

目次

第1章	実数の連続性 (完備性) 7	7
1.1	記号の準備	7
1.2	有界集合,上限,下限	7
1.3	実数の連続性の表現 1	3
1.4	数列(点列) 8	3
1.5	実数の連続性の表現 2)
1.6	実数の連続性の表現 3, Cauchy 列 10)
第2章	極限、連続関数 11	Ĺ
2.1	定義	
2.2	単調関数	2
2.3	逆三角関数	3
2.4	ある不等式*	3
第3章	Taylor 展開 15	•
おり 早 3.1	Taylor 展開 滑らかな関数	
3.1	Lebesgue の定理 *	
$\frac{3.2}{3.3}$	有限次 Taylor 展開	
3.4	剰余項の他の表現	
第4章	無限級数 19	
4.1	級数の収束 1	
4.2	級数の収束 2	
4.3	Fubini の定理 *)
第5章	再び Taylor 展開 23	3
5.1	Taylor 展開	}
第6章	偏微分 25	ó
6.1	\mathbb{R}^n の位相 \dots 25	5
6.2	コンパクト集合	
6.3	ラージ <i>O</i> , スモール <i>o</i>	
6.4	\mathbb{R}^n での微分の定義 $\dots \dots \dots$	
6.5	\mathbb{R}^n での微分の定義 2	3

	6.6 6.7	偏微分と微分の関係
	6.8	Taylor 展開 1
	6.9	Taylor 展開 2
	0.0	1aylo1 (5C)(1 2 · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
第	7章	極値問題 35
	7.1	極値問題
	7.2	二次形式
第	8章	陰関数 39
	8.1	陰関数
	8.2	逆函数定理
第	9章	条件付極値問題 43
	9.1	条件付極値
第	10 章	積分 45
	10.1	積分の naive な定義
	10.2	定義の反省 45
		可積分性の判定
		基本定理
		不定積分の計算 49
	10.6	広義積分
		有界変動関数 *
	10.8	Stieltjes 積分 *
笋	11 咅	重積分 55
h		目的
		重積分の naive な定義
		重領カの naive な足銭
		可積分性の判定
		面積
		累次積分
		積分の変数変換 (極座標への変換) 60
		積分の変数変換 (極座標への変換)
		(関方の変数変換 (極座標 への変換)
)広義積分 (多次元)
		L
	11.12	4四我唄刀ツ友奴友19

	5
第 12 章 線積分と Green の定理	69
12.1 平面上の曲線	69
12.2 線積分	69
12.3 Green の定理	70
第 13 章 微分方程式	73
13.1 解の存在と一意性	73
13.2 簡単な微分方程式	73
13.3 2階線形微分方程式(斉次)	74
13.4 非斉次微分方程式	75
13.5 定数係数 2 階方程式	76
第 14 章 一様収束	77
14.1 関数列	77
14.2 関数項級数	78
14.3 一様収束のための条件	79
14.4 Abel の定理 *	80
14.5 Tauber の定理 *	81

第1章 実数の連続性(完備性)

1.1 記号の準備

- (1) 実数の全体 = 数直線 = ℝ
- $(2) x \in \mathbb{R}$
- (3) $M \subset \mathbb{R}$
- (4) よく使うギリシャ文字

 $\alpha, \beta, \gamma(\Gamma), \delta(\Delta), \lambda(\Lambda), \mu, \nu, \phi(\Phi), \psi(\Psi), \xi(\Xi), \eta, \zeta, \theta(\Theta), \epsilon, \sigma(\Sigma), \omega(\Omega)$

演習問題 1.1.1 次の集合はどのような集合か.

$$M = \{x \mid 0 < x < 1\},$$

$$M = \{x \mid x^2 \le 1\},$$

$$M = \{1/n \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

1.2 有界集合, 上限, 下限

定義 1.2.1 $M \subset \mathbb{R}$ が上に有界とは、ある $\alpha \in \mathbb{R}$ があって、すべての $x \in M$ に対して $x \leq \alpha$ が成立すること。記号を使って次のように書く:

 $\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t.}(\text{such that}) \forall x \in M \Longrightarrow x \leq \alpha$

演習問題 1.2.1 $M \subset \mathbb{R}$ が下に有界である、の定義を与えよ、

定義 1.2.2 上にも下にも有界な集合を有界集合という.

定義 1.2.3 $M \subset \mathbb{R}$ とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき, α を M の上限といい, $\alpha = \sup M$ とかく.

- $(1) \forall x \in M$ に対して $x \leq \alpha$
- (2) $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\alpha \epsilon < y$ なる $y \in M$ がある

定義 **1.2.4** a が M の最大数であるとは $a \in M$ であってかつすべての $x \in M$ に対して $x \le a$ の成立するときをいう.

注意: M に最大数があるとは限らない.

注意: M を上に有界とする.このとき $\sup M = \min \left\{ x \mid x \text{ id } M \text{ on } \bot \text{ P} \right\}$ である.

演習問題 1.2.2 $M \subset \mathbb{R}$ とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ が M の下限であることの定義を与えよ. M の下限を $\inf M$ で表わす.

演習問題 1.2.3 次の集合の上限を求めよ.

$$S = \{x \mid 0 \le x < 1\},\$$

$$S = \{1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}, \dots, 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}, \dots\}.$$

1.3 実数の連続性の表現 1

Claim 1.3.1 上に有界な集合には上限が存在する.

記号:閉区間 $\{x \mid a \le x \le b\} = [a, b]$,開区間 $\{x \mid a < x < b\} = (a, b)$

演習問題 **1.3.1** [a,b), (a,b] はどんな集合か?

演習問題 1.3.2 下に有界な集合には下限が存在することを示せ.

Claim 1.3.2 $I_n = [a_n, b_n], n = 1, 2, ...$ が次を満たすとする.

- (1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$
- $(2) \lim_{n\to\infty} (b_n a_n) = 0$

このとき、すべての I_n に含まれる点が唯一つ存在する.

定理 1.3.1 Claim 1.3.1 と Claim 1.3.2 は同値である.

1.4 数列(点列)

記号: № = {1,2,...} = 自然数の全体

定義 1.4.1 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n\to\infty$ のとき α に収束するとは

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \ s.t. \ n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とかく.

定義 **1.4.2** $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるとは $\mathbb N$ から $\mathbb N$ への順序を保つ写像 ϕ :

$$\mathbb{N} \ni p \mapsto \phi(p) \in \mathbb{N}, \ p > q \Longrightarrow \phi(p) > \phi(q)$$

があって $b_m = a_{\phi(m)}, m = 1, 2, ...$ となること.

演習問題 1.4.1 $a_n = n$ のとき $b_m = 2m$ は部分列である.

演習問題 1.4.2 1,2,3,4,5,6,7,8,... に対して 4,2,6,8,10,... は部分列ではない. なぜか?

定義 1.4.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加数列であるとは

$$a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le \dots$$

なることをいう。 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が狭義単調増加数列であるとは

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$$

なることをいう。 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であるとは集合 $\{a_1,a_2,...\}$ が上に有界であること。

演習問題 1.4.3 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が単調減少数列であるとはどういうことか。また狭義単調減少数列であるとはどういうことか $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が下に有界とはどういうことか?

1.5 実数の連続性の表現 2

定理 1.5.1 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は必ず収束する. さらに

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup \{a_1, a_2, \dots\}$$

である.

演習問題 1.5.1 下に有界な単調減少列は収束することを示せ.

演習問題 1.5.2 Claim 1.3.2 を証明せよ.

定理 1.5.2 有界な数列は必ず収束する部分列を含む.

1.6 実数の連続性の表現 3, Cauchy 列

定義 1.6.1 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が Cauchy 列であるとは $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が次の条件を満たすときをいう:任意の $\epsilon>0$ に対して次の性質を満たす $N\in\mathbb{N}$ をみつけることができる.

$$n > m \ge N \Longrightarrow |a_n - a_m| \le \epsilon$$

定理 1.6.1 Cauchy 列は収束する. 逆に収束する数列は Cauchy 列である.

注意: 定理 1.6.1 で極限値があらわにはあらわれていないことに注意せよ.

演習問題 1.6.1 Cauchy 列は有界である. このことを示せ.

第2章 極限,連続関数

2.1 定義

定義 2.1.1 f(x) は区間 I 上で定義された関数とし、 $a \in I$ とする。このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

とは

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ \ s.t. \ |f(x) - A| < \epsilon, \ \forall x \in I, \ |x - a| < \delta$$

の成立することである.

定義 2.1.2 f(x) は区間 I 上で定義された関数とし、 $a \in I$ とする。このとき

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = A \quad or \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = A$$

とは

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ s.t. \ |f(x) - A| < \epsilon, \ \forall x \in I, \ a < x < a + \delta$$

の成立することである.

演習問題 2.1.1

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = A \quad or \quad \lim_{x \to a - 0} f(x) = A$$

の定義を与えよ.

定義 2.1.3 f(x) は区間 I 上で定義された関数とし、 $a \in I$ とする。このとき f(x) が a で連続であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

の成立することである. f(x) が I で連続であるとは, f(x) が I のすべての点で連続であること.

補題 **2.1.1** f(x) が x=a で連続であるためには, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ なる全ての点列 $\{a_n\}$ に対して $f(a_n) \to f(a)$ の成立することが必要十分である.

演習問題 **2.1.2** f(x) は区間 I 上で定義された関数とし、 $a \in I$ とする.このとき "f(x) が a で右から連続である"を定義せよ.同様に "f(x) が a で 左から連続である"を定義せよ.

記号: I で連続な関数の全体を $C^0(I)$ で表わす.

演習問題 **2.1.3** f(x), g(x) は区間 I で定義された関数とし、a で連続とする。このとき、 $f(x)\pm g(x)$ は a で連続であることを示せ。 $g(a)\neq 0$ とする。このとき f(x)/g(x) は a で連続であることを示せ。

定理 **2.1.1** I = [a,b] で $f(x) \in C^0(I)$ とする. このとき f(x) は I 上で最大値、最小値をとる.

演習問題 **2.1.4** I=(0,1), f(x)=1/x とする. このとき f(x) は I 上で最大値をとるか?最小値についてはどうか?

定理 **2.1.2** I=[a,b] で $f(x)\in C^0(I)$ とし、 $f(a)\leq f(b)$ とする。このとき、 $f(a)\leq \gamma\leq f(b)$ なるかってな γ に対して $f(c)=\gamma$ となる $c\in [a,b]$ が存在する。

2.2 単調関数

定義 **2.2.1** f(x) を区間 I で定義された関数とする. f(x) が I で単調増加 であるとは

$$x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y)$$

の成立することをいう. f(x) が I で狭義単調増加であるとは

$$x, y \in I, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

の成立することをいう.

演習問題 2.2.1 f(x) を区間 I で定義された関数とする. f(x) が I で単調 (狭義) 減少であることの定義を与えよ.

定理 **2.2.1** $f(x) \in C^0([a,b])$ が [a,b] 上狭義単調増加であるとする. $f([a,b]) = [\alpha,\beta]$ とする. このとき $g(y) \in C^0([\alpha,\beta])$ で

$$g(f(x)) = x, \quad x \in [a, b]$$

を満たすものがある. この g を f の逆関数とよび $f^{-1}(x)$ であらわす.

演習問題 2.2.2 定理 2.2.1 で f^{-1} も狭義単調増加関数であることを示せ.

2.3 逆三角関数

定義 **2.3.1** $y=\sin x$ は $[-\pi/2,\pi/2]$ で狭義単調増加である。この逆関数を $\arcsin x$ と表す。 $y=\cos x$ は $[0,\pi]$ で 狭義単調減少である。この逆関数を $\arccos x$ と表す。 $y=\tan x$ は $[-\pi/2,\pi/2]$ で狭義単調増加である。この逆関数を $\arctan x$ と表す。

演習問題 **2.3.1** $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$ の概形を描け.

演習問題 **2.3.2** $y = \arctan x$, $-\infty < x < \infty$ の概形を描け.

2.4 ある不等式*

補題 2.4.1 $\eta=\omega(\xi)$ を $[0,\infty)$ で定義された狭義単調増加関数で $\omega(0)=0$ を満たすとする. $\xi=\mu(\eta)$ をその逆関数とする. このとき,任意の $x\geq 0$, $y\geq 0$ に対して

$$xy \le \int_0^x \omega(\xi)d\xi + \int_0^y \mu(\eta)d\eta$$

が成立する.

演習問題 **2.4.1** p>1 とする. このとき x>0, y>0 に対して

$$xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

を示せ、ただし

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{a} = 1$$

である.

