ であり $\mathrm{Im}F = V$ となる．したがって任意の $y_1,...,y_p$ に対して

$$F(x_1e_1 + \cdots x_ne_n) = y_1f_1 + \cdots + y_pf_p$$

となる $x_1e_1 + \cdots x_ne_n$ が存在する．$\xi_1e_1 + \cdots + \xi_ne_n$ も $F(\xi_1e_1 + \cdots + \xi_ne_n) = 0$ を満たすとすると，

$$F((x_1 - \xi_1)e_1 + \cdots + (x_n - \xi_n)e_n) = 0$$

であるが，$\mathrm{Ker}F = 0$ であるから，$(x_1 - \xi_1)e_1 + \cdots + (x_n - \xi_n)e_n = 0$ すなわち $x_1 = \xi_1,...,x_n = \xi_n$, すなわち解はただ一組しか存在しない．

9　講義 IX

9.1　距離とバナッハ空間

U を有限次元線形空間とし，$u \in U$ とするとき u の長さはどのようにして測ればようであろうか．一つの方法は U の基 $e_1,...,e_n$ を一つ定め，$u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ と表現して $|u| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ と定めることである．この方法には，長さが基の取り方によって変わってしまう，という欠点がある．最も広く採用されている方法，考え方は，U に ”物指し=長さを測る関数” が前もって与えられている，と考える立場である．この長さ関数のことをノルムという．この関数を $u \mapsto |u|$ (u に対して u の長さ $|u|$ を与える) で表すと，この長さ関数には次の性質がある：

- $|u| = 0 \Longrightarrow u = 0$
- $|au| = |a||u|$
- $|u + v| \leq |u| + |v|$　(３角不等式)

以下，ベクトルを点と呼ぶことも多い．U の点の無限列 $u_1, u_2,...$ を考える．u_n が $n \to \infty$ で v に収束する，とは $|u_n - v| \to 0$ $(n \to \infty)$ となることである．今 u_j が v に収束するとき

$$|u_k - u_j| \leq |u_k - v| + |u_j - v|$$

から，$k \leq j$ として，$k \to \infty$ のとき，$j \to \infty$ でもあり，従って右辺 $\to 0$ である．この性質，すなわち

$$k \leq j \text{ で} \quad k \to \infty \text{ のとき} \quad |u_k - u_j| \to 0$$

を満たす点列を **Cauchy** 列という．次の事実は，解析学において基本的である：

事実: 有限次元線形空間では，Cauchy 列は必ずある点に収束する．

無限次元線形空間ではこのことは一般には正しくない．例えば U を多項式の全体からなる線形空間とする．さらにノルムとして

$$|f| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

が与えられているとする．いま $f(x)$ を $[a,b]$ 上のかってな連続関数としよう．このとき Weierstrass の多項式近似定理によると $f_n \in U$ があって $|f_n - f| \to 0$ が成立する．f として多項式でないものをとってくると $\{f_n\}$ は Cauchy 列であるが，極限は多項式ではない．多項式の全体と連続関数の全体はちょうど，有理数の全体と実数の全体との関係に似ている．

Cauchy 列が必ず極限点をもつような，無限次元線形空間を **Banach** 空間，または完備ノルム空間という．

$$U = \{f(x) \mid f(x) \text{ は } [a,b] \text{ 上の連続関数}\}, \quad |f| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

は Banach 空間である．

9.2 Banach 空間における縮小写像の定理

定理 15 U を Banach 空間とし，$u \to T(u)$ を U から U への縮小写像とする．すなわちある $0 < c < 1$ があって $|T(u) - T(v)| \leq c|u - v|$ がすべての $u, v \in U$ に対して成立するとする．このとき

$$u = T(u)$$

を満たす $u \in U$ がただ一つ存在する．

証明：まず解がただ一つであることを確かめよう．u', u'' を解とする．すなわち $u' = T(u'), u'' = T(u'')$ である．このとき $u' - u'' = T(u') - T(u'')$ から

$$|u' - u''| = |T(u') - T(u'')| \leq c|u' - u''| \Longrightarrow |u' - u''| = 0.$$

つぎに解が存在することを示す．$u_0 \in U$ を勝手に選ぶ．u_1 を $u_1 = T(u_0)$ で定義する．以下同様にして

$$u_2 = T(u_1), \ \ u_3 = T(u_2), \ \ u_4 = T(u_3), \cdots$$

と定義していく．このとき

$$\begin{aligned} |u_2 - u_1| = |T(u_1) - T(u_0)| &\le c|u_1 - u_0|, \\ |u_3 - u_2| = |T(u_2) - T(u_1)| \le c|u_2 - u_1| &\le c^2|u_1 - u_0|, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

いま $i \le k$ に対して $|u_i - u_{i-1}| \le c^{i-1}|u_1 - u_0|$ が成立すると仮定すると

$$|u_{k+1} - u_k| = |T(u_k) - T(u_{k-1})| \le c|u_k - u_{k-1}| \le c^k|u_1 - u_0|$$

