始めに

これは筆者が 1997 年 4 月から 12 月まで 9 回にわたって，龍谷大学で行った強双曲型偏微分方程式系に関する連続講演の記録に少し手を加えたものである．

双曲型偏微分方程式は波動方程式をその典型例とする，擾乱の伝播を記述，支配する方程式であり，偏微分方程式の中でも最も重要なものの一つである．中でも数理物理に現われる偏微分方程式は系として現われることが普通であり，従って双曲型方程式系は特に重要である．Friedrichs による対称双曲系の壮大な理論を別にすれば，双曲型偏微分方程式系を一般に扱った盛書は殆んどない．例えば 1985 年頃の Gårding [56] や Melrose [55] の双曲型方程式の初期値問題に関する概説では，系については一切ふれられていない．Ivrii [57] には 1987 年頃までの双曲型方程式および系に関する多くの結果が解説してあるが，系に対する一般的な結果は非常に少ない．

ここでの講演内容は，低階の摂動によらず初期値問題が適切であるような双曲型方程式系，即ち強双曲系 (勿論，対称双曲系を含む) は美しい構造をもっているであろう，という立場から (単独強双曲型方程式のもつ美しい構造がその一つの支えである) 強双曲系を，対称双曲系を含む，統一的な立場から理解したいという試みの第一歩である．

もう少し詳しく内容を説明すると，§1 ではこの講演で最終的に証明したいくつかの結果を述べた．結果を粗く述べると，ある $m \times m$ の一階の系 L が強双曲系なら，主部の行列式 h に L のかってな $m-1$ 次小行列式 g を加えた単独 m 階の方程式 $h+g$ に対して初期値問題が適切である，と述べられる．このことから，$m \times m$ の一階の系が強双曲系ならば，少なくとも余接束上の各点では，h が単独強双曲型の一般化であるかあるいは L が対角化可能であるかのいずれかである，という基本予想がでてくる．§2 では対称双曲系が強双曲系であることを，従来の方法に少し工夫を加えて証明してみた．§3 では対称化可能でない強双曲系の最も簡単な例を考察した．この例からも，強双曲系が対称双曲系とはかなり異質の系を含んでいることが推察できる．§4 では主結果の証明のための鍵となる基本命題および，証明に必要

な主表象の漸近的分解，漸近的 Levi 条件，局所化の標準形などの命題を述べそれらを認めて主結果を証明した．§5 では漸近的対角化の命題を仮定して基本命題を証明した．§6 は漸近的対角化の命題の証明にあてられている．この命題は基本命題の証明のための最も重要な部分である．§7 では局所化の標準形に関する命題の証明を与えた．証明は非常に具体的である．§8 では漸近的 Levi 条件の命題を認めて，基本命題の証明に必要ないくつかの事実を示した．§9 で主表象の漸近的分解に関する命題の証明を与えた．§10 は漸近的 Levi 条件の命題の証明にあてた．§11 では講演では述べることのできなかった予想やいくつかの最近の結果，また今後の展望について簡単に述べた．

最後にこの機会を与えてくださりまた講演内容や結果に対して貴重な御意見や有益な助言を頂いた龍谷大学の松本和一郎教授に心より感謝します．またつたない講演に最後までおつきあい下さった，萬代　武史，長谷川夫妻，院生の村井氏に深く感謝します．特に萬代氏には命題 4.7 の簡明な証明を教えていただきました．院生の高山正宏君には丁寧に原稿に目を通して頂き，いくつもの不備な点を指摘して頂きました．ここにあらためて感謝します.

大阪大学大学院理学研究科　西谷　達雄

目次

1. 強双曲系のための必要条件

一階連立系

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u + \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}u + B(x)u = f$$

を考えよう．ここで $u = (u_1, ..., u_m)$, $x = (x_0, x_1, ..., x_n) = (x_0, x')$ で ある．以下の便宜上，$1/\sqrt{-1}$ を全体に乗じて，

$$D_j = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

なる記号を使うことにして，

$$Pu = D_0 u + \sum_{k=1}^{n} A_k(x)D_k u + B(x)u = L(x, D)u + B(x)u = f$$

を考える．ここで，$A_k(x)$ は m 次の行列で，滑らかであるとする．この連立系を $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点の近傍で考えることにする．

以下よく使う記号をまとめておく．

Ω: $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点の開近傍
$C^\infty(\Omega; \mathbb{C}^m)$: Ω で定義された $\mathbb{C}^m$–値の C^∞ 関数の全体
$M(m, \mathbb{C})$: 複素 m 次行列の全体
$C^\infty(\Omega; M(m, \mathbb{C}))$: Ω で定義された $M(m, \mathbb{C})$–値の C^∞ 関数の全体
$\mathcal{A}(\Omega; \mathbb{C}^m)$: Ω で定義された $\mathbb{C}^m$–値の実解析的関数の全体
$\mathcal{A}(\Omega; M(m, \mathbb{C}))$: Ω で定義された $M(m, \mathbb{C})$–値の実解析的関数の全体

基本となる問題は次の二つである．

問題 A: 連立系 P に対して初期値問題を考える．即ち

$$\text{(C.P.)} \qquad \begin{cases} P(x, D)u = f \\ u(0, x') = u_0(x') \end{cases}$$

が一意可解かどうかを考える．任意の C^∞ 関数 f, $u_0(x)$ に対して一意可解 (C^∞ で) のとき，この系を双曲系と呼ぶことにして， P はいつ双曲系になるかを決定せよ．

問題 B: 連立系 P に対して初期値問題 (C.P.) が全ての $B(x) \in C^\infty(\Omega; M(m, \mathbb{C}))$ に対して一意可解 (C^∞ で) となるための条件を求めよ．このような P を強双曲系と呼ぶ.