補題 2.4.2 f(x), g(x) を [a,b] 上の連続関数とする. このとき

$$\int_{a}^{b} |f(x)g(x)| dx \le \left(\int_{a}^{b} |f(x)|^{p} dx \right)^{1/p} \left(\int_{a}^{b} |g(x)|^{q} dx \right)^{1/q}$$

が成立する。 ただし、p>1 かつ

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

である.

補題 2.4.3 f(x), g(x) を [a,b] 上の連続関数とし、p>1 とする。このとき

$$\left(\int_{a}^{b} |f(x) + g(x)|^{p} dx\right)^{1/p} \le \left(\int_{a}^{b} |f(x)|^{p} dx\right)^{1/p} + \left(\int_{a}^{b} |g(x)|^{p} dx\right)^{1/p}$$

が成立する.

第3章 Taylor 展開

3.1 滑らかな関数

定義 3.1.1 f(x) は区間 I 上で定義された関数とし、 $a \in I$ とする。 f(x) が a で微分可能とは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が有限値で存在すること。この極限を f'(a) と書き,a における微分係数と呼ぶ。 f(x) が I で微分可能であるとは,f(x) が I の全ての点で微分可能となること。

演習問題 **3.1.1** f(x) は区間 I 上で定義された関数とし, $a \in I$ とする."f(x) が a で右から微分可能"を定義せよ.同様に"f(x) が a で左から微分可能"を定義せよ.

記号: f(x) は区間 I 上で定義された微分可能な関数とする.

$$\left\{ \begin{array}{l} I\ni x\mapsto f'(x)=\frac{d}{dx}f(x):f(x)\,\,\text{の 導関数} \\ I\ni x\mapsto (f'(x))'=f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x):f(x)\,\,\text{の二次導関数} \\ I\ni x\mapsto (f^{(n-1)}(x))'=f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x):f(x)\,\,\text{の n 次導関数} \end{array} \right.$$

定義 **3.1.2** f(x) が I で微分可能で f'(x) が I で連続なとき,f(x) を I で連続的微分可能,あるいは I で C^1 級であるという.

演習問題 **3.1.2** f(x) が I で 2 回連続的微分可能, であること $(C^2$ 級) を定義せよ. 一般に "f(x) が I で n 回連続的微分可能" (C^n) 級を定義せよ.

記号: I で n 回連続的微分可能な関数の全体を $C^n(I)$ で表わす.

定義 **3.1.3** すべての n, n=1,2,... に対して $f(x)\in C^n(I)$ となる関数を I で C^∞ 級という. I で C^∞ 級な関数の全体を $C^\infty(I)$ で表わす.

演習問題 3.1.3 多項式, $\sin x$, $\cos x$, e^x は $C^\infty(\mathbb{R})$ であることを示せ.

3.2 Lebesgue の定理*

定義 **3.2.1** $E \subset \mathbb{R}$ が零集合であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して高々可算個の開区間 I_n , n = 1, 2, ... があって次の条件を満たすときをいう。

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$$

ただし、 $|I_n|$ は区間 I_n の長さを表す.

定理 **3.2.1** f(x) を [a,b] 上で定義された単調関数とする.このときある零集合 $E \subset [a,b]$ があって f(x) は $x \in [a,b] \setminus E$ で微分可能である.

3.3 有限次 Taylor 展開

定理 3.3.1 $f(x) \in C^n(a,b) = C^n((a,b))$ とし、 $c \in (a,b)$ とする。このとき f(x) は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{(x-c)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(c+s(x-c)) ds$$

と表現できる. 右辺を f(x) の c を中心とする n 次 Taylor 展開という.

3.4 剰余項の他の表現

補題 **3.4.1** $f(x) \in C^0([a,b]), p(x) \in C^0([a,b]), p(x) \ge 0$ とする. このとき

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c)\int_a^b p(x)dx = f(a+\theta(b-a))\int_a^b p(x)dx$$

となる a < c < b および $0 < \theta < 1$ がある.

系 **3.4.1** $p(x) \equiv 1$ ととって

$$\int_{a}^{b} g(x)dx = (b-a)g(c)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{(x-c)^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(c+\theta(x-c))$$

と表現できる。ここで $0 < \theta < 1$ である (Cauchy の剰余).

Claim 3.4.2 $f(x) \in C^n(a,b)$ とし、 $c \in (a,b)$ とする. このとぎ f(x) は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n)}(c+\tilde{\theta}(x-c))$$

と表現できる. ここで $0 < \tilde{\theta} < 1$ である (Lagrange の剰余).

演習問題 **3.4.1** c=0 とし、剰余項を $R_n(x)$ とおく:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

ここで $R_n(x) \to 0, n \to \infty$ の場合になにがおこるか? なにが主張できるか.

演習問題 3.4.2 $f(x), g(x) \in C^n(a,b), (a,b) \ni 0$ でさらに

$$f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n - 1, f^{(n)}(0) = a \neq 0, \quad g^{(n)}(0) = b$$

とする. このとき

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

を求めよ.

演習問題 3.4.3

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{r^4}$$

を求めよ.

演習問題 3.4.4

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - ax - bx^3}{x^5}$$

が有限な確定値であるように a, b を定めよ.

第4章 無限級数

4.1 級数の収束 1

定義 **4.1.1** $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ を無限級数とする. このとき

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_n$$

とおいて $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在するとき $\sum_{k=0}^\infty a_n$ は収束するといい,その極限値を $\sum_{k=0}^\infty a_n$ の和といい

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n$$

とかく.

定理 4.1.1 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は

 $orall \epsilon>0, \exists N\in \quad s.t. \quad |a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n|<\epsilon, \quad \forall n>\forall m\geq N$ の成立することである。

演習問題 **4.1.1** 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であることを示せ、

定義 4.1.2 $\sum_{k=0}^{\infty}$ が正項級数とは $a_n \ge 0, n = 1, 2, ...$ であることをいう.

定理 4.1.2 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ を正項級数とする。 さらに有限個を除いて $a_k \leq Mb_k$ であるとする。ここで M は定数である。このとき

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=0}^{\infty} a_k & \text{が発散} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k & \text{は発散}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k & \text{が収束} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k & \text{は収束} \end{array} \right.$$

演習問題 4.1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \ge 2$$

は収束することを示せ.

演習問題 4.1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$$

は収束することを示せ.

定理 **4.1.3** 正項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$$

が存在するとき $\alpha < 1$ なら $\sum a_n$ は収束し, $\alpha > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

演習問題 4.1.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

は収束することを示せ.

4.2 級数の収束 2

定義 4.2.1 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束するとき $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束するという.

定理 **4.2.1** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束すれば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は収束する.

定理 **4.2.2** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束するとする。その和をそれぞれ a,b とする。このとき

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

を第n 項とする級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束し、その和c はab に等しい。

演習問題 4.2.1 |x| < 1 とする。このとき

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$
 は絶対収束する.

(2)
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$
 を示せ.

4.3 Fubini の定理*

定理 **4.3.1** $f_i(x)$, i=1,2,... を [a,b] 上で定義された単調増加(減少)関数の列とする。また

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

4.3. Fubini の定理 *

21

は $x \in [a,b]$ を固定するごとに収束するとする。このときある零集合 $E \subset [a,b]$ があって $x \in [a,b] \setminus E$ に対して各 $f_i(x)$ は微分可能でかつ

$$S'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$$

が成立する.

第5章 再び Taylor 展開

5.1 Taylor 展開

定理 **5.1.1** $f(x) \in C^{\infty}(a,b)$ とし、 $0 \in (a,b)$ とする。ある $C>0,\ M>0$ があって

$$|f^{(n)}(x)| \le CM^n, \quad \forall x \in (a,b)$$

とする. このとき f(x) は (a,b) の各点で次のように Taylor 展開できる

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

演習問題 5.1.1 B を定数とする.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{B^n}{n!} = 0$$

を示せ.

演習問題 **5.1.2** すべての $x \in \mathbb{R}$ で

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を示せ.

演習問題 5.1.3 |x| < 1/2 のとき

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

を示せ.

演習問題 5.1.4 すべての $x \in \mathbb{R}$ で

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

を示せ.

第6章 偏微分

6.1 \mathbb{R}^n の位相

定義 **6.1.1** n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ B_{\epsilon}(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < \epsilon \} \end{cases}$$

注意:慣れてきたら d(x,y) のかわりに |x-y| などと記そう.

定義 6.1.2

 $\left\{ \begin{array}{lll} M \subset \mathbb{R}^n & \text{が有界} \iff & \text{ある } R > 0 \text{ があって } M \subset B_R(0) \\ y & \text{が} & M & \text{の内点} \iff & \text{ある } \epsilon > 0 \text{ があって } B_\epsilon(y) \subset M \\ y & \text{が} & M & \text{の外点} \iff & \text{ある } \epsilon > 0 \text{ があって } B_\epsilon(y) \cap M = \emptyset \\ y & \text{が} & M & \text{の境界点} \iff & y & \text{が} & M & \text{の内点でも外点でもない} \\ M & \text{が開集合} \iff & M & \text{の点はすべて内点} \\ M & \text{が閉集合} \iff & M & \text{の境界点が} & M & \text{に含まれる} \end{array} \right.$

演習問題 6.1.1 ℝ2 で考える.

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$$
 は開集合である. なぜか? $\{(x,y) \mid x^2+y^2\leq 1\}$ は閉集合である. なぜか? $\{(x,1) \mid -1\leq x\leq 1\}$ は閉集合である. なぜか?

定義 6.1.3 \mathbb{R}^n の点列 $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ に対して

$$\begin{cases} \lim_{m \to \infty} P_m = Q \iff \lim_{m \to \infty} d(P_m, Q) = 0 \\ \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \text{ such that } m > N \implies d(P_m, Q) < \epsilon \end{cases}$$

注意: 慣れてきたら \mathbb{R}^n の点を x, y などで記そう.

定義 $6.1.4 \ f(x)$ は \mathbb{R}^n の部分集合 M で定義されているとしよう. $a \in M$ とする.

$$\begin{cases} \lim_{M\ni x\to a} f(x) = A \\ \iff \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } d(x,a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon \end{cases}$$

定義 $6.1.5 \ f(x)$ は \mathbb{R}^n の部分集合 M で定義されているとしよう. $a \in M$ とする. f(x) が a で連続であるとは

$$\lim_{M\ni x\to a} f(x) = f(a)$$

となることをいう.

定義 **6.1.6** M を \mathbb{R}^n の部分集合とし,f を M 上の関数とする.このとき f が M 上有界であるとは, $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ が有界集合であること.

6.2 コンパクト集合

定義 **6.2.1** \mathbb{R}^n の部分集合 K は、K の任意の点列が K の点に収束する部分列を含むとき、(点列) コンパクトであるという。

定理 **6.2.1** \mathbb{R}^n の部分集合 K に対し、次のことが成り立つ。

K は点列コンパクト \iff K は有界閉集合

補題 **6.2.1** K を \mathbb{R}^n の点列コンパクト集合, f は K 上の実数値連続関数とする. このとき, f(K) は点列コンパクトである. したがって特に, f は K 上有界である.

定理 6.2.2~K を \mathbb{R}^n の点列コンパクト集合, f は K 上の実数値連続関数とする. このとき f は K 上で最大値,最小値に達する.

6.3 ラージ O, スモール o

定義 6.3.1

$$\begin{split} f(x) &= o(g(x)) \; (x \to 0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \\ f(x) &= O(g(x)) \; (x \to 0) \Longleftrightarrow \text{ \& S } B, \delta \text{ hids of } \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq B, |\forall x| \leq \delta \end{split}$$

演習問題 6.3.1 次を示せ.

$$\sin x = O(x), \quad x \to 0, \quad \sin x - x = o(x), \quad x \to 0$$

$\mathbf{6.4}$ \mathbb{R}^n での微分の定義

以下しばらく \mathbb{R}^2 で考える.

QUESTION: f(x,y) の $(a,b) \in D$ での微分をどう定義するか?

- (1) f(x) の微分の定義の見直し(反省)
- (2) x あるいは y を固定して一変数の関数とみて微分する

補題 **6.4.1** y = f(x) が x = a で微分可能 \Longleftrightarrow

ある
$$A$$
 があって $f(a+h)-f(a)=Ah+o(h), h\to 0$

定義 **6.4.1** f(x,y) が (a,b) で微分可能とは A,B があって

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right), (h,k) \to (0,0)$$

の成立すること. (h,k) の関数 Ah + Bk を $df_{(a,b)}(h,k)$ で表わし, f(x,y) の (a,b) における (全) 微分という.