が成立する．さて $k \le j$ として

$$\begin{aligned} |u_{j+1} - u_k| &\le |u_{j+1} - u_j| + |u_j - u_{j-1}| + \cdots + |u_{k+1} - u_k| \\ &\le c^j|u_1 - u_0| + c^{j-1}|u_1 - u_0| + \cdots + c^k|u_1 - u_0| \\ = \left(c^k + \cdots + c^j\right)|u_1 - u_0| &= \frac{c^k - c^{j+1}}{1-c}|u_1 - u_0| \le \frac{c^k}{1-c}|u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

従って $k \to \infty$ のとき $|u_{j+1} - u_k| \to 0$ となって $\{u_j\}$ は Cauchy 列である．U は Banach 空間であるから，この列は極限点 u をもつ．$u_j \to u$ より $T(u_j) \to T(u)$ であるから $u_{j+1} = T(u_j)$ で $j \to \infty$ として $u = T(u)$ を得る．

この定理を次の微分方程式を解くのに応用してみよう．

$$f'(x) = G(x, f(x)), \ \ f(0) = 0$$

この方程式を積分すると，方程式は

$$f(x) = \int_0^x G(t, f(t))dt \tag{7}$$

と同値になる．さて $U = \{f(x) \mid f(x)$ は $[0, T]$ 上で連続 $\}$ をノルム $|f| = \max_{0 \le x \le T} |f(x)|$ をもつ Banach 空間とする．写像

$$T : f(x) \mapsto T(f) = \int_0^x G(t, f(t))dt$$

が U 上の縮小写像とすると，上の定理から $f = T(f)$, すなわち (1) の解が存在する．

10 講義 X

10.1 ヒルベルト空間とリースの表現定理

一般に U, V を Banach 空間とし $F : U \to V$ を線形関数とするとき

$$|F(u)| \le C|u|, \ \ \forall u \in U$$

が成立するならば F は有界であるという．とくに $V = \mathbb{R}$ のとき F を線形汎関数という．U 上の (有界) 線形汎関数の全体を U' と書き，U の双対空間という．$U' \neq \emptyset$ か，という疑問については

定理 16 (Hahn-Banach) $V \subset U$ を閉部分空間とする．$u_0 \in U$ を任意の点とする．このとき $f \in U'$ で V 上では 0 かつ $f(u_0) \neq 0$ を満たすものが存在する．

一般に，線形空間 U 上の $u, v \in U$ に対して実数値 (u, v) で

- $(u, u) \ge 0, \quad (u, v) = (v, u)$
- $(u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0$
- $(au + bv, w) = a(u, w) + b(u, w)$

なる性質を満たすものを内積という．任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して

$$(tu + sv, tu + sv) = t^2(u, u) + 2ts(u, v) + s^2(v, v) \ge 0$$

であるから

$$(u, v)^2 \le (u, u)(v, v) \quad \text{(Schwarz の不等式)}$$

このことから $|u| = (u, u)^{1/2}$ とおくと $|(u, v)| \le |u||v|$. 従って

$$|u + v|^2 = |u|^2 + 2(u, v) + |v|^2 \le |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2$$
$$\Longrightarrow |u + v| \le |u| + |v| \quad (\text{３角不等式})$$

$|u| = (u, u)^{1/2}$ はノルムである．内積からこのように定義されるノルムで完備な線形空間を **Hilbert** 空間という (1905). 最初に考察された例は $E = \{u = (x_1, x_2, ...) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots < +\infty\}$ で内積は $v = (y_1, y_2, ...)$ に

対して $(u,v)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots$ 従ってノルムは $|u|^2=x_1^2+x_2^2+\cdots$ である．

U を内積 $(\cdot,\cdot)$ をもつ Hilbert 空間とし，$V\subset U$ を線形部分空間とする．このとき
$$V^{\perp}=\{w\mid (w,v)=0,\ \ \forall v\in V\}$$
を V の直交補空間という．

定理 17 (直交射影の定理) U を Hilbert 空間，V を閉部分空間とする．このとき，任意の $u\in U$ は

$$u=v+w,\quad v\in V,\ \ w\in V^{\perp}$$

と一意的に表される．ここで $|u|^2=|v|^2+|w|^2$ である．v を u の V 上への直交射影という．

証明：まず $|u-v|^2+|u+v|^2=2(|u|^2+|v|^2)$ である．$\inf_{v\in V}|u-v|=d$ とおく．inf の定義から v_1,v_2,...$\in V$ があって

$$|u-v_p|\to d\quad (p\to\infty)$$

である．

$$\begin{aligned}|(u-v_p)-(u-v_q)|^2+|(u-v_p)+(u-v_q)|^2&\\ =2\big(|u-v_p|^2+|u-v_q|^2\big)&\end{aligned}$$

から
$$|v_p-v_q|^2=2|u-v_p|^2+2|u-v_q|^2-4\Big|u-\frac{v_p+v_q}{2}\Big|^2$$
$q\geq p\to\infty$ とすると，右辺 $\to 0$. 従って $\{v_p\}$ は Cauchy 列である．V は Hilbert 空間であるから，ゆえにある $v\in V$ があって $v_p\to v$ である．また $|u-v|=d$. $u=(u-v)+v$ と書くと，$u-v\in V^{\perp}$ である．なぜなら

$$d^2=|u-v|^2\leq|u-v-tw|^2=|u-v|^2-2t(u-v,w)+t^2|w|^2$$

が任意の $w\in V$ に対して成り立つ．従って $-2t(u-v,w)+|w|^2\geq 0$ が任意の t に対して成立する．従って $(u-v,w)=0$ となる．すなわち $u-v\in V^{\perp}$.