問題 A について : 双曲系となるための一般的な条件は少ししか知られていない．一般的な必要条件の一つは所謂 Lax-Mizohata の定理でこれは実特性根の必要性を主張する．特性根の多重度が一定のときは多くの研究がある．たとえば [39], [44], [45], [22], [25], [26]. 最近 [28] によってこの場合は完全な必要十分条件が与えられた．特性根の多重度が高々 2 のときはかなり精密な結果がある．[31] を見よ．

問題 B について : この場合も多くの研究があるが一般的な条件は少ししか知られていない．例えば [38], [41], [27], [32], [34] 等を見よ．特性根の多重度が一定のときは [21] によって必要十分条件が得られている．定数係数の場合は [23] によって必要十分条件が知られている．

まずここで採用する初期値問題の well-posedness の定義を正確に述べておく．まず開集合 ω に対して

$$E_\tau^\pm = \{u \in C^\infty(\omega; \mathbb{C}^m) \mid u = 0$$

定義 1.1: $P(x, D) = L(x, D) + B(x)$ ただし

$$L(x, D) = D_0 + \sum_{j=1}^n A_j(x) D_j$$

に対する初期値問題が $x = 0$ で ($x_0 =$ 定数 に関し) 未来方向に C^∞ well posed とは，次の性質を満たす ω ($x = 0$ の近傍) と $\epsilon > 0$ の存在すること : $\forall |\tau| < \epsilon$ に対して次が成立する．

“$\forall f \in E_\tau^+(\omega)$ 対し $Pu = f$ in ω なる $u \in E_\tau^+(\omega)$ が一意に存在する”

また過去に C^∞ well posed とは，$x = 0$ の近傍 ω と ϵ があって，$|\tau| < \epsilon$ なる限り,

“$\forall f \in E_\tau^-(\omega)$ 対し $Pu = f$ in ω なる $u \in E_\tau^-(\omega)$ が一意に存在する”.

次に強双曲系の定義を与える．この定義では過去，未来両方向の well-posedness を要求する．

定義 1.2: $\Omega \ni 0$ とする．$L(x,D)+B(x)$ に対する初期値問題がすべての $B(x) \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ に対して $x=0$ で両方向に C^∞ well posed のとき，$L(x,D)$ は強双曲系であるという．

さて，$L(x,D)$ のシンボル $L(x,\xi)$ は

$$L(x,\xi) = \xi_0 I + \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\xi_j = \xi_0 - A(x,\xi')$$

として定義される．$h(x,\xi)$ で $\det L(x,\xi)$ を表わす．$h(x,\xi)$ は ξ の m 次斉次多項式である．

次に特性点の定義を与える．

定義 1.3: $\overline{z} = (\overline{x},\overline{\xi})$ $(\overline{\xi} \neq 0)$ が h の r 次の零点即ち

$$\begin{aligned} \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha h(\overline{x},\overline{\xi}) = 0 \quad &\text{for} \quad \forall |\alpha+\beta| < r \\ \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha h(\overline{x},\overline{\xi}) \neq 0 \quad &\text{for some} \quad |\alpha+\beta| = r \end{aligned}$$

のとき，$(\overline{x},\overline{\xi})$ を $L(x,\xi)$ の r 次特性点という．

次のいわゆる a priori 評価から始める．

命題 **1.1.** (a priori 評価) $\Omega \ni 0$ とする．$P(x,D)$ に対する初期値問題が $x=0$ で両方向に C^∞ well posed とする．このとき任意のコンパクト集合 $K \subset \omega$ に対して正数 C, τ と自然数 p があって

$$|u|_{C^0(K^t)} \le C|Pu|_{C^p(K^t)}, \quad |u|_{C^0(K_t)} \le C|Pu|_{C^p(K_t)}$$

が $\forall |t| < \tau$, $\forall u \in C_0^\infty(K;\mathbb{C}^m)$ に対して成立する．ただし

$$K^t = \{x \in K \mid x_0 < t\} \quad K_t = \{x \in K \mid x_0 > t\}$$
$$|u|_{C^q(W)} = \sup_{|\alpha| \le q, x \in W} |D^\alpha u(x)|$$

である．

証明は後で与える．当面，この不等式は C^∞ well posed の定義の一部と思ってよい．

まず Lax-Mizohata の定理を思い出そう．([24], [29])

定理 **1.2.** (Lax-Mizohata) $\Omega \ni 0$ とし，$L(x,D)+B(x)$ に対する初期値問題が，$x=0$ で C^∞ well posed とする．このとき $h(x,\xi)=0$ の ξ_0 に関する根は x が原点の近く，ξ' が実のとき常に実である．

この結果は次の様に書いてもよい．

$$h(x,\xi+\tau\theta)=0, \quad \theta=(1,0,...,0)$$

の根 τ はすべて実である．以下常にこのことを仮定する．

さて主結果を述べる．

定理 **1.3.** $A_j(x)\in\mathcal{A}(\Omega)$ とする．更に $\Omega\ni 0$ で $\overline{z}=(0,\overline{\xi}),\overline{\xi}\neq 0$ を L の r 次特性点とする．今，$L(x,D)$ が強双曲系ならば ($x=0$ で) 次が成立する: $m(x,\xi)$ を $L(x,\xi)$ のかってな $m-1$ 次の小行列式とするとき

$$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha m(\overline{z})=0 \quad \textit{for} \quad |\alpha+\beta|<r-2$$

である．

注意 : $\overline{z}$ が h の r 次の零点なら $h(\overline{z}+\lambda\theta)$ において $\lambda=0$ は r 次の零点となる．(自明ではない)．逆も正しい．従って，$\det(\lambda I+L(\overline{z}))=h(\overline{z}+\lambda\theta)$ であるから，$\overline{z}$ が L の r 次特性点とは，$\lambda=0$ が $L(\overline{z})$ の重複度 r の固有値であることに他ならない．