定義 6.4.2

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

が存在するとき、f(x,y) は (a,b) で x について偏微分可能といい、その極限値を f(x,y) の (a,b) での x に関する偏微分係数といい

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$
 \mathbb{Z} li $f_x(a,b)$

で表わす。

演習問題 **6.4.1** f(x,y) は (a,b) で y について偏微分可能であることを定義せよ.

演習問題 **6.4.2** $D \subset \mathbb{R}^2$ とする. f(x,y) が D で x (y) について偏微分可能であることを定義せよ.

定義 $\mathbf{6.4.3}$ f(x,y) は D で x (y) について偏微分可能であるとする.このとき

$$D \ni (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) (= f_x(x,y))$$

を f(x,y) の x に関する一次偏導関数という.

演習問題 6.4.3

- (1) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ とする. このとき $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.
- (2) $f(x,y) = \sin xy$ とする. このとき $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

定義 **6.4.4** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は D で x (y) について偏微分可能であるとする.このとき $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ の x (y) に関する偏導関数を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

で表わす

演習問題 **6.4.4** $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は D で x (y) について偏微分可能であるとする. このとき $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ の x (y) に関する偏導関数はどのように表わせばよいか?

定義 **6.4.5** $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を f(x,y) の二次偏導関数という.

定義 **6.4.6** f(x,y) が D で C^r 級 \iff f の r 次までの偏導関数が D で存在し、かつ連続、このとき

$$f(x,y) \in C^r(D)$$

と書く. 全ての自然数 n に対して D で C^n 級のとき, D で C^∞ 級という.

$$f(x,y) \in C^{\infty}(D)$$

と書く.

$\mathbf{6.5}$ \mathbb{R}^n での微分の定義 $\mathbf{2}$

定義 6.5.1 f(x), $x=(x_1,...,x_n)$ は \mathbb{R}^n のある開集合 D で定義されている とする. f(x) が $a=(a_1,...,a_n)\in D$ で微分可能とは $A=(A_1,...,A_n)\in \mathbb{R}^n$ があって

$$f(a+h) - f(a) = \langle A, h \rangle + o(|h|)$$

の成立すること、ただし $h=(h_1,...,h_n), a+h=(a_1+h_1,...,a_n+h_n)$

$$|h| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} h_j^2}, \quad \langle A, h \rangle = \sum_{j=1}^{n} A_j h_j$$

である. h の一次関数 $\langle A,h \rangle$ を $df_a(h)$ で表し, f(x) の a における微分という.

定義 **6.5.2** $e_j = (0,...,0,1,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ すなわち j 番目の成分のみ 1 で他は 0 とする.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

が存在するとき、f(x) は a で x_j について偏微分可能といい、この極限値を f(x) の a での x_j に関する偏微分係数といい、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$
 または $f_{x_j}(a)$

で表す.

演習問題 6.5.1 $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、f(x) = 1/|x| $(x \neq 0)$ とおく. このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

を求めよ.

演習問題 6.5.2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_j x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}$$

はどのように定義すればよいか.

演習問題 6.5.3 一般に

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$$

はどのように定義すればよいか.

演習問題 **6.5.4** $f(x) = 1/|x|, x \in \mathbb{R}^n$ のとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

を求めよ.

演習問題 **6.5.5** $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

とする. このとき

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

を求めよ.

演習問題 6.5.6~f(x) は開集合 $D\subset\mathbb{R}^n$ で定義されているとする。このとき f(x) が D で C^r 級であることを定義せよ。 C^∞ 級も定義せよ。

6.6 偏微分と微分の関係

定理 **6.6.1** $f(x,y) \in C^1(D)$ なら f(x,y) は D で微分可能で

$$f(x,y) - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + o\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$$

が成立.

定理 **6.6.2** $f(x) \in C^1(D)$ なら f(x) は D で微分可能で

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) + o(|x - a|)$$

が成立する.

定義 6.6.1

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

を grad f(x) で表し、f(x) の x での勾配とよぶ。

演習問題 **6.6.1** $f(x) = 1/|x|, x \in \mathbb{R}^n$ のとき $\operatorname{grad} f(x)$ を求めよ.

補題 **6.6.1** $f(x,y) \in C^1(D), \ (a,b) \in D$ とする.このとき $0 < \theta < 1$ があって

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h f_x(a+\theta h, b+k) + k f_y(a, b+\theta k)$$

が成立する.

演習問題 $6.6.2~f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}~$ とするとき、 $f_{xx},~f_{xy},~f_{yx},~f_{yy}~$ を求めよ。

定理 **6.6.3** $f(x,y) \in C^2(D)$ とする. このとき

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

である.

定理 **6.6.4** $f(x,y) \in C^r(D)$ とする. このとき r 次までの偏導関数は偏微分する順によらない.

定理 $6.6.5 \ f(x) \in C^r(D), D \subset \mathbb{R}^n$ とする.このとき r 次までの偏導関数は偏微分する順によらない.

6.7. 連鎖定理 31

6.7 連鎖定理

定理 **6.7.1** $f(x,y) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, x(t), $y(t) \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ とし, $t \in I$ のとき $(x(t),y(t)) \in D$ とする. このとき

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

とおくと $F(t) \in C^1(I)$ で

$$\frac{dF}{dt}(t) = F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

が成立する.

定理 **6.7.2** $f(x) \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n, x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)), x_i(t) \in C^1(I),$ $I \subset \mathbb{R}$ とし、 $t \in I$ のとき $x(t) \in D$ とする.このとき

$$F(t) = f(x(t))$$

とおくと $F(t) \in C^1(I)$ で

$$\frac{dF}{dt}(t) = F'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) \frac{dx_j}{dt}(t)$$

が成立する.

定理 6.7.3 $f(x,y)\in C^1(D),\ D\subset\mathbb{R}^2,\ \phi(u,v),\ \psi(u,v)\in C^1(\Omega),\ \Omega\subset\mathbb{R}^2$ とし、 $(u,v)\in\Omega$ のとき $(\phi(u,v),\psi(u,v))\in D$ とする。このとき

$$F(u,v) = f(\phi(u,v), \psi(u,v))$$

とおくと $F(u,v) \in C^1(\Omega)$ で

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = f_x(\phi(u,v),\psi(u,v))\phi_u(u,v) + f_y(\phi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)$$

が成立する.

演習問題 6.7.1

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$$

を求めよ.

定理 **6.7.4** $f(x_1,...,x_n) \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n, \phi_i(u_1,...,u_m) \in C^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^m, i=1,...,n$ とする。 さらに、 $u=(u_1,...,u_m) \in \Omega$ なら $(\phi_1(u),...,\phi_n(u)) \in D$ とする。このとき

$$F(u) = f(\phi_1(u), ..., \phi_n(u)) \in C^1(\Omega)$$

でさらに

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}(u) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi_1(u), ..., \phi_n(u)) \frac{\partial \phi_j}{\partial u_k}(u), \quad k = 1, ..., m$$

が成立する.

演習問題 **6.7.2** $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ とする。このとき、

$$f_x$$
, f_y , f_{xy} , f_{xx}

を求めよ.

演習問題 6.7.3 $f(x,y)\in C^2,\ g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とするとき, $g_r,g_{rr},\,g_{\theta\theta}$ を求め

$$g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$$

を求めよ.

演習問題 6.7.4

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{At}\right)$$

とする. このとき $f_t = f_{xx}$ となるように A を定めよ.

演習問題 6.7.5 $f(\xi,\eta)\in C^1$ とし, $g(x,y)=f(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$ とするとき

$$f_{\varepsilon}(\xi,\eta)^{2} + f_{\eta}(\xi,\eta)^{2} = q_{x}(x,y)^{2} + q_{y}(x,y)^{2}$$

である. ただし, θ は定数.

演習問題 **6.7.6** f(x) を $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ で C^1 級とする. 今 f(x) は次を満たすとする.

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^{\alpha} f(x_1, x_2, ..., x_n), \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

このとき

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n) = \alpha f(x_1, ..., x_n)$$

の成立することを示せ.

演習問題 6.7.7 h(x,y) を一回連続的微分可能な関数とし、

$$H(r, \theta) = h(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とおく. いま t の一回連続的微分可能な関数 x(t), y(t) $(x(t)^2 + y(t)^2 \neq 0)$ が次の関係式を満たすものとする.

$$\frac{d}{dt}x(t) = h_y(x(t), y(t)), \quad \frac{d}{dt}y(t) = -h_x(x(t), y(t))$$

このとき、 $x(t) = r(t)\cos\theta(t), y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ で定まる一回連続的微分可能な関数 r(t), $\theta(t)$ は次の関係式を満たすことを示せ.

$$\frac{d}{dt}r(t) = \frac{1}{r(t)}H_{\theta}(r(t), \theta(t)), \quad \frac{d}{dt}\theta(t) = -\frac{1}{r(t)}H_{r}(r(t), \theta(t))$$

ただし、 h_x , h_y は h(x,y) のそれぞれ x, y に関する偏導関数を表すものとし、 H_r , H_θ は $H(r,\theta)$ のそれぞれ r, θ に関する偏導関数を表すものとする.

6.8 Taylor 展開 1

定義 6.8.1 $f(x,y) \in C^n(D), (a,b) \in D \subset \mathbb{R}^2$ とする. このとき

$$d^{k} f_{(a,b)}(\xi,\eta) = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} \frac{\partial^{k} f}{\partial y^{j} \partial x^{i}}(a,b) \xi^{i} \eta^{j}$$

を f の (a,b) での k 次微分という $(0 \le k \le n)$.

定理 **6.8.1** $f(x,y) \in C^n(D)$, $(a,b) \in D$ とする. このとき

$$f(a+h,b+k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} d^j f_{(a,b)}(h,k) + \frac{1}{n!} d^n f_{(a+\theta h,b+\theta k)}(h,k)$$

が成立する.

演習問題 **6.8.1** $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$ とする. このとき $d^2f_{(0,0)}(\xi,\eta)$ を求めよ.

6.9 Taylor 展開 2

定義 6.9.1 $f(x_1,...,x_n)\in C^N(D),\ a=(a_1,...,a_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$ とする. このとき

$$d^{k} f_{(a)}(\xi_{1}, ..., \xi_{n}) = \sum_{i_{1} + \dots + i_{n} = k} \frac{k!}{i_{1}! i_{2}! \cdots i_{n}!} \frac{\partial^{k} f}{\partial x_{i_{1}} \cdots \partial x_{i_{n}}} (a) \xi_{1}^{i_{1}} \cdots \xi_{n}^{i_{n}}$$

を f の a での k 次微分という.

定理 **6.9.1** $f(x_1,...,x_n) \in C^N(D), \ a, \ a+h \in D$ とする。このとき

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} d^{k} f_{(a)}(h) + \frac{1}{N!} d^{N} f_{(a+\theta h)}(h)$$

となる $0 < \theta < 1$ が存在する.

演習問題 6.9.1 次を示せ.

$$d^k f_{(a)}(\xi) = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(a).$$

演習問題 6.9.2 次の函数の原点を中心とする Taylor 展開を求めよ.

$$\frac{1}{1 - x - y - xy}$$

$$(2) e^{x+y}$$

第7章 極値問題

7.1 極値問題

定義 **7.1.1** $D \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし, $f(x) = f(x_1, ..., x_n) \in C^2(D)$ とする. f が $a = (a_1, ...a_n) \in D$ で極大値(極小値)をとるとは \iff a を中心とするある球 $B_\delta(a)$ があって

$$x \in B_{\delta}(a) \cap D$$
 のとぎ $f(a) \ge f(x) (\le f(x))$

の成立することをいう。また f が $(a,b) \in D$ で狭義の極大値(狭義の極小値)をとるとは \iff a を中心とするある円 $B_{\delta}(a)$ があって

$$x \in B_{\delta} \cap D, \ x \neq a$$
 のとき $f(a) > f(x)(< f(x))$

の成立することをいう.

定義 7.1.2 $a \in D$ が f の停留点とは \Longleftrightarrow

$$df_{(a)} = 0 \iff f_{x_i}(a) = 0, \quad i = 1, ..., n$$

となることをいう.

補題 7.1.1 f(x) が a で極値をとるなら, a は f の停留点である.

演習問題 7.1.1 補題 7.1.1 を示せ.

7.2 二次形式

 \mathbb{R}^n 上の二次形式

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

を考える. $A=(a_{ij})$ を二次形式 Q(x) の表現(係数)行列という. Q(x)=(Ax,x) である. ただし $(x,y),x,y\in\mathbb{R}^n$ は通常の内積.

定義 **7.2.1** (1) すべての 0 でない $x \in \mathbb{R}^n$ に対して Q(x) > 0 となるとき, Q は正定値であるという.