定理 18 Hilbert 空間上の有界線形汎関数は内積で表現される．すなわち

$$f : U \ni u \mapsto f(u), \quad |f(u)| \le C|u|, \ \forall u \in U$$

を満たす線形関数 f に対して $v \in U$ が一意に存在し

$$f(u) = (u, v), \quad \forall u \in U$$

が成立する．

証明：$V = \mathrm{Ker} f$ とおくと，$V \subset U$ は閉部分空間である．$f = 0$ のときは明らかであるから $f \neq 0$ とする．このとき $V^{\perp}$ 上で $f \neq 0$ である．従って Hahn-Banach によると $w \in V^{\perp}$ があって $f(w) = 1$ となる．さて $u = u - f(u)w + f(u)w$ と書くと，$f(u - f(u)w) = f(u) - f(u)f(w) = 0$ であるから $u - f(u)w \in V$. 従って

$$(u - f(u)w, w) = 0 \Longrightarrow (u, w) = (f(u)w, w) = f(u)(w, w)$$

すなわち

$$f(u) = \frac{(u, w)}{(w, w)} = (u, \frac{w}{|w|^2}).$$

10.2 Dirichlet 問題への応用

D を $\mathbb{R}^2$ 内の領域とし，$f(x, y)$ は D 上の連続関数（境界まで込めて）としよう．

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad \text{in} \quad D \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \end{cases}$$

を満たす u を求める問題を Dirichlet 問題という．Hilbert 空間を設定し，定理 3 を応用して，この問題を解いてみよう．$C_0^2(D)$ で，$C^2(D)$ の関数で D の境界付近では恒等的に 0 である関数の全体を表す．$u,v \in C_0^2(D)$ に対して

$$(u, v)_H = \int_D \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} \Big) dxdy$$

と定義する．また $\|u\|_H = \sqrt{(u, u)_H}$ とする．さらに，

$$(u, v) = \int_D uv dxdy, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

とおこう．

補題 5 ある定数 $C > 0$ があって

$$\|u\| \le C\|u\|_H$$

がすべての $u \in C_0^2(D)$ に対して成立する．

このことから，$\|u\|_H = 0$ なら $\|u\| = 0$ となり，従って $u = 0$ が従う．内積が満たすべき，の残りの２つの性質は明らかなので $(\cdot,\cdot)_H$ は内積となる．

残念ながら，$C_0^2(D)$ は Hilbert 空間にならない (完備でない)．そこで $C_0^2(D)$ の Cauchy 列のすべての極限を新たな元として $C_0^2(D)$ に付け加えたものを H と書こう (この H を $C_0^2(D)$ の完備化という)．この操作は，たとえば $C_0^2(D)$ を有理数全体とみるとき，有理数の極限である無理数をすべて付け加えて実数全体 (これが H になる) を作る操作と本質的に同じである．このとき，補題 1 は H の元に対しても成立する．

さて f は D の境界まで込めて連続な関数であった．ここで，H 上の線形汎関数 ℓ;

$$\ell : H \ni \phi \mapsto \ell(\phi) = -(\phi, f)$$

を考えよう．補題 1 によると

$$|\ell(\phi)| = |(\phi, f)| \le \|\phi\|\|f\| \le (C\|f\|)\|\phi\|_H$$

であるから ℓ は H 上の有界線形汎関数である．定理 3 によって，ある $u \in H$ がみつかって

$$\ell(\phi) = -(\phi, f) = (\phi, u)_H$$

がすべての $\phi \in H$ に対して成立する．とくに $\phi \in C_0^2(D)$ に対して成立する．すなわち

$$-\int_D \phi f dxdy = \int_D \Big(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\Big)dxdy \tag{8}$$

がすべての $\phi \in C_0^2(D)$ に対して成立する．いま，仮に u が $C^2(D)$ とすると (8) 式で部分積分を行って

$$\int_D \phi f dxdy = \int_D \phi\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)dxdy$$

がすべての $\phi \in C_0^2(D)$ に対して成立し，従って

$$\int_D \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f\Big)\phi dxdy$$

このことから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{in} \quad D \tag{9}$$

が成立する．最後の部分は次の補題で正当化される．

補題 6 $u \in H$ とする．すべての $\phi \in C_0^2(D)$ に対して *(8)* が成立するとすると，実は u は $C^2(D)$ であって *(9)* が成立する．