系 **1.4.** $A_j(x)\in\mathcal{A}(\Omega)$ とする．更に $\Omega\ni 0$ で $\overline{z}=(0,\overline{\xi}),\overline{\xi}\neq 0$ は L の多重特性点とする．即ち，2 次以上の特性点とする．$L(x,D)$ は $x=0$ で強双曲系とする．このとき V を $L(\overline{z})$ の一般化零固有空間とするとき

$$(L(\overline{z})|_V)^2=O$$

である．

証明 : 局所座標系を取り替えることによって (ただし，x, y を各々旧，新局所座標系とするとき，$x_0=y_0$ となる取り替えで) $\overline{z}=(0,e_n)$, $e_n=(0,...,0,1)\in\mathbf{R}^{n+1}$ としてよい．従って $L(\overline{z})=A_n(0)$ となる．$L(x,D)$ が $x=0$ で強双曲系ならば，正則な T に対して $T^{-1}L(x,D)T$ も強双曲系であるから，$A_n(x)$ の代わりに $T^{-1}A_n(x)T$ を考えてよく $A_n(0)$ は Jordan 標準形としてよい．従って (0 は $L(\overline{z})=A_n(0)$ の重複度 r の固有値ゆえ) $A_n(0)=J\oplus C$, $C\in M(m-r,\mathbb{C})$, $\det C\neq 0$ ここで

$$J=\oplus_{j=1}^s J(r_j),\ J(r_j)\in M(r_j,\mathbb{C}),$$
$$r_1\geq r_2\geq\cdots\geq r_s,\ r=r_1+\cdots+r_s$$

を仮定してよい．ただし $J(p)$ で

$$J(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & \end{pmatrix} \in M(p, \mathbb{C})$$

を表わすものとする．さて

$$L(0; \xi_0, 0, ..., 0, 1) = \xi_0 I + (J \oplus C)$$

を考察しよう．r_1 行と 1 列を除いて作った $m-1$ 次小行列式を考える．

$$\begin{aligned} \text{この小行列式} &= \xi_0^{r-r_1} \det(\xi_0 I_{m-r} + C) \\ &= \xi_0^{r-r_1} \det C + O(\xi_0^{r-r_1+1}), \quad \xi_0 \to 0. \end{aligned}$$

定理 1.3 によると，$r - r_1 \geq r - 2$ である．ゆえに $r_1 \leq 2$. □

$z = (x, \xi) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \cong \mathbf{R}^{2n+2}$ 上に次の双一次形式 σ を考える．$w = (y, \eta)$ と書くとき

$$\sigma(z, w) = \langle \xi, y \rangle - \langle x, \eta \rangle$$

ただし $\langle \xi, y \rangle = \xi_0 y_0 + \xi_1 y_1 + \cdots + \xi_n y_n$ は $\mathbf{R}^{2n+2}$ の標準的な内積である．

定義 1.4: V を $\mathbf{R}^{2n+2}$ の部分空間とする．V が包合的とは

$$V^\sigma = \{z \in \mathbf{R}^{2n+2} \mid \sigma(z, w) = 0,\ \forall w \in V\} \subset V$$

の成立するときをいう．

例 1.1:$x = (x_a, x_b)$ を変数の分割とする．すなわち，$x_a = (x_0, ..., x_k), x_b = (x_{k+1}, ..., x_n)$. さて $V = \{(x_a, 0, 0, \xi_b) \mid x_a \in \mathbf{R}^{k+1}, \xi_b \in \mathbf{R}^{n-k}\}$ のとき $V^\sigma = V$ 従って V は包合的.

他方 $V = \{(x_a, 0, \xi_a, 0) \mid x_a \in \mathbf{R}^{k+1}, \xi_a \in \mathbf{R}^{k+1}\}$ なら，$V^\sigma = \{(0, x_b, 0, \xi_b) \mid x_b \in \mathbf{R}^{n-k}, \xi_b \in \mathbf{R}$ で $V^\sigma \cap V = \{0\}$ となる．従って V は包合的ではない．

また超平面は包合的である．なぜなら超平面 H が $\langle a, z \rangle = 0$, $z = (x, \xi)$ で与えられるとすると， $a = (\alpha, \beta)$ と書いて $\langle a, z \rangle = \langle \alpha, x \rangle + \langle \beta, \xi \rangle = \sigma((x, \xi), (\beta, -\alpha))$ であるから $H = \langle (\beta, -\alpha) \rangle^\sigma$ となって $H^\sigma = \langle (\beta, -\alpha) \rangle \subset H$ であるから．ここで $\langle (\beta, -\alpha) \rangle$ は $(\beta, -\alpha)$ で張られる直線を表わす.

次に，$\tilde{z}=(\tilde{x},\tilde{\xi})$ $(\tilde{\xi}\neq 0)$ が $L(z)$ の r 次特性点とするとき，定義から

$$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha h(\tilde{x})=0,\quad |\alpha+\beta|<r$$

である．ゆえに $h(z)$　の $\tilde{z}$ を中心とする Taylor 展開は r 次の項から始まる．

$$h(\tilde{z}+\mu(x,\xi))=\mu^r\{\sum_{|\alpha+\beta|=r}\frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha h(\tilde{z})\xi^\alpha x^\beta+O(\mu)\}$$

となる．そこで次の定義を導入する．

定義 1.5: $\tilde{z}$ を L の r 次特性点とする．このとき

$$h(\tilde{z}+\mu z)=\mu^r\{h_{\tilde{z}}(z)+O(\mu)\},\quad \mu\to 0$$

で h の $\tilde{z}$ での局所化 $h_{\tilde{z}}(z)$ を定義する．具体的には

$$h_{\tilde{z}}(x,\xi)=\sum_{|\alpha+\beta|=r}\frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha h(\tilde{z})\xi^\alpha x^\beta$$