- (2) すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $Q(x) \ge 0$ となるとき,Q は非負定値であるという.
- (3) ある $x, y \in \mathbb{R}^n$ があって Q(x) > 0 > Q(y) となるとき,Q は不定符合 という.
- (4) $\det B \neq 0$ のとき Q を正則という.

演習問題 **7.2.1** Q(x) = (Ax, x) を二次形式とする.このとき x が停留点であることと Ax = 0 は同値であることを示せ.

演習問題 7.2.2 負定値、非正定値を定義せよ、

定理 7.2.1 \mathbb{R}^n 上の二次形式 Q(x)=(Ax,x) に対して,n 次直交行列 U があって $y=U^{-1}x$ と置くとき

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$

が成立する. λ_k , k=1,...,n は A の固有値である.

演習問題 **7.2.3** 定理 7.2.1 で $U = (u_1, ..., u_n), u_i$ は列ベクトル, とかくとき,

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, ..., n$$

であることを示せ.

定理 7.2.2 \mathbb{R}^n 上の二次形式 Q(x) = (Ax, x) に対して次は互いに同値である.

- (1) x = 0 で Q(x) は狭義の最小値 0 をとる.
- (2) Q は正値である.
- (3) A の固有値はすべて正である.
- (4) A のすべての主小行列式 D_k は正である:すなわち

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad 1 \le k \le n$$

定理 7.2.3 \mathbb{R}^n 上の二次形式 Q(x)=(Ax,x) に対して次は互いに同値である.

(1) x = 0 で Q(x) は狭義の最大値 0 をとる.

7.2. 二次形式 37

- (2) Q は負値である.
- (3) A の固有値はすべて負である.
- (4) A のすべての主小行列式 D_k は次を満たす.

$$(-1)^k D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad 1 \le k \le n$$

演習問題 **7.2.4** 二次形式 $x^2 + y^2 + z^2 + 2a(xy + yz + zx)$ が正定値となるような実数 a の範囲を求めよ.

演習問題 7.2.5 定理 7.2.3 を示せ.

定理 **7.2.4** \mathbb{R}^n の開集合 D で定義された C^2 級の実数値函数 f(x) が $a \in D$ で $df_a = 0$ を満たすとき次が成立する.

- (1) d^2f_a が正定値ならば a は f の狭義の極小点である.
- (2) $d^2 f_a$ が負定値ならば a は f の狭義の極大点である.
- (3) $d^2 f_a$ が不定符号ならば a は f の峠点で極値点ではない.

系 7.2.1 \mathbb{R}^n の開集合 D で定義された C^2 級の実数値函数 f(x) が $a\in D$ で $df_a=0$ を満たすする. $D_k(x)$ を次で定義する.

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_k}(x) \\ & \cdots & & \\ f_{x_k x_1}(x) & \cdots & f_{x_k x_k}(x) \end{vmatrix}, \quad 1 \le k \le n$$

このとき次が成立する.

- (1) $D_k(a) > 0$, $1 \le k \le n$ ならば a は f の狭義極小点である.
- $(2) (-1)^k D_k(a) > 0, 1 < k < n$ ならば a は f の狭義極大点である.
- (3) $D_n(a) \neq 0$ で (1), (2) 以外なら f は a で極値をとらない.

定理 7.2.5 $D \subset \mathbb{R}^2$ で $f(x,y) \in C^2(D)$ とし、 $(a,b) \in D$ とする. このとき

(1)
$$f_{xx}(a,b) > 0$$
, $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$
⇒ f は (a,b) で狭義の極小

(2)
$$f_{xx}(a,b) < 0$$
, $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$
⇒ f は (a,b) で狭義の極大

(3)
$$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$$

$$\implies f \ \text{は} \ (a,b) \ \text{で極大にも極小にもならない}$$

演習問題 7.2.6 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ とする. f が極値をとる点、および極値を求めよ.

演習問題 7.2.7 次の関数の極値を求めよ.

$$(x+y)(x^2+y^2-6)$$

演習問題 7.2.8 次の関数の極値を求めよ.

$$(x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

第8章 陰関数

8.1 陰関数

定理 **8.1.1** $F(x,y) \in C^1(D)$, $(a,b) \in D$ で F(a,b) = 0 とする.このとき $F_y(a,b) \neq 0$ ならば x = a の近くで定義された C^1 級関数 f(x) で

$$f(a) = b, \quad F(x, f(x)) = 0$$

を満たすものが唯一つある。更に

$$f'(x) = \frac{-F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

である.

基本モデル:F(x,y)=ax+by とする。もし $b=F_y\neq 0$ ならば ax+by=0 は y について解け,y=-ax/b で 明らかに F(x,-ax/b)=0

定理 8.1.2 \mathbb{R}^{n+1} の開集合 U で定義された実数値 C^1 級函数 $F(x,y)=F(x_1,...,x_n,y)$ が、一点 $(a,b)=(a_1,...,a_n,b)\in U$ で

$$F(a,b) = 0, \quad F_y(a,b) \neq 0$$

を満たしているとする.このとき x=a を含む開集合 V と V 上の C^1 級函数 f(x) で

$$F(x, f(x)) = 0, \quad f(a) = b$$

を満たすものがただ一つ存在する。さらに

$$f_{x_i}(x) = \frac{-F_{x_i}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad i = 1, ..., n$$

が成立する. さらに $F(x,y) \in C^r(U)$ ならば f(x) も C^r 級である.

定義 8.1.1 $F(x,y), G(x,y) \in C^1(\Omega)$ とする。このとき

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{D(F,G)}{D(x,y)}(x,y)$$

を F, G の x, y に関する関数行列という。また

$$\det \left(\begin{array}{cc} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{array} \right) = \frac{\partial (F,G)}{\partial (x,y)} (x,y)$$

を F, G の x, y に関する関数行列式という.

定理 8.1.3 F(x,y,z), $G(x,y,z) \in C^1(\Omega)$ かつ F(a,b,c) = G(a,b,c) = 0 で

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(a,b,c) \neq 0$$

とする. このとき a の近くで定義された C^1 級関数 $\phi(x)$, $\psi(x)$ で

$$\phi(a) = b, \ \psi(a) = c, \ F(x, \phi(x), \psi(x)) = 0, \ G(x, \phi(x), \psi(x)) = 0$$

を満たすものが唯一組存在する.

演習問題 **8.1.1** F(x,y,z), G(x,y,z) のとき

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(x,y,z), \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x,y,z)$$

の定義を与えよ.

モデル:連立一次方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,y,z) = ax + by + cz = 0 \\ G(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{array} \right.$$

を考える.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(0,0,0) = b\gamma - c\beta = \Delta \neq 0$$

とすると

$$\begin{cases} by + cz = -ax \\ \beta y + \gamma z = -\alpha x \end{cases}$$

が解けて

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -\triangle^{-1}(\gamma a - c\alpha)x \\ z = -\triangle^{-1}(-\beta a + b\alpha)x. \end{array} \right.$$

演習問題 **8.1.2** $F(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ の定める陰関数 f(x) の極値を求めよ.

定義 8.1.2 $F_i(x,y)=F_i(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m),\ i=1,...,m$ を C^1 級函数とする。このとき

$$\begin{bmatrix} F_{1,y_1}(x,y) & F_{1,y_2}(x,y) & \cdots & F_{1,y_m}(x,y) \\ F_{2,y_1}(x,y) & F_{2,y_2}(x,y) & \cdots & F_{2,y_m}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m,y_1}(x,y) & F_{m,y_2}(x,y) & \cdots & F_{m,y_m}(x,y) \end{bmatrix} = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}(x,y)$$

8.2. 逆函数定理

41

を $F_1(x,y),...,F_m(x,y)$ の $y_1,...,y_m$ に関する函数行列という。また

$$\det \begin{bmatrix} F_{1,y_1}(x,y) & F_{1,y_2}(x,y) & \cdots & F_{1,y_m}(x,y) \\ F_{2,y_1}(x,y) & F_{2,y_2}(x,y) & \cdots & F_{2,y_m}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{m,y_1}(x,y) & F_{m,y_2}(x,y) & \cdots & F_{m,y_m}(x,y) \end{bmatrix} = \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} (x,y)$$

を $F_1(x,y),...,F_m(x,y)$ の $y_1,...,y_m$ に関する函数行列式という.

定理 8.1.4 U を \mathbb{R}^{n+m} の開集合とし, $F_1(x,y),...,F_m(x,y)$ を U 上の C^1 級函数とし,さらに一点 $(a,b)=(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m)\in U$ で

$$F_i(a,b) = 0, \quad i = 1, ..., m, \quad \frac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(y_1, ..., y_m)}(a,b) \neq 0$$

とする.このとき,x=a の開近傍 V と $f_i(x) \in C^1(V)$,i=1,...,m で次を満たすものがただ一組存在する.

$$f_i(a,b)=0, \quad i=1,...,m, \quad F_i(x,f_1(x),...,f_m(x))=0, \quad i=1,...,m.$$
 さらに

$$\frac{D(f_1, ..., f_m)}{D(x_1, ..., x_n)}(x) = \left(\frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(x_1, ..., x_n)}(x, f(x))$$

が成立する.

演習問題 8.1.3

$$\frac{D(f_1, ..., f_m)}{D(x_1, ..., x_n)}(x), \quad \frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(x_1, ..., x_n)}(x, y)$$

を定義せよ.

8.2 逆函数定理

定理 8.2.1 $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし、 $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \in C^1(U)$ とする. さらに $a \in U$ で

$$\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(a) \neq 0$$

とする。このとき b=f(a) の開近傍 W と $g(y)=(g_1(y),...,g_n(y))\in C^1(W)$ および a の開近傍 V があって

$$f(g(y)) = y, y \in W, \quad g(f(x)) = x, x \in V$$

が成立する. x = g(y) を f の逆函数という. また $y = f(x), x \in V$ に対して

$$\frac{D(g_1, ..., g_n)}{D(y_1, ..., y_n)}(y) = \left(\frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(x_1, ..., x_n)}(x)\right)^{-1}.$$

が成立する. また $f(x) \in C^r(U)$ ならば $g(y) \in C^r(W)$ である.

演習問題 8.2.1 $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, \theta)}$$

を求めよ.

演習問題 8.2.2 $f(x)=(f_1(x),...,f_n(x))\in C^1(V)$ と $g(y)=(g_1(y),...,g_n(y))\in C^1(W)$ が

$$f(g(y)) = y, \quad y \in W$$

を満たしているとき

$$\frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(x_1, ..., x_n)}(x) \neq 0, \quad x = g(y), \ y \in W$$

であることを示せ.

第9章 条件付極值問題

9.1 条件付極値

補題 **9.1.1** $f(x,y), g(x,y) \in C^1$ とし、f(x,y) = 0 の下で g(x,y) が (a,b) で極値をとるとする.このとき、 $df_{(a,b)} \neq 0$ ならば

$$dg_{(a,b)} = \lambda df_{(a,b)}$$

となる λ がある.

補題 $\mathbf{9.1.2}$ U は \mathbb{R}^n の開集合で,f(x) は U 上で定義された実数値 C^1 函数,また $g(x)=(g_1(x),...,g_m(x))\in C^1(U)$ は \mathbb{R}^m ー値 C^1 函数とする.いま (1) f が $a\in S=\{x\in U\mid g(x)=0\}$ で S 上の極値をとり

(2)

$$\operatorname{rank} \frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) = m$$

が成立しているとする.このとき $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m$ があって

$$df_a(a) = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \frac{D(g_1, ..., g_m)}{D(x_1, ..., x_n)}(a)$$

が成立する。

定理 g.1.1 $f(x,y), g(x,y) \in C^1$ とする. f(x,y) = 0 の下で g(x,y) が (a,b) で極値をとると仮定する. いま

$$F(x, y, \lambda) = g(x, y) - \lambda f(x, y)$$

とおく. このとき次のいずれかが成立する.

$$df_{(a,b)}=0$$
 または $dF_{(a,b,\lambda)}=0$ となる λ がある.

定理 9.1.2~U は \mathbb{R}^n の開集合で,f(x) は U 上で定義された実数値 C^1 函数,また $g(x)=(g_1(x),...,g_m(x))\in C^1(U)$ は \mathbb{R}^m ー値 C^1 函数とする.いま f が $a\in S=\{x\in U\mid g(x)=0\}$ で S 上の極値をとるとする.このとき,次のいずれかが成立する.

(1) $U \times \mathbb{R}^m$ 上の函数 $\Phi(x,\lambda) = f(x) - (\lambda,g(x))$ に対し、ある $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ が存在して

$$d\Phi_{(a,\lambda_0)} = 0$$

が成立する. 即ち, (a, λ_0) は Φ の停留点である.