11 講義 XI

11.1 微分法

$y = f(x)$ を考え，点 $x = a$ で，この曲線に接線 T を引く．この接線の方程式を $y = f(a) + c(x - a)$ としよう．接線であるとは

$$x \text{ が } a \text{ に近い} \implies f(x) = f(a) + c(x-a) + \text{微少量}$$

ここで微少量とは $|x - a|$ に比較して，これよりも非常に小さい量；

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{微少量}}{x - a} = 0$$

この量を $o(|x - a|)$ と書き，スモール・オー・オブ $|x - a|$ と呼ぶ．従って

$$f(x) = f(a) + c(x - a) + o(|x - a|)$$

と書くことができる．ここで c は

$$c = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{o(|x - a|)}{x - a} \Longleftrightarrow c = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

c を $f'(a)$ で表し，$f(x)$ の $x = a$ での微係数という．$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という．$f'(x)$ が連続なとき $f(x)$ を C^1 級関数という．さらに $f'(x)$ の導関数 $(f'(x))' = f''(x)$ が連続なときには C^2 級という．関数はいつでも微分できるわけではない．Weierstrass によると，連続関数であって，すべての点で微分可能でない関数が存在する (1872). Newton 流の解釈によれば $f(t)$ が物体の位置を表すとき，$f'(t)$ は速度を，また $f''(t)$ は加速度を表す．$f(x)$ が a で極値をとるなら $f'(a) = 0$ である．

- $H = f + g \Longrightarrow H'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $H = fg \Longrightarrow H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $H = f/g\ (g \neq 0) \Longrightarrow H'(x) = (f'(x)g(x) - g'(x)f(x))/g(x)^2$
- $H = f(g(x)) \Longrightarrow H'(x) = f'(g(x))g'(x)$

最後の等式を示しておこう．$g(x+h) = g(x) + hg'(x) + o(|h|)$ と書くと

$$f(g(x+h)) = f\Big(g(x) + h\big(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h})\Big)$$
$$= f(g(x)) + \big[h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h})\big]f'(g(x)) + o\Big(h\big(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h})\Big)$$

従って

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x))g'(x) + f'(g(x))\frac{o(|h|)}{h} + \frac{o(h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h}))}{h}$$

ところで

$$\frac{o(h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h}))}{h} = \frac{o(h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h}))}{h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h})}\frac{h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h})}{h} = \frac{o(h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h}))}{h(g'(x) + \frac{o(|h|)}{h})}\Big[g(x) + \frac{o(|h|)}{h}\Big]$$

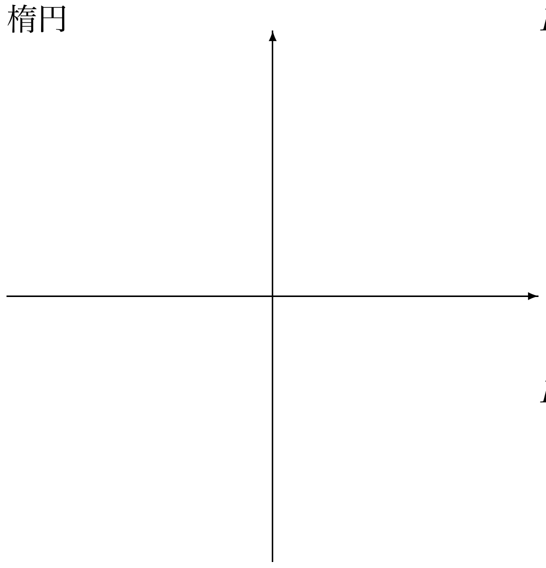
11.2　プリンキピア

Newton のプリンキピア (自然哲学の数学的原理, 1687) の主要結果

太陽をめぐる惑星の軌道および彗星の軌道は円錐曲線である

円錐曲線：円錐と平面とが交わってできる曲線：

楕円



$P(x, y)$ から 2 つの焦点 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$

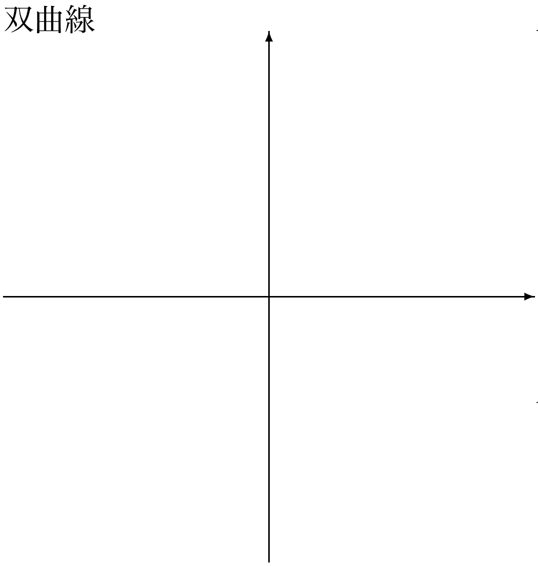
への距離の和が一定 $= 2a$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

F から出た光は P で反射して F' に入る

双曲線



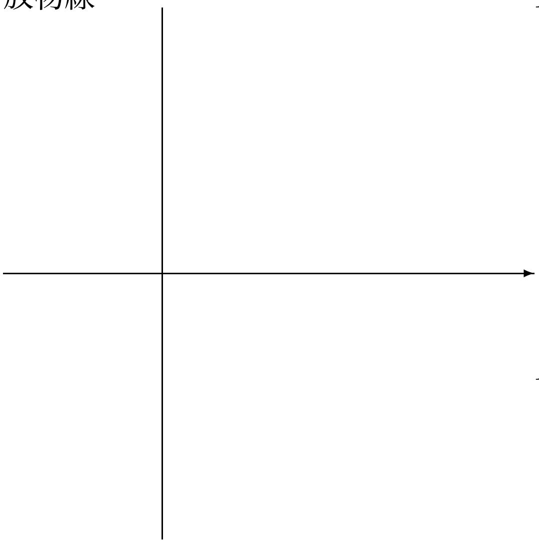
$P(x,y)$ から 2 つの焦点 $F(c,0)$, $F'(0c,0)$
への距離の差が一定 $= \pm 2a$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