で $z=(x,\xi)\in\mathbf{R}^{2n+2}$ の r 次斉次多項式である．

定義 1.6: $q(z)$ を z の (斉次) 多項式とするとき $(z=(x,\xi)\in\mathbf{R}^{2n+2})$ $\mathbf{R}^{2n+2}$ の部分空間 $\Lambda(q)$ を次式で定義する．

$$\Lambda(q)=\{z\in\mathbf{R}^{2n+2}\mid q(tz+w)=q(w),\forall t\in\mathbf{R},\forall w\in\mathbf{R}^{2n+2}\}$$

これを q の線形性 (空間) という．

例えば，$q(z)$ が一次式ならば $q(z)=\langle a,z\rangle$, $a\in\mathbf{R}^{2n+2}$ とかいて，

$$\Lambda(q)=\{z\mid\langle a,z\rangle=0\}$$

である．一般に Λ は部分空間であるから，一次独立な一次式

$$l_j(z),\quad 1\leq j\leq p$$

があって，$\Lambda=\{z\mid l_j(z)=0,1\leq j\leq p\}$ と書ける．このとき $q(z)$ は $l_j(z)$ の多項式である．すなわち

$$q(z)=\sum c_\alpha l_1^{\alpha_1}(z)\cdots l_p^{\alpha_p}(z)$$

と表現される．ゆえに，新しい座標系 (w,ζ) を

$$w_j = l_j(z),\ 1 \le j \le p, \quad \zeta_j,\ 1 \le j \le 2n+2-p$$

と選ぶと，q は w のみの多項式で，ζ には依らない．

定義 1.7: $\tilde{z}$ を L の多重特性点とする．$\Lambda(h_{\tilde{z}})$ が包合的であるとき，$\tilde{z}$ は包合的である，という．

定理 **1.5.** $A_j(x) \in \mathcal{A}(\Omega),\ \Omega \ni 0$ で，$\tilde{z} = (0,\tilde{\xi}),\ \tilde{\xi} \ne 0$ は r 次特性点で $\Lambda(h_{\tilde{z}})$ は包合的とする．$L(x,D)$ が $x=0$ で強双曲系ならば次が成立する：$m(x,\xi)$ を $L(x,\xi)$ の任意の $m-1$ 次の小行列式とするとき

$$\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha m(\tilde{z}) = 0, \quad |\alpha+\beta| < r-1.$$

系 **1.6.** $A_j(x) \in \mathcal{A}(\Omega),\ \Omega \ni 0$ で，$\tilde{z} = (0,\tilde{\xi}),\ \tilde{\xi} \ne 0$ は r 次特性点で $\Lambda(h_{\tilde{z}})$ は包合的とする．$L(x,D)$ が $x=0$ で強双曲系ならば

$$\dim\ \mathrm{Ker} L(\tilde{z}) = r$$

である．

証明：定理 1.5 を使って，系 1.4 の証明と同様に行う． □

ここで $h(x,\xi)$ が次の様に表現される場合を考える．

$$h(x,\xi) = \prod_{j=1}^{s} (\xi_0 - \lambda_j(x,\xi'))^{r_j} = \prod_{j=1}^{s} q_j(x,\xi)^{r_j}$$

ただし，r_j は定数で $\lambda_j(x,\xi')$ は互いに相異なり，かつ滑らかとする．各 k $(1 \le k \le s)$ を固定して

$$\tilde{\xi}_0 = \lambda_k(\tilde{x},\tilde{\xi}')$$

とすると，$\tilde{z} = (\tilde{x},\tilde{\xi})$ は $q_k(z)$ の零点で， L の r_k 次特性点である．$h_{\tilde{z}}$ は

$$h_{\tilde{z}}(z) = c\langle dq_k(\tilde{z}), z\rangle^{r_k}, \quad c = \prod_{j \ne k} q_j(\tilde{z}).$$

ここで $dq(z) = (\partial q/\partial x_0(z), ..., \partial q/\partial x_n(z), \partial q/\partial \xi_0(z), ..., \partial q/\partial \xi_n(z))$. 従って

$$\Lambda(h_{\tilde{z}}) = \{z \mid \langle dq_k(\tilde{z}), z\rangle = 0\}$$

で $\Lambda(h_{\tilde{z}})$ は超平面，ゆえに包合的． 従って系 1.6 より $\dim\ \mathrm{Ker} L(\tilde{z}) = r_k$. 他方，$L(\tilde{z}) = \tilde{\xi}_0 - A(\tilde{x},\tilde{\xi}')$ より

$$\mathrm{Ker} L(\tilde{z}) = \text{個有値} \quad \lambda_k(\tilde{x},\tilde{\xi}') \quad \text{に属する固有空間}$$

に注意すると

系 **1.7.** (梶谷 1974) $h(x,\xi)$ は上に述べた条件を満たすとする．$L(x,D)$ が強双曲系ならば $A(x,\xi')$ は対角化可能である．

2. 対称双曲系

代表的なそして最も重要な強双曲系として，対称双曲系を考察し，対称双曲系に対する初期値問題はすべての $B(x) \in C^\infty(\Omega; M(m,\mathbb{C}))$ に対して一意可解であることを示す.

次の一階の微分方程式系を考える：

$$Pu = \sum_{j=0}^{n} A_j(x)D_j u + B(x)u = f$$

ここで，$A_j(x)$, $B(x)$ は $m \times m$ 行列で，その成分は $x = (x_0, x_1, ..., x_n) = (x_0, x') \in \mathbf{R}^{n+1}$ の C^∞ 関数であり，$u = (u_1, ..., u_N)$ また $D_j = \partial/\sqrt{-1}\partial x_j$ である．$A_j(x)$ が対称行列（複素数値ならエルミート）であり，$A_0(x)$ が定値であるとき，P は超曲面（この場合は平面）$x_0 =$ 定数 に関して対称双曲系である，と呼ばれる．この P に対して次の問題，すなわち初期値問題を考える：$x_0 < a$ で 0 となる f が与えられたとき

$$\begin{cases} Pu = f \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^{n+1} \\ u = 0 \quad \text{in} \quad x_0 < a \end{cases}$$