(2)

$$rank \frac{D(g_1, ..., g_m)}{D(x_1, ..., x_n)}(a) < m$$

演習問題 9.1.1 $x^2+y^2=1$ の下で $x^2+2xy+y^2$ の極値、および極値をとる点を求めよ。

演習問題 9.1.2 $x^2 + y^2 = 1$ の下で $ax^2 + by^2$ の極小値および極大値をとる点を求めよ.

演習問題 9.1.3 $x^2 + y^2 = 1$ の下で

$$x^2 - \frac{(x-y)^2}{2}$$

の最大値,最小値を求めよ.

演習問題 9.1.4 a_i , i=1,...,p は $a_1+a_2+\cdots+a_p=1$ を満たす実数, r_i , i=1,...,p は正の定数とする. このとき, 任意の実数 x_i , i=1,...,p に対して

$$4\left|\sum_{i=1}^{p} a_i r_i x_i\right|^2 \le \delta \sum_{i=1}^{p} r_i x_i^2$$

が成立するならば、 a_i によらず

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{r_i} \ge \delta^{-1}$$

であることを示せ.

第10章 積分

10.1 積分の naive な定義

定義 **10.1.1** f(x) を I = [a,b] 上の関数とする.

$$\Delta: a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b$$

を I の分割とする. このとき、分割 Δ に関する Riemann 和 $s(f;\Delta)$ を

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定義する。ただし、 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ である。いま $d(\Delta)$ で各小区間 $[x_{i-1},x_i]$ の長さの最大値をあらわすことにして、

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f;\Delta)$$

が代表点 $\{\xi_i\}$ のとり方によらず、一定の極限値に収束するとき、f(x) は I 上で積分可能といい、その極限値を

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

と記し、I 上の f(x) の積分という.

定義 10.1.2

 $\Delta' : a = x'_0 \le x'_1 \le \dots \le x'_m = b, \quad \Delta : a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b$

を区間 I=[a,b] の二つの分割とする.このとき Δ' が Δ の細分であるとは

$$\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$$

の成立することをいう.

10.2 定義の反省

定義 10.2.1 f(x) を I = [a,b] 上の有界関数とする.

$$\Delta: a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b$$

を I の分割とする. このとき,

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

を不足和といい

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

を過剰和という. ただし

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

である. さらに

$$S = \inf_{\Delta} S(\Delta)$$

を上積分といい

$$s = \sup_{\Delta} s(\Delta)$$

を下積分という。ここで Δ はすべての分割を動く。

演習問題 10.2.1 $\{S(\Delta); \Delta\}$ は上に有界であることを確かめよ.

補題 10.2.1 Δ' を Δ の細分とすると

$$S(\Delta) > S(\Delta') > s(\Delta') > s(\Delta)$$

が成立する.

補題 10.2.2 $S \ge s$ である.

演習問題 10.2.2 補題 1.2.1 を示せ.

定義 10.2.2

$$\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx, \quad \int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

と定義する.

定理 10.2.1 (Darboux) Δ_h を分割の列とする。このとき

$$\lim_{d(\Delta_h)\to 0} S(\Delta_h) = S, \quad \lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$$

である.

演習問題 10.2.3 $\lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$ を示せ.

10.3 可積分性の判定

定理 10.3.1 次の3つは同値.

- (1) f(x) は I = [a, b] で可積分
- (2) S = s
- (3) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ such that }$

$$\sum_{i} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon \quad if \quad d(\Delta) < \delta$$

演習問題 10.3.1 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 2, & x \ge 1 \end{cases}$$

は [0,2] 上可積分であることを示せ.

定義 10.3.1 f(x) は区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数とする。任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ があって

$$x, y \in I, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

の成立するとき、f(x) は I 上一様連続であるという.

演習問題 **10.3.2** f(x) = 1/x は (0,1] 上一様連続か?

定理 **10.3.2** I = [a, b] を有界閉区間, f(x) を I 上の連続関数とする. このとき f(x) は I 上可積分である.

演習問題 **10.3.3** f(x) は [a,b] 上で可積分とする. $[c,d] \subset [a,b]$ とするとき, f(x) は [c,d] 上で可積分であることを示せ.

演習問題 10.3.4 f(x) は I 上の有界関数とする.

 $(1) \ |f(x) - f(y)| \leq a$ がすべての $x,y \in I$ に対して成り立っているとする. このとき

$$\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) \le a$$

であることを示せ、

 $(2) |f(x) - f(y)| \le \sup_I f(x) - \inf_I f(x)$ を示せ.

演習問題 10.3.5 f(x) は I 上可積分とする. このとき |f(x)| も I 上可積分であることを示せ.

命題 10.3.1 f(x), g(x) は区間 I 上の有界な可積分関数とする。このとき

(1) Af(x) + Bg(x) は I 上可積分で

$$\int_{a}^{b} \left(Af(x) + Bg(x) \right) dx = A \int_{a}^{b} f(x) dx + B \int_{a}^{b} g(x) dx$$

(2) α , β , $\gamma \in [a,b]$ とするとき

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \ge \int_{a}^{b} g(x)dx$$

さらに $f(x), g(x) \in C^0([a,b])$ ならば等号は $f(x) \equiv g(x)$ のときに限り成立する.

(4)

$$\left| \int_{a}^{b} f(x) dx \right| \le \left| \int_{a}^{b} |f(x)| dx \right|$$

が成立する.

(5) f(x)g(x) は I 上可積分である.

演習問題 10.3.6 命題 1.3.1 を示せ.

10.4 基本定理

定理 **10.4.1** f(x), $\phi(x) \in C^0([a,b])$ かつ $\phi(x) \ge 0$ とする. このとき

$$\int_{a}^{b} f(x)\phi(x)dx = f(\xi) \int_{a}^{b} \phi(x)dx$$

となる $a < \xi < b$ が存在する.

定理 10.4.2 $f(x) \in C^0([a,b])$ とし、 $c \in [a,b]$ とする。このとき

$$\frac{d}{dx} \int_{c}^{x} f(t)dt = f(x), \quad x \in (a, b)$$

が成立する.

定理 **10.4.3** $F(x) \in C^1([a,b])$ とするとき

$$\int_{a}^{b} F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

である.

定理 10.4.4

(1) $f(x) \in C^0([a,b])$, $\phi(t) \in C^1([\alpha,\beta])$ かつ $\phi(t) \in [a,b]$, $t \in [\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ とすると

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

 $(2) f(x), g(x) \in C^1([a,b])$ とすると

$$\int_{a}^{b} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_{a}^{b} f'(x)g(x)dx$$

演習問題 10.4.1 $f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ とし,c,d は定数とする.このとき

$$\int_{c\alpha+d}^{c\beta+d} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(ct+d)dt$$

を示せ.

演習問題 10.4.2

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta, \quad n \in \mathbb{N}$$

を求めよ.

10.5 不定積分の計算

命題 10.5.1 f,g は実係数多項式で、 $\deg g < \deg f$ とし、実係数の有理関数 R(x) = g(x)/f(x) を考える。f(x) の相異なる実根を a_j 、 $(1 \le j \le k)$ 、 a_j の 重複度を m_j 、また相異なる虚根を $\alpha_j \pm i\beta_j$ $(1 \le j \le \ell, \beta_j \ne 0)$ 、その重複度 を n_j とする。このとき R(x) は

$$R(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{m_j} \frac{c_{jm}}{(x - a_j)^m} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{m=1}^{n_j} \frac{d_{jm}x + e_{jm}}{\{(x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\}^m}$$

と表される.

命題 10.5.2 $n \ge 1$ を自然数, $a, b \in \mathbb{R}, b \ne 0$ のとき, 次が成立する.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}, & n > 1\\ \log |x-a|, & n = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+b^2)^n} = \begin{cases} \frac{-1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}}, & n > 1\\ \frac{1}{2} \log(x^2+b^2), & n = 1 \end{cases}$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^n} = \begin{cases} \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{x}{(2n-2)(x^2+b^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \right\}, & n > 1, \\ \frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b}, & n = 1 \end{cases}$$

定理 **10.5.1** 有理関数の不定積分は有理関数,対数関数,逆正接関数で表される.

演習問題 10.5.1 次の関数の原始関数を求めよ.

$$(i) \quad \frac{1}{x^3 - x}$$

(ii)
$$\frac{1}{x^2 - a^2}$$
, $a \neq 0$

(iii)
$$\frac{3x^2 - 3x - 9}{(x+2)(x-1)^2}$$

定理 10.5.2 R(z,w) を (z,w) の有理式とする。このとき $an rac{x}{2} = t$ とおくと

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

が成立する。すなわち三角関数の有理式の不定積分は,有理関数の不定積分 に帰着される。

演習問題 10.5.2 次の関数の原始関数を求めよ.

- (i) $\frac{1}{\sin x}$
- (ii) $\frac{1}{\cos x}$
- (iii) $\frac{1}{\cos^2 x}$

10.6 広義積分

補題 10.6.1 F(x) は [a,b) 上で定義されているとする.

$$\lim_{x \to b} F(x)$$

が存在するための必要十分条件は

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad b - \delta < x, y < \delta \Longrightarrow |F(x) - F(y)| < \epsilon$$

の成立することである.

補題 10.6.2 F(x) は $[a,\infty)$ 上で定義されているとする.

$$\lim_{x \to \infty} F(x)$$

が存在するための必要十分条件は

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \quad s.t. \quad x, y > M \Longrightarrow |F(x) - F(y)| < \epsilon$$

の成立することである.

10.6. 広義積分

演習問題 10.6.1 F(x) は [a,b) 上で定義されているとする.

$$\lim_{x \to b} F(x)$$

51

が存在するための必要十分条件は $a_n \to b$, $a_n < b$ なる任意の点列 $\{a_n\}$ に対して $\{F(a_n)\}$ が Cauchy 列になることである.

演習問題 10.6.2 F(x) は $[a,\infty)$ 上で定義されているとする.

$$\lim_{x \to \infty} F(x)$$

が存在するための必要十分条件は $a_n \to \infty$ なる任意の点列 $\{a_n\}$ に対して $\{F(a_n)\}$ が Cauchy 列になることである.

定義 10.6.1 (有界でない関数) $f(x) \in C^0([a,b))$ とする. このとき

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、f(x) の [a,b) での広義積分は収束するという。極限値を

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \quad or \quad \int_{a}^{b} f(x)dx$$

と記す.

定義 10.6.2 (有界でない区間) $f(x) \in C^0([a,\infty))$ とする. このとき

$$\lim_{M \to \infty} \int_{a}^{M} f(x) dx$$

が存在するとき、f(x) の $[a,\infty)$ での広義積分は収束するといい、極限値を

$$\int_{a}^{-\infty} f(x)dx \quad or \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

で表わす

演習問題 10.6.3 $f(x) \in C^0((a,b])$ とする. このとき広義積分

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx$$

を定義せよ.

演習問題 10.6.4 $0 < \alpha < 1$ とする。このとき、広義積分

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

は収束することを示し、その値を求めよ.

演習問題 10.6.5 $\alpha > 1$ とする。このとき、広義積分

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

は収束することを示し、その値を求めよ.

定理 10.6.1 $f(x) \in C^0((a,b])$ とする. 今 $\delta > 0$, $\alpha < 1$, M > 0 があって

$$|f(x)| \le M \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}, \quad a < x < a + \delta$$

が成立するとする. このとき f(x) の (a,b] 上の広義積分は収束する.

定理 10.6.2 $f(x) \in C^0([a,\infty))$ とする. 今 $B>0,\ \alpha>1,\ M>0$ があって

$$|f(x)| \le M \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x \ge B$$

が成立するとする. このとき f(x) の $[a,\infty)$ 上の広義積分は収束する.

演習問題 10.6.6 広義積分

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$$

の値を求めよ.

演習問題 10.6.7 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx$$

は収束することを示せ.

演習問題 10.6.8 広義積分

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

はx > 0 で収束することを示し、かつ

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \qquad (x > 1)$$

を示せ.

演習問題 10.6.9

$$\int_{1}^{\infty} x^{2} \sin x^{4} dx$$

は収束することを示せ.

定理 **10.6.3** (*) $\phi(x) \in C^1([a,\infty))$ は単調減少かつ $\phi(x) \to 0, x \to \infty$ であるとする. さらに

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

は有界であるとする。このとき

$$\int_{a}^{\infty} \phi(x) f(x) dx$$

は収束する.

10.7 有界変動関数*

定義 10.7.1 f(x) は [a,b] 上の関数とする. ある M>0 があって任意の分割

$$\Delta: a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b$$

に対して

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le M$$

が成立するとき f(x) は [a,b] 上で有界変動という。また

$$V = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

を f(x) の [a,b] 上での総変動量という. 詳しく V([a,b];f) と書こう.