F から出た光は P で反射して
F' から来たように見える

放物線



$P(x,y)$ から準線 $L(x=-c)$ と焦点 $F(c,0)$
までのの距離が等しい

$$y^2 = 4cx$$

F から出た光は P で反射して
すべて平行になる

極座標による表示

$$r + r' = 2a$$
$$r'^2 = r^2 \sin^2\theta + (2c + r\cos\theta)^2$$

したがって $(2a-r)^2 = r\ 2 + 4cr\cos\theta + 4c^2$. $c = ea$ $(0 \le e < 1)$ とおくと $-4ar + 4a^2 = 4cr\cos\theta + 4c^2$, $a(e\cos\theta + 1)r^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2)$. 従って

$$r = p(1 + e\cos\theta)^{-1}, \quad p = a(1-e^2).$$

ここで e は離心率という．$e = 0$ なら円である．つぎに双曲線の場合を

$$r' - r = 2a$$
$$r'^2 = r^2 \sin^2\theta + (2c - r\cos\theta)^2$$
$$= r^2 - cr\cos\theta + 4c^2$$

考える．

従って $(2a+r)^2 = r^2 - 4cr\cos\theta + 4c^2$．$c = ea$ $(e > 1)$ とおくと

$$4a^2 + 4ar = -4ear\cos\theta + 4c^2,\ \ a(1+e\cos\theta)r = a^2(e^2-1)$$

したがって再び

$$r = p(1+e\cos\theta)^{-1},\quad p = a(e^2-1)$$

となる．$e = 1$ のときは放物線となる．

11.3　惑星の運動

太陽と惑星の質量をそれぞれ M, m とし，その間の距離を r とし，$M \gg m$ とする．惑星は太陽からの引力 $amMr^{-2}$ を受ける．太陽も惑星からの同じ引力をうけるが，$M \gg m$ なので，これを無視する．すなわち太陽は動かない，とする．太陽は原点にあるとし，惑星の位置を $(x(t), y(t), z(t))$ であらわす．Newton 運動法則によると，質量 $\times$ 加速度 $=$力 であるから

$$m\ddot{x} = -amMxr^{-3},\ \ m\ddot{y} = -amMyr^{-3},\ \ m\ddot{z} = -amMzr^{-3}$$

である．なぜなら，点 (x, y, z) から原点に向かう単位ベクトルは

$$-\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

であるから．時間の測りかたを変えて，$t = ks$ としてとしよう．このとき $\tilde{x}(s) = x(ks)$ とおくと，$\ddot{\tilde{x}}(s) = k^2\ddot{x}(ks)$ であるから，$k^2aM = 1$ と k を選ぶと

$$\ddot{x} = -xr^{-3},\ \ \ddot{y} = -yr^{-3},\ \ \ddot{z} = -zr^{-3}$$

となる．

Fact 1 $w=ax+by+cz$, a, b, c は定数とする．ある時刻 t で $w=\dot{w}=0$ ならば，すべての t で $w=0$ である．

いま，ある時刻 t_0 を一つ固定する． $w(t_0)=0$, $\dot{w}(t_0)=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ を a, b, c に関する連立一次方程式とみて，これを満たす a, b, c を選ぶ．$ax+by+cz=0$ という平面を考えると，$(x(t),y(t),z(t))$ は，任意の t に対して，この平面上にある．このことから，運動は一つの平面内で起こることがわかる．この平面を $z=0$ としてもよい．従って，運動方程式は

$$\ddot{x}=-xr^{-3},\quad \ddot{y}=-yr^{-3},\quad z=0,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

となる．これから

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=-(x\dot{x}+y\dot{y})r^{-3},\quad x\ddot{y}-y\ddot{x}=0$$

である．

$$\begin{aligned} h=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2 &\Longrightarrow \dot{h}=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y} \\ h=x\dot{y}-y\dot{x} &\Longrightarrow \dot{h}=x\ddot{y}-y\ddot{x} \\ h=r^{-1} &\Longrightarrow \dot{h}=-(x\dot{x}+y\dot{y})r^{-3} \end{aligned}$$

従って

$$\frac{d}{dt}\big((\dot{x}^2+\dot{y}^2)/2-r^{-1}\big)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+(x\dot{x}+y\dot{y})r^{-3}=0$$

から

$$\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2}-r^{-1}=E\ (\text{定数})$$

同様にして $x\dot{y}-y\dot{x}=c$ (定数) である．ここで mE はこの物体の全エネルギーである．

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2);\text{運動エネルギー},\quad -mr^{-1};\text{ポテンシャルエネルギー}$$