を満たす u を求めよ．以下簡単のため，$A_j(x)$, $B(x)$ はそれ自身のみならず全ての導関数が $\mathbf{R}^{n+1}$ で有界と仮定する．

必要ならば P の代わりに $-P$ を考えることによって $A_0(x)$ は正定値と仮定できる．更に $A_0(x)^{-1/2}PA_0(x)^{-1/2}$ を考えれば，$A_0(x) = I$，単位行列，としてよい.（P に対する一意可解性と $A_0(x)^{-1/2}PA_0(x)^{-1/2}$ に対する一意可解性は同値であるから）

まず Sobolev 空間の定義を思い出しておく．[5, 2 章], [4, §2.6]

定義 2.1:

$$H_s(\mathbf{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \mid \langle\xi'\rangle^s \hat{u}(\xi') \in L^2(\mathbf{R}^n)\}$$

ただし $\langle\xi'\rangle^2 = 1 + |\xi'|^2$, $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_n)$ で $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の緩増加超関数の全体，また $\hat{u}(\xi')$ は u の Fourier 変換，即ち

$$\hat{u}(\xi') = (2\pi)^{-n-1} \int e^{-ix'\xi'} u(x') dx'$$

である．$H_s(\mathbf{R}^n)$ にノルムを

$$\|u\|_s = \|\langle\xi'\rangle^s \hat{u}(\xi')\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

で導入する．

また次の関数空間も導入する．([2, III], 付録 B.1).

定義 2.2: $m,\, s \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}&H_{(m,s)}(\mathbf{R}^{n+1})\\ =&\{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{n+1} \mid \hat{u} \in L^2_{loc}, \int |\hat{u}(\xi)|^2 < \xi >^{2m} < \xi' >^{2s} d\xi < +\infty\}.\end{aligned}$$

ノルム $\|u\|_{(m,s)}$ を

$$\|u\|_{(m,s)} = \|\langle\xi\rangle^m \langle\xi'\rangle^s \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbf{R}^{n+1})}$$

で定義する．ここで $\xi = (\xi_0, \xi')$.

次の事実に注意しておく ([2, III], 付録 B.1)

(2.1) $$H_{(m_1,s_1)} \subset H_{(m_2,s_2)} \Longleftrightarrow m_2 \le m_1 \text{ and } m_2 + s_2 \le m_1 + s_1.$$

補題 **2.1.** $u \in H_{(1,l)}(\mathbf{R}^{n+1})$ とする．このとき

(2.2) $$\begin{aligned}&|\|u(t_1,\cdot)\|_l^2 - \|u(t_2,\cdot)\|_l^2|\\ \le &\int_{t_1}^{t_2} \|D_0 u(s,\cdot)\|_l^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u(s,\cdot)\|_l^2 ds\end{aligned}$$

が成り立つ．

証明 : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+1})$ で $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の急減少関数の全体を表わすものとする ([5],[4]). まず $u \in \mathcal{S}$ とし $\langle D'\rangle^l u = w$ とおこう．ただし

$$\langle D'\rangle^l u = (2\pi)^{-n-1} \int e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) \langle\xi'\rangle^l d\xi$$

である．このとき $w \in \mathcal{S}$ である．次のことに注意する．

$$\begin{aligned}&\|w(t_1,\cdot)\|^2 - \|w(t_2,\cdot)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dx_0}\|w(s,\cdot)\|^2 ds\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int \frac{d}{dx_0} w(s,x)\overline{w(s,x)} + w(s,x)\overline{\frac{d}{dx_0}w(s,x)} ds dx\\ &\le 2\int_{t_1}^{t^2}\int |\frac{d}{dx_0}w(s,x)||w(s,x)| ds dx\\ &\le \int_{t_1}^{t_2} \|D_0 u(s,\cdot)\|_l^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|u(s,\cdot)\|_l^2 ds\end{aligned}$$

ゆえに $u \in \mathcal{S}$ に対しては成立する．次に $u \in H_{(1,l)}(\mathbf{R}^{n+1})$ とする．$u_\epsilon \in \mathcal{S}$ を $u_\epsilon \to u$ in $H_{(1,l)}$ となるように選ぶ ($\mathcal{S}$ は $H_{(m,s)}$ で稠密である．Fourier 変換して考えれば容易に確かめられる)．このとき次は明らかである．

$$\int_{t_1}^{t_2} \|D_0 u_\epsilon(s,\cdot)\|_l^2 ds \to \int_{t_1}^{t_2} \|D_0 u(s,\cdot)\|_l^2 ds$$

なぜなら

$$\|u\|_{(1,l)}^2 = \int \|D_0 u(s,\cdot)\|_l^2 ds + \int \|u(s,\cdot)\|_{l+1}^2 ds \tag{2.3}$$

であるから．他方，写像

$$H_{(1,l)} \ni u \mapsto u(t,\cdot) \in H_{l+1/2}(\mathbf{R}^n)$$

は連続であるから ([2, III], 定理 B.1.11) $\epsilon \downarrow 0$ として $u \in H_{(1,l)}$ に対しても望むべき結果を得る． □

補題 **2.2.** $u \in H_{(1,l)}(\mathbf{R}^{n+1})$ とする．このとき次が成立する．

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t,\cdot)\|_l^2 = 0.$$

証明： 極限の存在は 補題 2.1 の (2.2) から従う. 他方

$$\int ||u(s,\cdot)||_l^2 ds < +\infty$$

であるから極限は 0 である． □

注意： l は負であっても成立することに注意せよ．

さて $\mathrm{supp} f \subset \{x_0 > t\}$ なる f が与えられたとき

$$Pu = f, \quad \mathrm{supp} u \subset \{x_0 > t\}$$

を満たす解 u を求めたい．この u を $e^{\gamma x_0} u$ の形で求めよう．

$$P(e^{\gamma x_0} u) = e^{\gamma x_0} P(x, D_0 - i\gamma, D') u,\ e^{-\gamma x_0} P e^{\gamma x_0} = P(x, D_0 - i\gamma, D')$$