補題 10.7.1 $a \le c \le b$ とする. このとき

$$V([a, c]; f) + V([c, a]; f) = V([a, b]; f)$$

である.

定義 10.7.2 f(x) は [a,b] 上で有界変動関数とする。このとき

$$V = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \max \{ f(x_i) - f(x_{i-1}), 0 \}$$

を f(x) の [a,b] 上の正の変動量という.

演習問題 10.7.1 負の変動量を定義せよ.

演習問題 10.7.2 [a,x] 上の正の変動量を P(x) で負の変動量を N(x) であらわすとき

$$V([a, x]; f) = V(x) = P(x) - N(x)$$

である.

定理 **10.7.1** 任 意の有界変動関数は二つの単調増加関数の差としてあらわされる.

演習問題 10.7.3 f(x) は $x=x_0$ で連続とする. このとき P(x), N(x) も x_0 で連続である.

10.8 Stieltjes 積分*

定義 **10.8.1** f(x) は [a,b] 上の関数,また $\phi(x)$ は [a,b] 上の有界変動関数 とする.いま分割 $\Delta: a=x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n=b$ に対して

$$s(\Delta; \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))$$

とおく、ただし $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ である、いま $d(\Delta) \to 0$ とするとき、代表点 $\{\xi_i\}$ の選び方によらず $s(\Delta; \{\xi_i\})$ が一定の極限値に収束するとき、f(x) は $d\phi(x)$ に関して Stieltjes 積分可能といい、この極限を

$$\int_{a}^{b} f(x)d\phi(x)$$

であらわす.

定理 10.8.1 $\phi(x)$ は [a,b] 上有界変動とする。このとき $f(x) \in C^0([a,b])$ は $d\phi$ に関してスチュルチュス積分可能である。

定理 10.8.2 $\phi(x)$ は [a,b] 上有界変動,また $f(x) \in C^1([a,b])$ とする.この とき

$$\int_{a}^{b} f(x)d\phi(x) + \int_{a}^{b} \phi(x)df(x) = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a)$$

が成立する.

第11章 重積分

11.1 目的

重積分の定義, 累次積分, 積分の変数変換

重積分の定義: $\sum f(P_i)S_i$

問題点:

- (1) S_i はどう定義するか?
- (2) 分割の仕方によらないか?

累次積分

具体的にはどのようにして

$$\int \int f(x,y)dxdy$$

を求めるか?

積分の変数変換

$$\int \int_{\Phi(D)} f(u,v) du dv = \int \int_{D} f(u(x,y)v(x,y)) \left| \frac{J(u,v)}{J(x,y)} \right| dx dy$$

11.2 重積分の naive な定義

定義 11.2.1 f(x,y) を $I = [a,b] \times [c,d]$ 上の関数とする.

$$\Delta : a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b, \ c = y_0 \le y_1 \le \dots \le y_m = d$$

を I の分割とする。このとき、分割 Δ に関する Riemann 和 $s(f:\Delta)$ を

$$\sum_{i,j} f(P_{ij})|I_{ij}|$$

で定義する。ただし, $P_{ij}\in I_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ である。また $|I_{ij}|=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ である。いま $d(\Delta)$ で各小区間 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ の対角線の長さの最大値をあらわすことにして,

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f:\Delta)$$

が代表点 $\{P_{ij}\}$ のとり方によらず、一定の極限値に収束するとき、f は I 上で積分可能といい、その極限値を

$$\int \int_{I} f(x,y) dx dy$$

と記し、I上の f の二重積分という.

定義 11.2.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ とし、f(x,y) は D 上で定義された関数とする。いま $D \subset I$ なる区間を一つとる。

$$\bar{f}(x,y) = f(x,y) \quad (x,y) \in D0 \qquad (x,y) \notin D$$

で $\bar{f}(x,y)$ を定義する。このとき, \bar{f} が I 上で可積分のとき f は D 上で可積分といい,

$$\int \int_D f(x,y) dx dy \quad \stackrel{*}{\sim} \quad \int \int_I \bar{f}(x,y) dx dy$$

で定義する.

演習問題 11.2.1 定義は I のとりかたによらない.

11.3 定義の反省

定義 11.3.1 f(x,y) を $I = [a,b] \times [c,d]$ 上の関数とする.

$$\Delta : a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_n = b, \ c = y_0 \le y_1 \le \dots \le y_m = d$$

を I の分割とする. このとき,

$$s(\Delta) = \sum_{ij} m_{ij} |I_{ij}|$$

を不足和といい

$$S(\Delta) = \sum_{ij} M_{ij} |I_{ij}|$$

を過剰和という. ただし

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y), \ M_{ij} = \sup_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y)$$

である. さらに

$$S = \inf_{\Delta} S(\Delta)$$

を上積分といい

$$s = \sup_{\Delta} s(\Delta)$$

を下積分という.

補題 11.3.1 $S \ge s$ である.

注意:

$$S \geq$$
 期待される $\int_I f(x,y) dx dy \geq s$

である.

定義 11.3.2 S = s のとき f(x,y) は I 上で積分可能といい,

$$\int \int_{I} f(x, y) dx dy = s = S$$

と定義する.

定理 11.3.1 (Darboux) Δ_h を分割の列とする。このとき

$$\lim_{d(\Delta_h)\to 0} S(\Delta_h) = S, \quad \lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$$

である.

演習問題 11.3.1 $\lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$ を示せ.

11.4 可積分性の判定

定理 11.4.1 次の3つは同値.

- (1) f(x,y) は I で可積分
- (2) S = s
- (3) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ such that }$

$$\sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij})|I_{ij}| < \epsilon \quad if \quad d(\Delta) < \delta$$

定義 11.4.1 f(x,y) は集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ があって

$$(x,y), (\xi,\eta) \in E, \|(x,y) - (\xi,\eta)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \epsilon$$

の成立するとき、f(x,y) は E 上一様連続であるという.

定理 11.4.2 I を有界閉区間, f(x,y) を I 上の連続関数とする。このとき f(x,y) は I 上可積分である。

命題 11.4.1 f(x,y), g(x,y) は区間 I 上の有界な可積分関数とする。このとき f(x,y)+g(x,y), f(x,y)g(x,y) は I 上可積分である。

演習問題 11.4.1 命題 11.4.1 を示せ.

11.5 面積

定義 11.5.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする。このとき

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$$

とおき $\chi_A(x,y)$ を A の特性関数という. χ_A が I $(A \subset I)$ で可積分のとき A を可測集合といい、A の面積を

$$|A| = \int \int_{I} \chi_{A}(x, y) dx dy$$

で定義する.

定義 $11.5.2~A\subset\mathbb{R}^2$ が測度 0 であるとは任意の $\epsilon>0$ に対して次の条件を満たす有限個の区間 $I_1,...,I_p$ が存在すること:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{p} I_i, \quad \sum_{i=1}^{p} |I_i| \le \epsilon$$

補題 11.5.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合,また bA で A の境界を表わすものとする. このとき

$$A$$
 は可測 $\Longleftrightarrow bA$ が測度 0

である.

演習問題 **11.5.1** $A = \{(x,0) \mid 0 \le x \le 1\}$ は測度 0 であることを示せ.

演習問題 **11.5.2** $\phi(x) \in C^1([a,b])$ とする。このとき

$$A = \{(x, \phi(x)) \mid a \le x \le b\}$$

は測度0であることを示せ.

命題 11.5.1 A, B を有界可測集合とする。このとき $A \cap B$, $A \cup B$ も可測である。

演習問題 11.5.3 命題 11.5.1 を示せ.

演習問題 **11.5.4** A_i , i=1,...,N を有界可測集合とする. このとき

$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{N} A_i$$

も可測集合であることを示せ.

11.6. 累次積分 59

命題 11.5.2 f(x,y) は可測集合 A,B 上で可積分とする。 このとき f(x,y) は $A\cup B,A\cap B$ 上可積分で

$$\int \int_{A \cup B} f(x, y) dx dy = \int \int_{A} f(x, y) dx dy + \int \int_{B} f(x, y) dx dy - \int \int_{A \cap B} f(x, y) dx dy$$

が成立する。また f(x,y) が $A \cup B$ 上で可積分,A,B は可測集合とすると f(x,y) は A および B 上で可積分で上式が成立する。

補題 11.5.2 f(x,y) は有界とし、A を面積 θ とする。このとき

$$\int \int_{A} f(x,y) dx dy = 0$$

である.

演習問題 11.5.5 命題 11.5.2 を示せ.

11.6 累次積分

定理 11.6.1 $I = [a, b] \times [c, d]$ とし、 $f(x, y) \in C^0(I)$ とする. このとき

$$\int \int_{I} f(x,y) dx dy = \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} f(x,y) dy \right) dx = \int_{c}^{d} \left(\int_{a}^{b} f(x,y) dx \right) dy$$

が成立する.

演習問題 11.6.1 次の積分値を求めよ.

$$\int \int_{[0,1]\times[0,1]} (x+y^2)^2 dx dy$$

演習問題 11.6.2 次の積分値をもとめよ。(0 < a < b)

$$\int \int_{[0,1]\times[a,b]} x^y dx dy$$

命題 **11.6.1** $\phi(y)$, $\psi(y) \in C^2([a,b])$ とし

$$A = \{(x, y) \mid a < x < b, \phi(x) < y < \psi(x)\}$$

とする. $f(x,y) \in C(A)$ とすると

$$\int \int_{A} f(x,y) dx dy = \int_{a}^{b} dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy$$

である.

命題 **11.6.2** $\phi(y)$, $\psi(y) \in C^2([c,d])$ とし

$$A = \{(x, y) \mid c \le y \le d, \phi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

とする. $f(x,y) \in C(A)$ とすると

$$\int \int_{A} f(x,y) dx dy = \int_{c}^{d} dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx$$

である.

演習問題 11.6.3 次の積分値を求めよ.

$$\int \int_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

演習問題 11.6.4 次の積分値を求めよ.

$$\int \int_D xy dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le y \le 1 - x\}$$

演習問題 11.6.5 次の積分値を求めよ.

$$\int \int_{D} xy dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^{2} + y^{2} \le 1, y \ge 0\}$$

11.7 積分の変数変換 (極座標への変換)

定義 $11.7.1\ A\subset\mathbb{R}^2$ を有界集合とする。このとき 有限個の可測(面積確定)集合 $A_1,...,A_N$ のあつまり, $\Delta=\{A_i\}_{i=1}^N$ が A の一般分割であるとは次のことが成立することをいう。

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$$
$$|A_i \cap A_j| = 0, \quad i \neq j$$

さて $d(\Delta)$ を

$$d(\Delta) = \max_{i} \sup_{p,q \in A_i} d(p,q)$$

と定義する.

補題 11.7.1 f(x,y) が A 上可積分とすると $p_i \in A_i$ の選び方によらず,

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i) |A_i| = \int \int_A f(x,y) dx dy$$

が成り立つ. 逆に

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i) |A_i|$$

が代表点 $p_i \in A_i$ の選び方によらず一定の極限値に収束するならば f(x,y) は A 上可積分で

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i) |A_i| = \int \int_A f(x,y) dx dy$$

である.

11.8 積分の変数変換 (極座標への変換)

定義 11.8.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする。このとき 有限個の可測(面積確定)集合 $A_1,...,A_N$ のあつまり, $\Delta = \{A_i\}_{i=1}^N$ が A の一般分割であるとは次のことが成立することをいう。

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$$
$$|A_i \cap A_j| = 0, \quad i \neq j$$

さて $d(\Delta)$ を

$$d(\Delta) = \max_{i} \sup_{p,q \in A_i} d(p,q)$$

と定義する.

補題 11.8.1 f(x,y) が A 上可積分とすると $p_i \in A_i$ の選び方によらず,

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i) |A_i| = \int \int_A f(x,y) dx dy$$

が成り立つ。逆に

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i) |A_i|$$

が代表点 $p_i \in A_i$ の選び方によらず一定の極限値に収束するならば f(x,y) は A 上可積分で

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i) |A_i| = \int \int_A f(x,y) dx dy$$

である.

 Ω ϵ

$$\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 \le a \le r \le b, \ 0 \le \phi \le \theta \le \psi \le 2\pi\}$$

とし, Dを

$$D = \{(x, y) \mid x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \ (r, \theta) \in \Omega\}$$

とする.

定理 11.8.1 次が成立する.

(1) f(x,y) が D 上可積分ならば $f^*(r,\theta)r = f(r\cos\theta,r\sin\theta)r$ も Ω 上可積分で

$$\int \int_{D} f(x, y) dx dy = \int \int_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

 $(2) \; f(r\cos\theta,r\sin\theta)r \;$ が Ω 上可積分ならば f(x,y) は D上可積分で

$$\int \int_D f(x,y) dx dy = \int \int_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

演習問題 11.8.1 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2, y \ge 0\}$ とする.

$$\int \int_D x^2 y^2 dx dy$$

を求めよ.