つぎに，定数 c の意味を調べよう．

Fact 2 $x(t)=r(t)\cos\theta(t)$, $y(t)=r(t)\sin\theta(t)$ で $r(t)$, $\theta(t)$ を定めるとき，$r(t)$, $\theta(t)$ は t の C^2 級関数である．

さて

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - \dot{\theta}r\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + \dot{\theta}r\cos\theta$$

を E, c の表現式に代入すると

$$(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2 - r^{-1} = E, \quad r^2\dot{\theta} = c$$

２番目の式から

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{c}{2}$$

が得られる．これは面積速度一定を表している．惑星が，時刻 t のときに $(r(t), \theta(t))$ に，その h 時間後に $(r(t+h), \theta(t+h))$ にあったとしよう．この h 時間の間に，原点（太陽）と惑星を結ぶ直線が掃過する面積は，近似的に

$$\frac{1}{2}\Big[\frac{r(t+h)+r(t)}{2}\Big]^2(\theta(t+h)-\theta(t))$$

h で割って $h \to 0$ とすると $r(t)^2\dot{\theta}(t)/2$ に近づく．

$c = 0$ のときは $\dot{\theta} = 0$ となって，惑星は太陽を通る一つの直線上を運動する．

Fact 3 $\dot{\theta} \neq 0$ ならば t は θ の C^2 級関数である．

$t = h(\theta)$ とおくと $r = r(h(\theta))$ は θ の C^2 級関数であり，

$$\frac{d}{d\theta}r = \dot{r}(h(\theta))h'(\theta)$$

ところで $t = h(\theta)$ を t で微分すると $1 = h'(\theta)\dot{\theta}$ 故

$$h'(\theta) = \frac{1}{\dot{\theta}} \Longrightarrow \frac{d}{d\theta}r(h(\theta)) = \dot{r}(h(\theta))h'(\theta) = \frac{\dot{r}(t)}{\dot{\theta}(t)}$$

さて $r^2\dot{\theta} = c$ から $\dot{\theta} = cr^{-2}$ で，$\dot{r} = r'\dot{\theta} = cr'r^{-2}$ となる．これらを E の表現式に代入しよう．

$$\frac{1}{2}\big(c^2(r')^2r^{-4} + r^2c^2r^{-4}\big) - r^{-1} = E$$

$u = r^{-1}$ とおくと $u' = -r'r^{-2}$ であるから

$$\frac{1}{2}c^2\big((u')^2 + u^2\big) - u = E$$

となる．さらに $v = cu - c^{-1}$ とおくと $v' = cu'$ で

$$(v')^2 + v^2 = 2E + c^{-2}(> 0)$$

が従う．

Fact 4 $w = w(\theta)$ は定数でない C^2 級関数で，ある区間で $(w')^2 + w^2 = 1$ を満たすとする．このとき，ある θ_0 があって $w(\theta) = \cos(\theta + \theta_0)$ である．

さて，$\theta + \theta_0$ を改めて θ と書くと (すなわち，θ_0 から測り始めることにする) $v = (2E + c^{-2})^{1/2}\cos\theta$ となる．これから u を求めると

$$u(\theta) = c^{-1}(v + c^{-1}) = c^{-2}\bigl[(2Ec^2 + 1)^{1/2}\cos\theta + 1\bigr] = c^{-2}(1 + e\cos\theta)$$

ただし，$e = (2Ec^2 + 1)^{1/2}$ とした．$p = c^2$ とおくと

$$r = u^{-1} = p(1 + e\cos\theta)^{-1}$$

で，これは円錐曲線を表す．$0 < e < 1$ なら楕円，$e = 1$ なら放物線，$e > 1$ なら双曲線の一つの枝，$e = 0$ なら円である．

最後に残りの Kepler の法則を導いてみよう．Kepler の法則は

- 面積速度一定,
- 軌道は太陽を一つの焦点とする円錐曲線,
- 周期の 2 乗は太陽までの平均距離の 3 乗に比例

楕円軌道の周期を T とする．Y を楕円の面積とすると $T = 2Y/c$ である．一方 $Y = \pi ab$ で $r = p(1 + e\cos\theta)^{-1}$ として $p = a(1 - e^2)$ 故，$a = p(1-e^2)^{-1}$, $b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2) = p^2(1-e^2)^{-1}$. 故に $b = p(1-e^2)^{-1/2}$. 従って

$$T = \frac{2\pi p^2(1-e^2)^{-3/2}}{\sqrt{p}} = 2\pi p^{3/2}(1-e^2)^{-3/2}$$

他方，太陽までの平均距離は

$$m = \frac{1}{2}\bigl[p(1+e)^{-1} + p(1-e)^{-1}\bigr] = p(1-e^2)^{-1}$$

ゆえに $T = 2\pi m^{3/2}$.