であるから

$$P(x, D_0 - i\gamma, D') u = e^{-\gamma x_0} f \Longrightarrow P(e^{\gamma x_0} u) = f$$

が成立する．ただし $D' = (D_1, ..., D_n)$．さて次の様におこう．

$$P_\gamma(x, D) = P(x, D_0 - i\gamma, D').$$

補題 2.3. 任意の $l \in \mathbf{R}$ に対し γ_l があって

$$\int_{-\infty}^{t} \|u(s,\cdot)\|_l^2 ds \le \int_{-\infty}^{t} \|P_\gamma u(s,\cdot)\|_l^2 ds$$

が $u \in H_{(1,l)}$, $\gamma \ge \gamma_l$ に対して成立する．

証明：u, $v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+1})$ とする．また (u, v) で $L^2(\mathbf{R}^n)$ の内積を表わすとする:

$$(u, v) = \int u(x_0, x')\overline{v(x_0, x')} dx'$$

このとき次のことに注意する．

$$\begin{aligned}((D_0 - i\gamma)u, u) &= (P_\gamma u, u) - \sum_{j=1}^{n} (A_j(x) D_j u, u) - (B(x)u, u) \\ &= (P_\gamma u, u) - (u, \sum_{j=1}^{n} A_j D_j(x) u) - (B(x)u, u) - (u, Z(x)u)\end{aligned}$$

ここで $Z(x) = \sum_{j=1}^{n} D_j A_j(x)$ である．また $A_j(x) = A_j^*(x)$ を利用した．さて

$$-\sum_{j=1}^{n} A_j(x) D_j u = (D_0 - i\gamma)u - P_\gamma u + B(x)u \tag{2.4}$$

を上の式に代入すると

$$\begin{aligned}&((D_0 - i\gamma)u, u) - (u, (D_0 - i\gamma)u) = (P_\gamma u, u) - (u, P_\gamma u) \\ &+ (u, B(x)u) - (B(x)u, u) - (u, Z(x)u)\end{aligned}$$

両辺の虚数部分を考えると

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx_0}\|u(x_0,\cdot)\|^2 + 2\gamma\|u(x_0,\cdot)\|^2 \\ &= 2\mathrm{Im}(u, P_\gamma u) + 2\mathrm{Im}(Bu, u) + \mathrm{Im}(u, Zu)\end{aligned} \tag{2.5}$$

が従う．Cauchy-Schwarz の不等式から

$$|\mathrm{Im}(Bu, u)| + |\mathrm{Im}(u, Zu)| \le C\|u(x_0,\cdot)\|^2$$

が従うから (2.5) の右辺は

$$2\|u(x_0)\|\|P_\gamma u(x_0)\| + C\|u(x_0)\|^2$$

で上から評価される．従って

$$\frac{d}{dx_0}\|u(x_0)\|^2 + (2\gamma - C - 1)\|u(x_0)\|^2 \le \|P_\gamma u(x_0)\|^2$$

を得る．γ を $2\gamma - C - 1 \ge 1$ となるようにとって T から t まで上式を x_0 で積分すると

$$\int_T^t \|u(x_0)\|^2 dx_0 \le \|u(T)\|^2 + \int_T^t \|P_\gamma u(x_0)\|^2 dx_0$$

を得る．$T \to -\infty$ として $u \in \mathcal{S}$, $l = 0$ のときの結果を得る．

次に $\langle D'\rangle^l P_\gamma = P_\gamma \langle D'\rangle^l + [P_\gamma, \langle D'\rangle^l]$ を考察する． さて $[P_\gamma, \langle D'\rangle^l]\langle D'\rangle^{-l} = R_l$ とおくと

$$\langle D'\rangle^l P_\gamma = (P_\gamma + R_l)\langle D'\rangle^l$$

と書ける．ここで次の補題を認めよう ([5], 6 章，補題 6.2).

補題 **2.4.** $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ とする．このとき次が成立.

$$|(R_l(x_0)u, u)| \le C_l \|u\|^2.$$

$\langle D'\rangle^l u \in \mathcal{S}$ であるから上と同じ議論を繰り返えすことによって任意の l, 任意の $u \in \mathcal{S}$ に対して主張の成立することが分かる.

次に $u \in H_{(1,l)}$ とする．

$$u_\epsilon(x) := \int e^{-ix\xi - \epsilon|\xi|^2}\hat{u}(\xi)d\xi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+1})$$

とおこう．$\epsilon \downarrow 0$ のとき $u_\epsilon \to u$ in $H_{(1,l)}$ であることは容易に分かる．さて次のことに注意する．

$$\int_{-\infty}^t \|u_\epsilon(s)\|_l^2 ds \to \int_{-\infty}^t \|u(s)\|_l^2 ds,$$

$$\int_{-\infty}^t \|P_\gamma u_\epsilon(s)\|_l^2 ds \to \int_{-\infty}^t \|P_\gamma u(s)\|_l^2 ds.$$

このことから容易に結論が従う． □

命題 2.5. $Pw = f$ かつ或る $\gamma \geq \gamma_l$ に対して

$$e^{-\gamma x_0} w \in H_{(0,l+1)}, \quad e^{-\gamma x_0} f \in H_{(0,l)}$$

とする． このとき

$$\int_{-\infty}^{t} \|e^{-\gamma s} w(s,\cdot)\|_l^2 ds \leq \int_{-\infty}^{t} \|e^{-\gamma s} f(s,\cdot)\|_l^2 ds.$$