演習問題 **11.8.2** $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2, x \ge 0\}$ とする.

$$\int\int_{D} (x^2 + y^2) dx dy$$

を求めよ.

演習問題 **11.8.3** $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$ とする.

$$\int \int_{D} (x^{2} + y^{2})e^{-x^{2} - y^{2}} dx dy$$

を求めよ.

11.9 一般の変数変換

次のことを思い出す

$$\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}(u,v) = \det \begin{pmatrix} \phi_u(u,v) & \phi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{pmatrix}$$

補題 11.9.1 $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$F = \begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$$

とする. $I \subset \mathbb{R}^2$ を区間とするとき

$$|F(I)| = \int \int_I \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| du dv$$

である. ただし $F(I) = \{(au + bv, cu + dv) \mid (u, v) \in I\}$ である.

補題 11.9.2 $\Phi: \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad x(u, v), \ y(u, v) \in C^{1}(\bar{D})$$

とし, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)(u,v)}
eq 0$, $(u,v) \in \bar{D}$ とする.このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって $d(I) < \delta$, $I \subset D$ なる任意の正方形 I に対して

$$\left| |\Phi(I)| - \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(p)||I| \right| \le \epsilon |I|$$

が成立する. ただしpはIの中心である. 特に

$$\lim_{d(I)\to 0} \frac{|\Phi(I)|}{|I|} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(p) \right|$$

である.

命題 11.9.1 $\Phi: \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad x(u, v), \ y(u, v) \in C^1(D)$$

で1-1かつ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0, \quad (u,v) \in D$$

とする. いま $A \subset D$ を可測とする. このとき

$$|\Phi(A)| = \int \int_A \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| dudv$$

である. ただし $\Phi(A) = \{(x,y) \mid (x,y) = \Phi(u,v), (u,v) \in A\}$ である.

演習問題 11.9.1

$$\begin{cases} f(u,v) = a\phi(u,v) + b\psi(u,v) \\ g(u,v) = c\phi(u,v) + d\psi(u,v) \end{cases}$$

とするとき

$$\frac{D(f,g)}{D(u,v)}(u,v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)$$

であることを示せ.

演習問題 11.9.2 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (a>0) と $x\geq 0,$ $y\geq 0$ で囲まれた 部分の面積を求めよ.

演習問題 11.9.3

$$\Omega = \{(x, y) = (u^2 - v^2, uv) \mid 0 \le u \le a, 0 \le v \le b\}$$

とするとき Ω の面積を求めよ.

演習問題 11.9.4

$$B = \{(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 \le 1\}, \quad a > 0, ac - b^2 > 0$$

とする. このとき B の面積を求めよ.

定理 11.9.1 $\Phi: \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad x(u, v), \ y(u, v) \in C^{1}(D)$$

で1-1かつ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0, \quad (u,v) \in D$$

とする. いま $A \subset D$ および $\Phi(A) = B$ を可測とする. このとき

(1) f(x,y) が B 上可積分ならば

$$f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right|$$

も A 上可積分で

$$\int \int_B f(x,y) dx dy = \int \int_A f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} (u,v) \right| du dv$$

が成立する.

(2)

$$f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right|$$

が A 上可積分なら f(x,y) は B 上可積分で

$$\int \int_{B} f(x,y) dx dy = \int \int_{A} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| du dv$$

が成立する.

11.10 広義積分 (多次元)

問題点: $f(x,y)\in C^0(\Omega\setminus\{0\})$ とする.このとき $\Omega_\epsilon\to\Omega$ となる Ω_ϵ のとり方は無限にある. $[a,b-\epsilon)\to[a,b)$ と比較せよ.

定義 **11.10.1** $0 \le f(x,y) \in C^0(\Omega)$ とする. いま

$$\sup_{K \in K(\Omega)} \int \int_K f(x,y) dx dy < \infty$$

のとき、f(x,y) は Ω 上で広義積分可能という。 ただし、 ここで

$$K(\Omega) = \{K \subset \Omega \mid K : 面積確定有界閉集合 \}$$

この上限を

$$\int \int_{\Omega} f(x,y) dx dy$$

で表わし、f(x,y) の Ω 上の広義積分という.

定義 **11.10.2** $f(x,y) \in C^0(\Omega)$ とする.

$$\sup_{A \in K(\Omega)} \int \int_A |f(x,y)| dx dy < \infty$$

のとき、f(x,y) は Ω 上広義積分可能といい、広義積分の値を

$$\int \int_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int \int_{\Omega} f^{+}(x,y) dx dy - \int \int_{\Omega} f^{-}(x,y) dx dy$$

で定義する。ただし

$$f^{+}(x,y) = (|f(x,y)| + f(x,y))/2$$
$$f^{-}(x,y) = (|f(x,y)| - f(x,y))/2$$

ある.

演習問題 11.10.1

(1) f が広義積分可能であることと, f^+ , f^- がともに広義積分可能であることは同値であることを示せ.

(2)

$$\int \int_{\Omega} |f(x,y)| dx dy \ge \int \int_{\Omega} f^{+}(x,y) dx dy, \int \int_{\Omega} f^{-}(x,y) dx dy$$

であることを示せ、

定義 11.10.3 $D \subset \mathbb{R}^2$, D は有界でないとする.このとき任意の R>0 に対して

$$D \cap B_R = D \cap \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$$

が面積確定のとき, Dを面積確定といい,

$$\lim_{R\to\infty}|D\cap B_R|$$

で D の面積を定義する. したがって面積無限大の場合もある.

11.11 定義の反省

定義 11.11.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定とする. このとき $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D のコンパクト近似列であるとは、次の3条件が満たされることをいう.

- (1) $A_n \in K(D)$
- (2) $A_n \subset A_{n+1}, \quad n = 1, 2, ...$
- (3) D に含まれるかってな有界閉集合 B に対して、 $B \subset A_m$ なる m がある.

演習問題 **11.11.1** $D = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ とする. このとき

$$A_n = \{(x,y) \mid \frac{1}{n} \le x^2 + y^2 \le 1 - \frac{1}{n}\}$$

は D のコンパクト近似列である.

定理 11.11.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ にはコンパクト近似列 $\{A_n\}$ があるとする。このとき次は同値である。

(1) $f(x,y) \in C^0(D)$ は D 上広義積分可能.

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \int \int_{A_n} |f(x,y)| dx dy$$

が存在する.

さらにこのとき

$$\int \int_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{n \to \infty} \int \int_{A_{n}} f(x,y)dxdy$$

である.

演習問題 **11.11.2** $D=\{(x,y)\mid 0< x^2+y^2<1\}$ とする。このとき $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-\alpha/2}$ は $\alpha<2$ なら D 上広義可積分であることを示しその値を求めよ。 $\alpha>2$ なら広義積分不可能であることを示せ.

演習問題 **11.11.3** $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, \ x \ge 0, (x,y) \ne (0,0)\}$ とする. このとき広義積分

$$\int \int_{B} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha}} dx dy \quad (\alpha < 1)$$

の値を求めよ.

演習問題 11.11.4

- (1) $A_n=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq n^2\}$ は \mathbb{R}^2 のコンパクト近似列であることを示せ.
- (2) 広義積分

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{\alpha}} dx dy$$

は $\alpha > 1$ なら収束し、 $\alpha < 1$ なら発散することを示せ、

定理 **11.11.2** $D=\{(x,y)\mid 0< x^2+y^2\leq \rho\}$ とし、 $f(x,y)\in C^0(D)$ とする。 $\alpha<2$ 、 $\delta>0$ 、B>0 があって

$$|f(x,y)| \le \frac{B}{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\alpha}, \quad 0 < x^2 + y^2 < \delta^2$$

が成立するならば f(x,y) は D で広義積分可能である.

定理 **11.11.3** D を有界でない可測集合とし、f(x,y) は D で有界かつ連続とする。 $\alpha>2$, M>0, B>0 があって

$$|f(x,y)| \le \frac{B}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x^2 + y^2 \ge M$$

が成立するならば f(x,y) は D で広義積分可能である.

11.12 広義積分の変数変換

定理 11.12.1 A, B は可測でコンパクト近似列が存在するとする. いま

$$\Phi: \left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right.$$

は A から B への C^1 級の 1-1, 上への写像で

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0, \quad (u,v) \in A$$

を満たすとする. このとき次は同値である.

(1) f(x,y) は B 上広義積分可能

(2)

$$f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right|$$

が A 上広義積分可能.

さらにこのとき

$$\int \int_{B} f(x,y) dx dy = \int \int_{A} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| dx dy$$

が成立する.

演習問題 **11.12.1** $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \ge 1\}$ とする。このとき次の広義積分の値を求めよ。

$$\int \int_{D} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^{\alpha}} dx dy \quad (\alpha > 1)$$

演習問題 11.12.2 次の広義積分の値を求めよ

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$$

演習問題 11.12.3 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int \int_D (x^2 - y^2)^{-1/2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ y^2 \le x^2\}$$

第12章 線積分とGreen の定理

12.1 平面上の曲線

定義 12.1.1 $\mathbb R$ 上のある区間 [a,b] から $\mathbb R^2$ への連続写像 C(t):

$$C(t): I = [a, b] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

を曲線という。 $x(t), y(t) \in C^1([a,b])$ のとき、この曲線を C^1 曲線という。

演習問題 12.1.1 次の曲線の概形を描け:

$$C(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

$$C(t) = (\cos (-t), \sin (-t)), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

定義 12.1.2 $C_1(t):[a,b]\to\mathbb{R}^2,\,C_2(t):[lpha,eta]\to\mathbb{R}^2$ が同一の曲線であるとは、ある狭義単調増加関数 $s(t):[lpha,eta]\to[a,b]$ があって

$$C_1(s(t)) = C_2(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

の成立することをいう.

定義 **12.1.3** $C(t): [a,b] \to \mathbb{R}^2$ に対して

$$\tilde{C}(t): [-b, -a] \ni t \mapsto (x(-t), y(-t)) \in \mathbb{R}^2$$

を -C であらわし,C の逆向きの曲線という.軌跡としては同じ,即ち $C([a,b]) = \tilde{C}([-b,-a])$ であることに注意しよう.

12.2 線積分

定義 12.2.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ で、曲線 $C(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ は $C([a, b]) \subset D$ を満たすとする。 $P(x, y) \in C^0(D)$ とするとき

$$\int_{a}^{b} P(x(t), y(t))x'(t)dt$$

を P(x,y) の x による C に沿う線積分といい,

$$\int_C P(x,y)dx$$

で表わす。

演習問題 12.2.1 P(x,y) の y による C に沿う線積分

$$\int_C P(x,y)dy$$

を定義せよ.

補題 12.2.1 $C(t)=(x(t),y(t)),\ a\leq t\leq b$ と $\tilde{C}=(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)),\ \alpha\leq t\leq \beta$ は同じ曲線を表すとする。このとき

$$\int_{C} P(x,y)dx = \int_{\tilde{C}} P(x,y)dx, \quad \int_{C} P(x,y)dy = \int_{\tilde{C}} P(x,y)dy$$

である.

定義 12.2.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ とし、D の境界 bD は C^1 曲線であるとする。いま曲線 $C(t) = (x(t),y(t)):[a,b] \to \mathbb{R}^2$ が

$$C([a,b]) = bD$$

でかつ C(t) における D の単位外法線 $\nu(t)$ と C'(t) が右手系をなすとき, C は D からきまる向きをもつという.このときこの C を ∂D で表わすことにする.

12.3 Green の定理

定理 **12.3.1** $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(\bar{D}), \bar{D} = D \cup bD$ とする. D は縦線集合, または横線集合とする. このとき

$$\int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int \int_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

が成立する.

一次元の場合の微積分の基本定理

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

と比較せよ. I = [a, b] とするとき I 境界は $\{a\}, \{b\}$ である.

補題 12.3.1 $f(x,y) \in C^1(D)$, $\phi(x)$, $\psi(x) \in C^1([a,b])$ で $\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ このとき

$$\frac{d}{dx} \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dy + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\phi(x))\phi'(x)$$

である.

系 12.3.1 定理と同じ仮定の下で

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy$$

系 12.3.2 $F(x,y) \in C^2(\bar{D})$, $\bar{D} = D \cup bD$ とする. D は縦線集合, または横 線集合とする。このとき

$$\int_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dy = 0$$

である.