12 講義 XII

12.1 微分法 II

厳密な解析，Fact 1 Fact 4 の証明：

命題 1 $f(a)=0,\ f'(a)=0$ かつ，ある定数 C があって，x が a に近いとき

$$|f''(x)| \leq C|f(x)| + C|f'(x)|$$

が成立しているとする．このとき $f(x)$ は $x=a$ の近くで 0 である．

証明：$\delta > 0$ を小さな正数とする．

$$\sup_{|x-a|<\delta} |f''(x)| = h(\delta)$$

とおこう．平均値の定理によると $|x-a| < \delta$ のとき

$$f'(x) = f'(x) - f'(a) = (x-a)f''(\xi)$$

を満たす ξ が $(a-\delta, a+\delta)$ にある．従って

$$|f'(x)| = |(x-a)f''(\xi)| \leq \delta h(\delta)$$

である．再び，平均値の定理によると

$$f(x) = f(x) - f(a) = (x-a)f'(\eta)$$

なる η が $(a-\delta, a+\delta)$ にあるから

$$|f(x)| = |(x-a)f'(\eta)| \leq \delta^2 h(\delta)$$

この式を $|f''(x)| \leq C|f(x)| + C|f'(x)|$ に代入して

$$|f''(x)| \leq C\delta^2 h(\delta) + C\delta h(\delta)$$

$|x-a| < \delta$ の範囲で sup をとると

$$h(\delta) \leq C\delta^2 h(\delta) + C\delta h(\delta) = C\delta(\delta+1)h(\delta)$$

$C\delta(\delta+1) < 1$ なら $h(\delta) < h(\delta)$ から $h(\delta) = 0$．　従って a に近いところで $f''(x) = 0 \Longrightarrow a$ に近いところで $f'(x) =$ 定数 $= f'(a) = 0$. 従って a に近いところで $f(x) =$ 定数 $= f(a) = 0$.

Fact 2 と Fact 3 の証明：

Fact 2: $w = ax(t)+by(t)+cz(t)$ は $\ddot{w} = -r^{-3}w$ を満たす．また $w(t_0) = 0$, $\dot{w}(t_0) = 0$ であった．これを $\ddot{w} = Fw$ と書く．$f(t) = -r^{-3}(t)$ で t の連続関数である．$\alpha \le t \le \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ として

$$C = \max_{\alpha \le t \le \beta} \frac{1}{r^3(t)}$$

とおくと，$|\ddot{w}| \le C|w|$. 従って命題から $w = 0$ である．

Fact 4: $(w')^2 + w^2 = 1$ とする．$2w'w'' + 2ww' = 0$ から

$$w'(w'' + w) = 0$$

仮定から w は定数ではないので，ある点で $w' \neq 0$. 従ってこの近くで $w' \neq 0$. 従ってここでは $w''+w = 0$ である．この関係式は，考えている区間全体で成立することを示そう．まず $w'' + w = 0$ が (a, b) で成立しているとしよう．w は C^2 なので $w''(a)+w(a) = 0$, $w''(b)+w(b) = 0$ である．いま $w'(a) = 0$ なら $w(a) = \pm 1$ 従って $w''(a) = \mp 1$. 従って $w'(x)$ は a の左側で，正または負で，0 ではない．故に $w'' + w = 0$ が a の近くの左側でも成立している．同様にして b の近くの右側でも成立している．このようにして全区間で成立している． $w(0)^2 + (w'(0))^2 = 1$ であるから θ_0 を $w(0) = \cos\theta_0, w'(0) = \sin\theta_0$ となるように選ぶ．$u(\theta) = w(\theta) - \cos(\theta + \theta_0)$ とおくと $u'' + u = 0$. また $u(0) = u'(0) = 0$ である．$u'' = -u$ であるから $|u''| \le |u|$. 命題を適用すると $u = 0$ すなわち $w(\theta) = \cos(\theta + \theta_0)$ である．

注意：w を単に C^1 と仮定したのでは結論は一般には正しくない：

$$w(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \le 0 \\ \cos\theta & \theta \ge 0 \end{cases}$$

は $(w')^2 + w^2 = 1$ を満たす．w は C^2 でないことに注意する．

12.2 逆関数定理

Fact 2 と Fact 3 の証明： 今 $f(x)$ をある開区間 I で定義された関数で $f'(x) \neq 0$ $(\forall x \in I)$ とする．まず，平均値の定理から

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$$

なる $a<\xi<b$ がある．$f'(\xi)\neq 0$ であるから $b\neq a$ なら $f(b)\neq f(a)$. すなわち $f(x)$ は 1 対 1 である．$J=f(I)=\{f(x)\mid x\in I\}$ とおき，

$$J\ni y=f(x)\mapsto x=g(y)$$

を f の逆関数とする．すなわち $g(f(x))=x,\ f(g(y))=y$.

まず，$f(x)$ が連続関数なら，$g(y)$ も連続関数であることを示そう．$g(c)=\alpha$, すなわち $f(\alpha)=c$ としよう．$\epsilon>0$ をかってな正数とする．$f(\alpha+\epsilon)=d$ とし $c<y<d$ なるかってな y を考える．($d<c$ のときも同じ) 中間値の定理から $\alpha<\xi<\alpha+\epsilon$ があって $f(\xi)=y$ となる．すなわち $g(y)=\xi$ ゆえ

$$|g(y)-g(c)|=|\xi-\alpha|<\epsilon$$

すなわち，ϵ がどんなに小さくとも，y が c に近ければ $|g(y)-g(c)|<\epsilon$ となる．

次に，$f(x)$ が微分可能ならば $g(y)$ も微分可能であることを示そう．$y\in J$ とし，$\eta\in J$ は y に近いとする．$x=g(y),\ \xi=g(\eta)$ とおくと，$f(x)=y,\ f(\xi)=\eta$ である．したがって