特に

$$f = 0 \ in \ x_0 < a \Longrightarrow u = 0 \ in \ x_0 < a$$

証明： γ_l として補題 2.3 の γ_l をとる．$u = e^{-\gamma x_0} w$, $g = e^{-\gamma x_0} f$ とおく．従って $u \in H_{(0,l+1)}$, $g \in H_{(0,l)}$ かつ $P_\gamma u = g$ である．従って (2.4) 式と (2.3) から $u \in H_{(1,l)}$ が従う．補題 2.3 によれば

$$\int_{-\infty}^{t} \|u(s,\cdot)\|_l^2 ds \leq \int_{-\infty}^{t} \|g(s,\cdot)\|_l^2 ds$$

がわかる．これが示すべき不等式であった．２番めの主張はこの不等式から明らかである． □

次に解の存在について考える．以下 $\langle u, v\rangle$ で $L^2(\mathbf{R}^{n+1})$ の内積を表わす．P の共役作用素 P^* は

$$P^* = D_0 + \sum_{j=1}^{n} D_j A_j(x) + B^*(x)$$

で定義される．$P_\gamma = e^{-\gamma x_0} P e^{\gamma x_0}$ であったから，$\langle P_\gamma u, v\rangle = \langle u, e^{\gamma x_0} P^* e^{-\gamma x_0}\rangle$．従って

$$(P_\gamma)^* = P^*_{-\gamma} = P^*(x, D_0 + i\gamma, D')$$

も明らかである．

補題 2.6. 任意の $l \in \mathbf{R}$ に対して γ_l^* があって

$$\int_{t}^{\infty} \|u(s,\cdot)\|_l^2 ds \leq \int_{t}^{\infty} \|P_\gamma^* u(s,\cdot)\|_l^2 ds$$

が全ての $u \in H_{(1,l)}$, $\gamma \geq \gamma_l^*$ に対して成立する．

証明：P_γ に対して行ったのと同じ推論を繰り返すことによって，$u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+1})$ に対し

$$-\frac{d}{dx_0}\|u(x_0)\|^2 + (2\gamma - C - 1)\|u(x_0)\|^2 \leq \|P^*_{-\gamma} u(x_0)\|^2$$

を得る．以下同様の議論を繰り返す． □

形式 (内積)

$$\langle u, v\rangle = \int u(x)\overline{v(x)}dx, \quad u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+1})$$

は $H_{(m,s)} \times H_{(-m,-s)}$ 上の双一次形式に拡張される．このとき Lax の双対定理によれば $H_{(m,s)}$ と $H_{(-m,-s)}$ は形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して互いに双対である ($H_{(m,s)}(\mathbf{R}^{n+1})$ が $L^2(\mathbf{R}_\xi^{n+1}; \langle\xi\rangle^{2m}\langle\xi'\rangle^{2s}d\xi)$ に等長同型であることに注意すると，L^2 空間の双対性に帰着される)．さて次の線形集合を考える．

$$E := \{P_{-\gamma}^* u \mid u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})\}$$

E 上の線形汎関数 T を次で定義する．

$$T : E \ni P_{-\gamma}^* u \mapsto \langle u, g\rangle$$

ここで $g \in H_{(0,l)}$ は前もって与えられているものとする．補題 2.6 から $\|u\|_{(0,-l)} \leq \|P_{-\gamma}^* u\|_{(0,-l)}$ である．ゆえに

$$|\langle u, g\rangle| \leq \|g\|_{(0,l)}\|u\|_{(0,-l)} \leq \|g\|_{(0,l)}\|P_{-\gamma}^* u\|_{(0,-l)}.$$

従って T は $E \subset H_{(0,-l)}$ 上 well defined である即ち $P_{-\gamma}^* u = 0$ なら $\langle g, u\rangle = 0$ が従う．ゆえに Hahn- Banach の定理 ([6, 3 章，定理 4a]) によって T は $H_{(0,-l)}$ 上に上からの評価を保ったまま拡張される．上で注意したことから $w \in H_{(0,l)}$ で $\|w_{(0,l)}\| \leq \|g\|_{(0,l)}$ および

$$T(\phi) = \langle \phi, w\rangle, \quad \forall\phi \in H_{(0,-l)}$$

を満たすものが存在する．定義から

$$T(P_{-\gamma}^* u) = \langle P_{-\gamma}^* u, w\rangle = \langle u, g\rangle, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$$

即ち $P_\gamma w = g$． 一方，$g \in H_{(0,l)}$ であるから再び (2.4) 式と (2.3) によって $w \in H_{(1,l-1)}$ となる．

注意 : Riesz の表現定理 ([6, 4 章，定理 2]) によれば $(H_{(m,s)})' \approx H_{(m,s)}$，他方 Lax の双対定理によれば $(H_{(m,s)})' \approx H_{(-m,-s)}$ である．勿論これらの等長同型を与える写像は異なる．

命題 **2.7.** ある $\gamma \geq \gamma_l$ に対して $e^{-\gamma x_0} f \in H_{(0,l)}$ とする．このとき $e^{-\gamma x_0} u \in H_{(1,l-1)}$ なる u で

$$Pu = f$$

を満たすものが存在する．ここで $x_0 < a$ で $f = 0$ なら u も $x_0 < a$ で 0 である．

証明 : $g := e^{-\gamma x_0} f \in H_{(0,l)}$ とおく．上の考察から $P_\gamma w = g$ を満たす w が存在する．

$$e^{-\gamma x_0} P(e^{\gamma x_0} w) = e^{-\gamma x_0} f$$

であるから $u = e^{\gamma x_0} w$ が求めるものである．　二番目の主張は命題 2.5 そのものである． □

3. 対称系でない強双曲系の例

ここでは，対称双曲系ではないが，或いは更につよく，対称化可能ではないが，かってな低階 $B(x)$ に対して初期値問題が C^∞ で一意可解となる簡単な例を示す．例を示す前に，対称化可能系の定義を与えておく．