演習問題 12.3.1 $C(t):[a,b] \to \mathbb{R}^2$ を C^1 曲線とし,-C を逆向き曲線とす る. このとき

$$\int_{-C} P(x,y)dx = -\int_{C} P(x,y)dx$$

を示せ.

演習問題 12.3.2 C を曲線 $y=x^2,\ 0\leq x\leq 1$ とし、その向きは原点から (1,1) に向かう向きとする。このとき

$$\int_C x dy - y dx$$

を求めよ.

演習問題 12.3.3 C は単位円でその向きは反時計回りとする。このとき

$$\int_C xdy - ydx$$

を求めよ.

演習問題 12.3.4 次の積分を求めよ.

$$\int_{\partial C} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy.$$

ここで
$$C$$
 は原点を中心とする単位円である. (注意) $\frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{x}{x^2+y^2}$ は C 内で C^1 級ではない.

演習問題 12.3.5 次の積分を求めよ.

$$\int_{\partial D} (x^2 - y^2) dx + 2xy dy,$$

$$\int_{\partial D} (x^2 - y^2) dx + 4xy dy.$$

ここで $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ である.

第13章 微分方程式

13.1 解の存在と一意性

定義 13.1.1 $F(x,u_0,u_1,...,u_n)$ が領域 D で定義されているとする. y(x) が区間 I で $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ の解とは

- (1) $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \in D, x \in I$
- (2) $F(x,y(x),y'(x),...,y^{(n)}(x))=0, x \in I$ の成立することをいう。

定理 13.1.1 $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ を考える. $f(x, u_1, ..., u_n)$ は次を満たすとする.

- (1) f が点 $(a, b_1, ..., b_n)$ の近傍で連続
- (2) $(a,b_1,...,b_n)$ の近傍の 2 点 $(x,u_1,...,u_n), (x,v_1,...,v_n)$ に対して

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| \le L \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$$

が成立する (Lipschittz 条件). このとき、初期条件 $y(a) = b_1,...,y^{(n-1)}(a) = b_n$ を満たす解が (x = a) の近傍で)唯一つ存在する.

13.2 簡単な微分方程式

変数分離形:

$$y' = f(x)g(y), \quad g(y) = \exp\left(\int f(x)dx\right)$$

同次形:

$$y' = f(\frac{y}{x}), \quad y = xu \Longrightarrow f(u) - u = Cu$$

一階線形微分方程式(斉次)

$$y' + P(x)y = 0$$
, $y(x) = C \exp\left(-\int P(x)dx\right)$

一階線形微分方程式 (非斉次)

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

 $u(x) = \exp(-\int P(x)dx)$ とおき、y(x) = C(x)u(x) の形で y(x) を求める.

$$y(x) = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)e^{-\int P(x)dx}$$

演習問題 **13.2.1** $y^{(3)} = \sin x$ を解け.

演習問題 **13.2.2** $y' = 3y^{2/3}$ を解け.

演習問題 **13.2.3** $y' + 2y = e^x$ を解け.

演習問題 13.2.4 次の微分方程式を解け.

(1)
$$(1+x^2)yy' + (1+y^2)x = 0$$

(2)
$$y' = \left(\frac{x-y+3}{x-y+1}\right)^2$$

(3)
$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2y}{x}$$

(4) $(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0$

(4)
$$(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0$$

13.3 2階線形微分方程式(斉次)

次の微分方程式を考える. p(x), q(x) は連続関数とする.

(*)
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

定義 13.3.1 $y_1(x)$, $y_2(x)$ が一次従属とは, $c_1^2+c_2^2\neq 0$ なる定数 c_1 , c_2 が あって

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0$$

の成立することをいう。一次従属でないとき、一次独立という。

定義 13.3.2 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を (*) の解とするとき,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

を, $y_1(x)$, $y_2(x)$ のロンスキアンという.

定理 13.3.1 次が成立する.

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x p(t)dt\right)$$

ただし、 x_0 は任意に固定された点である.

演習問題 13.3.1 定理 13.3.1 を証明せよ.

系 13.3.1 $W(x) \equiv 0$ なら $y_1(x)$, $y_2(x)$ は一次従属である.

演習問題 13.3.2 系 13.3.1 を証明せよ.

定理 **13.3.2** $y_1(x)$, $y_2(x)$ を (*) の一次独立な解とし, y(x) を (*) の任意の解とする。このとき、 c_1 , c_2 が一意的に決まって

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

とかける.

演習問題 13.3.3 定理 13.3.2 を示せ.

定義 **13.3.3** $y_1(x)$, $y_2(x)$ が一次独立な解のとき、 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (*) の基本解系という。

13.4 非斉次微分方程式

次の微分方程式を考える. p(x), q(x) は連続関数とする.

$$(**) y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

定理 13.4.1 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を (*) の基本解系とする。このとき (**) の一つの解は次で与えられる。

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{W(\xi)} f(\xi) d\xi$$

ここで y(x) は $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ を満たす.

定理 **13.4.2** w(x) を非斉次方程式 (**) の解とする。このとき、非斉次方程式 (**) の任意の解 y(x) に対して斉次方程式 (*) の解 u(x) があって

$$y(x) = w(x) + u(x)$$

とかける.

演習問題 13.4.1 定理 13.4.2 を証明せよ.

演習問題 13.4.2 $y'' - y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 6x + 3$ の多項式の解を求めよ.

13.5 定数係数2階方程式

定数係数2階方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

に対して

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を特性方程式という.

定理 **13.5.1** y'' + ay' + by = 0 は次のような基本解系をもつ.

(1) $a^2 - 4b > 0$ \emptyset ξ ξ ,

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

ただし、 λ_1, λ_2 は特性方程式の相異なる 2 実根

(2) $a^2 - 4b = 0 \mathcal{O} \xi \mathfrak{F}$,

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$$

ただし、 λ_0 は特性方程式の実重複根

(3) $a^2 - 4b < 0 \ \mathcal{O} \ \xi \ \xi$,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ただし、 $\alpha \pm i\beta$ は特性方程式の共役複素根.

演習問題 13.5.1 次の微分方程式を解け.

$$y'' + y = x \sin x$$

演習問題 13.5.2 次の微分方程式を解け.

$$y'' + 3y' + 2y = 8e^{3x}$$

演習問題 13.5.3 次の微分方程式を解け

$$y'' + 9y = -9x^2 + 18x + 7$$

第14章 一様収束

14.1 関数列

定義 14.1.1 $f_n(x)$, n=1,2,... を区間 I で定義された関数の列とする. I の 各点 x を固定するごとに、数列 $\{f_n(x)\}$ が収束するとき

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

と書いて、関数列 $\{f_n(x)\}$ は f(x) に I で各点収束するという。 f(x) を極限関数という。

定義 14.1.2 $f_n(x)$, n=1,2,... を区間 I で定義された関数の列とする. $\{f_n(x)\}$ が f(x) に I で一様収束するとは

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \ s.t. \ n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \ \forall x \in I$$

の成立することをいう.

補題 14.1.1 $\{f_n(x)\}$ が I で一様収束するため必要十分条件は

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \ s.t. \ p, q \ge N \Longrightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \le \epsilon, \ \forall x \in I$$

の成立すること

定理 **14.1.1** $f_n(x) \in C^0(I)$ で $f_n(x) \to f(x)$, (一様 in I) ならば $f(x) \in C^0(I)$ である.

演習問題 14.1.1 $f_n(x) \in C^0([a,b])$ は f(x) に各点収束しているとする. いま M>0 があって

$$|f_n(x) - f_n(x')| \le M|x - x'| \quad \forall n, \ \forall x, x' \in [a, b]$$

が成立しているとするなら $f_n(x)$ は f(x) に一様収束している.

定理 **14.1.2** $f_n(x)$ は [a,b] で可積分で $f_n(x) \to f(x)$ (一様 in [a,b]) とする. このとき f(x) は [a,b] で可積分で

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

である.

演習問題 **14.1.2** $f(x) \in C^0([a,b])$ で、 $f(x) \ge 0$ とする. このとき

$$\int_{a}^{b} f(x)^{n} dx$$

は $+\infty$ に発散するか、さもなくば有限な極限に収束する.

演習問題 14.1.3

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

を考える。このとき

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) dx, \quad \int_0^1 \{\lim_{n \to \infty} f_n(x)\} dx$$

を求めよ.

定理 **14.1.3** $f_n(x) \in C^1(I)$, $f'_n(x) \to \phi(x)$ (一様 $in\ I$), $f_n(x) \to f(x)$ (各点) とする. このとき

$$f_n(x) \to f(x)$$
 ($\neg \notin in I$), $\lim_{n \to \infty} f'_n(x) = \phi(x) = f'(x)$

である.

演習問題 **14.1.4** $\alpha(x)$ を

$$\alpha(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^2 & |x| \le 1\\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

で定義する. さらに $f_n(x) = \alpha(nx)x$ で定義する. このとき任意の区間で $f_n(x)$ は一様に 0 に収束することを示せ. また $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ を求めよ.

14.2 関数項級数

定義 14.2.1 $g_n(x)$ は区間 I で定義されているとする。級数 $\sum_{i=1}^\infty g_n(x)$ が g(x) に I で各点収束するとは

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \to g(x)$$
 (各点)

のときをいう。このとき $g(x)=\sum_{i=1}^\infty g_i(x)$ とかく。 級数 $\sum_{i=1}^\infty g_n(x)$ が g(x) に I で一様収束するとは

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \to g(x) (\neg \not \text{the in } I)$$

のときをいう.

補題 14.2.1 $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ が I で一様収束するための必要十分条件は

 $orall \epsilon>0, \exists N, \ s.t. \ n>m\geq N, x\in I\Longrightarrow |g_{m+1}(x)+\cdots+g_n(x)|<\epsilon$ の成立すること、

定理 14.2.1 $g_n(x) \in C^0(I)$, $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \to g(x)$ (一様) この時 $g(x) \in C^0(I)$.

演習問題 14.2.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$$

は [0,1] で一様収束しないことを示せ.

定理 14.2.2 $g_n(x)$ は I で可積分で $\sum_{i=1}^\infty g_i(x) \to g(x)$ (一様) とする. このとき

$$\int_{a}^{b} \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a}^{b} g_n(x) dx$$

定理 **14.2.3** $g_n(x) \in C^1(I)$, $\sum_{i=1}^\infty g_i(x)$ は収束し, $\sum_{i=1}^\infty g_i'(x)$ は一様収束 するとする.このとき

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}g_n(x)$$

14.3 一様収束のための条件

定理 $14.3.1 \sum a_n$ を収束する正項級数とする. いま

$$|u_n(x)| \le a_n \ \forall n, \ x \in I$$

ならば $\sum u_n(x)$ は一様収束する.

演習問題 14.3.1 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は -1 < a,b < 1 のとき $a \le x \le b$ で一様 収束することを示せ.

演習問題 14.3.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

は任意の区間で一様収束する.

演習問題 14.3.3 1 < a < b とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

は $a \le x \le b$ で一様収束する.

定理 14.3.2 0 < r < 1 があって

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \le r, \ \forall n, \ x \in I$$

とする. 今 $|u_1(x)| \leq M, \forall x \in I$ ならば $\sum u_n(x)$ は一様収束する.

定理 14.3.3 * $a_n>0$ は単調減少列で $a_n\to 0,\, n\to \infty$ であるとする. 今 A があって

$$\left| \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \right| \le A, \ \forall N, \ \forall x \in I$$

とする. このとき

$$\sum a_n u_n(x)$$

は一様収束する.

演習問題 14.3.4 $a_n>0$ は単調減少列で 0 に収束するとする。このとき $\sum a_n \sin nx$ は 2π の整数倍を含まない任意の閉区間で一様収束する。

補題 **14.3.1** (Abel) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$ でさらに

$$m \le a_1 + a_2 + \dots + a_n \le M$$

とする. このとき

$$b_1 m \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \le b_1 M$$

である.

定理 14.3.4 * $b_n \ge 0$ は単調減少列で 0 に収束するとする. このとき

$$\sum b_n \sin nx$$

が任意の区間で一様収束するための必要十分条件は $nb_n \to 0$ なることである.

14.4 Abel の定理*

定理 14.4.1 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

は収束しその和はsとする。このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $0 \le x \le 1$ で一様収束し

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = s$$

である.

演習問題 14.4.1 |x| < 1 のとき

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

であることを利用して

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

を示せ.

演習問題 14.4.2 $\sum a_n$ は収束しその和は S とする。このとき

$$S(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n\epsilon}$$

とするとき

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} S(\epsilon) = S$$

である.

14.5 Tauber の定理*

定理 14.5.1

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の収束半径を 1 とし $f(x) \to s, \ x \to 1$ とする。いま $a_n = o(1/n)$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

である.