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\frac{\eta-y}{g(\eta)-g(y)}$$

$\eta\to y$ のとき $\xi\to x$ であるから，$\eta\to y$ として

$$\frac{\eta-y}{g(\eta)-g(y)}\to f'(x)$$

であることを示している．$f'(x)\neq 0$ であったから

$$\frac{g(\eta)-g(y)}{\eta-y}\to\frac{1}{f'(x)}\quad(\eta\to y)$$

すなわち $g(y)$ は y で微分可能で $g'(y)=1/f'(x)$ である．$x=g(y)$ であるから

$$g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}$$

以下，同様にして $f'(x)$ が 2 回微分可能なら，$g'(y)$ も微分可能，すなわち，$g(y)$ も 2 回微分可能．一般に $f(x)$ が C^k 級なら $g(y)$ も C^k 級．

Fact 2 の証明： x,y が t の C^2 級関数なら $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ は $r>0$ のとき t の C^2 級関数である．

$$\frac{x}{r}=\cos\theta,\quad\frac{y}{r}=\sin\theta$$

で $d\cos\theta/d\theta = -\sin\theta$, $d\sin\theta/d\theta = \cos\theta$ のいずれかは 0 でない．いま $-\sin\theta \neq 0$ とすると, 上で証明したことから θ は x/r の C^2 級関数である．従って t の C^2 級関数である．

Fact 3 の証明：上で示した逆関数定理そのものである．

13　講義 XIII

13.1　微分方程式

$$u_1' = f_1(t, u_1, ..., u_n), ..., u_n' = f_n(t, u_1, ..., u_n) \tag{10}$$

ここで $f_1(t,v)$,...,$f_n(t,v)$ は t と $v = (v_1, ..., v_n)$ の関数である．$u = (u_1, ..., u_n)$ がこの微分方程式系の解とは $u_1(t)$,...,$u_n(t)$ が t のある区間で (1) を満たすときをいう．Newton の方程式は

$$u_1 = x,\ \ u_2 - y,\ \ u_3 = z,\ \ u_4 = \dot{x},\ \ u_5 = \dot{y},\ \ u_6 = \dot{z}$$

とおくと

$$u_1' = u_4,\ \ u_2' = u_5,\ \ u_3' = u_6,\ \ u_4' = -u_1 r^{-3},\ \ u_5' = -u_2 r^{-3},\ \ u_6' = -u_3 r^{-3}$$

となる．ただし，$r = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$ である．

$u(t)$ を時刻 t における系の状態とすると，$u'(t)$ は系の変化の割合である．非常に多くの物理的，化学的過程が次の条件を満たす：

各時刻における系の変化の割合は，その時刻とその時刻における状態のみの関数である．

これは，数学的には $u'(t) = F(t, u(t))$ を意味する．また

ある時刻での状態はそれ以後の時刻における状態を決定する．

これは，数学モデルに関しては解の一意性を意味する．すなわち，2つの解が $t = t_0$ で一致すれば，それ以後の時刻でも一致する，を意味する．

13.2　解の存在と一意性

$g(t)$ を連続とする．このとき

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

とおくと，$G(t_0)=0$, $G'(t)=g(t)$ であるから，平均値の定理より

$$G(t)=(t-t_0)g(\xi)$$

なる $\xi\in(t_0,t)$ がある．したがって

$$|G(t)|\le|t-t_0|\max_{t_0\le s\le t}|g(s)|$$

である．微分方程式を書き換えると $u_k(t_0)=u_{k0}$ として

$$u_k(t)=u_{0k}+\int_{t_0}^{t}f_k(s,u_1(s),...,u_n(s))ds,\quad k=1,...,n \tag{11}$$

となる．Banach 空間 B_δ を

$$B_\delta=\Big\{v(t)=(v_1(t),...,v_n(t))\mid v_j(t)\text{ は }\quad|t-t_0|\le\delta\text{で連続}\Big\}$$

および，ノルム $\|\cdot\|$

$$\|v\|=\max_{k,|t-t_0|\le\delta}|v_k(t)|$$

で定義する．この空間は完備である．B_δ から B_δ への写像 T を

$$T(u)=\Big(u_{01}+\int_{t_0}^{t}f_1(s,u_1(s),...,u_n(s))ds,...,u_{0n}+\int_{t_0}^{t}f_n(s,u_1(s),...,u_n(s))ds\Big)$$

と定める．u が (2) の解 $\Longleftrightarrow u=T(u)$. T が縮小写像の定理で要求された条件を満たすことを確かめる．

Lipschitz 条件: $f_1(t,v)$,...,$f_n(t,v)$ は $(t,v)\in I\times V$ で連続で，かつ $a>0$ があって t, v, t, w が t_0, u_0 に十分近いとき

$$|f(t,v)-f(t,w)|\le a|v-w|$$

が成立する．

Lipschitz 条件を仮定する．このとき

$$|T(u)-T(v)|\le a\delta|u-v|$$

いま，$a\delta<1$ となるよう δ を選ぶと，T は縮小写像となり，$u=T(u)$ となる u がただ一つ存在する．