定義 3.1: 次の一階の微分作用素の系

$$Lu = \sum_{j=0}^{n} A_j(x) \partial_j u$$

が対称化可能とは，$S(x,\xi)L(x,\xi)$ がエルミート (対称) になるような正定値エルミート (対称) 行列 $S(x,\xi)$ の存在するときをいう．但し，$L(x,\xi) = \sum_{j=0}^{n} A_j(x)\xi_j$ である．

注意 : L が対称化可能ならば，正則行列 $T(x,\xi)$ があって $T(x,\xi)L(x,\xi)T(x,\xi)^{-1}$ がエルミート (対称) となる．実際，$T(x,\xi) = S(x,\xi)^{1/2}$ とおけばよい．逆も正しい．T が与えられていれば $S = T^*T$ で S を定義すればよい．

さて次の 2×2 の系を $\mathbf{R}^2$ で考える．

$$Lu = \partial_t u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x u + B(t,x)u$$

ここで，$(t,x) \in \mathbf{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$ である．この系が対称化可能でないことは容易にわかる．実際 $t = 0$ で考えると

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

が対称となる正則行列 T があれば固有値 0 のみを持つ対称行列より零行列となって矛盾する.

さて次の初期値問題

$$\begin{cases} Lu = f \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

が任意の $f \in C^\infty(U)$, 任意の $u_0(x) \in C^\infty(U \cap \{t=0\})$ に対して，適当な原点の近傍で C^∞ 解をもつことを示そう．ここで U は原点の近傍である.

可解性を示すのに，次のように考える．L の代わりに

$$L_\epsilon = \partial_t + \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ t^2 & -\epsilon \end{pmatrix} \partial_x + B(t,x)$$

を考え

$$\begin{cases} L_\epsilon u^{(\epsilon)} = f \\ u^{(\epsilon)}(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

が解 $u^{(\epsilon)}$ をもち，かつ $u^{(\epsilon)}$ が $\epsilon \downarrow 0$ のとき，必要ならさらに部分列をとることによって，ある u に収束することを示す．この極限 u が求める解である．さて

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ t^2 & -\epsilon \end{pmatrix}$$

の固有値は $\pm\sqrt{t^2+\epsilon^2}$ で，$\epsilon > 0$ のとき実で相異なる．即ち $\epsilon > 0$ である限り狭義双曲型と呼ばれる系であり，解の存在は良く知られている．今の場合は 2 次元なので，Picard の逐次近似法によって解の存在を示すことができる．概略を述べる．$\epsilon > 0$ のとき，滑らかで正則な行列 $T(t,\epsilon)$ があって

$$T(t,\epsilon)^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ t^2 & -\epsilon \end{pmatrix} T(t,\epsilon) = \begin{pmatrix} \sqrt{t^2+\epsilon^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t^2+\epsilon^2} \end{pmatrix}$$

とできる．$T(t,\epsilon)^{-1} L_\epsilon T(t,\epsilon)$ を考えることによって,

$$L_\epsilon u = \partial_t u + \begin{pmatrix} \sqrt{t^2+\epsilon^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{t^2+\epsilon^2} \end{pmatrix} \partial_x u - C(t,x,\epsilon)u = f \tag{3.3}$$

を考えればよい．これを特性曲線の方法で解く．任意の (t,x), $t \ge 0$ に対して

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}x = \sqrt{s^2+\epsilon^2}, \quad x(t) = x \\ \frac{d}{ds}x = -\sqrt{s^2+\epsilon^2}, \quad x(t) = x \end{cases}$$

なる解を各々 $x_1(s;t,x)$, $x_2(s;t,x)$ とする．このとき (3.3) は

$$\frac{d}{ds}u_i(s,x_i(s;t,x)) \\ = \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(s,x_i(s;t,x),\epsilon)u_j(s,x_i(s;t,x)) + f_i(s,x_i(s;t,x)) \tag{3.4}$$

を満たす．ここで $i=1,2$. ただし $C=(c_{ij}(t,x,\epsilon))$, $f={}^t(f_1,f_2)$ とおいた．(3.4) を積分方程式に書き直すと

$$u_i(t,x) = u_i(0,x_i(0;t,x)) \\ + \int_0^t \{\sum_{j=1}^{2} c_{ij}(s,x_i(s;t,x),\epsilon)u_j(s,x_i(s;t,x)) + f_i(s,x_i(s;t,x))\}ds$$

となる．これを逐次近似法で解く．まず

$$u_i^{(0)}(t,x) = u_i(0,x_i(0;t,x)) = u_{0i}(x_i(0;t,x))$$

とおき一般に

$$u_i^{(n+1)}(t,x) = u_i(0,x_i(0;t,x)) \\ + \int_0^t \{\sum_{j=1}^{2} c_{ij}(s,x_i(s;t,x),\epsilon)u_j^{(n)}(s,x_i(s;t,x)) + f_i(s,x_i(s;t,x))\}ds$$

で $u_i^{(n+1)}(t,x)$ を定義する．ここで　$i=1,2.$

今 $(\bar{t},\bar{x})$ を固定し 2 本の特性曲線 $x_1(s;\bar{t},\bar{x})$, $x_2(s;\bar{t},\bar{x})$ $(s\le 0)$ と x 軸とで囲む領域を D とする．このとき，定数 C, M があって任意の $(t,x)\in D$ に対して

$$|u_i^{(n+1)}(t,x) - u_i^{(n)}(t,x)| \le CM^n t^n/n!$$

$i=1,2$, $n=0,1,2,...$ の成立することが示せる．ゆえに $u_i^{(n)}(t,x)$ $(i=1,2)$ はある $u_i(t,x)$ に D で一様収束する．解の一意性は (3.4) を使って，常微分方程式の解の一意性の証明と同様にして示される．また常微分方程式の解のパラメーターに関する微分可能性の証明と同様の議論を繰り返すことによって，解が滑らかであることも示せる．

従って問題は (3.2) の解 $u^{(\epsilon)}$ の ϵ に依らない評価を導くことである．このとき $u_0=0$ かつ前もって任意に与えられた M に対し $\partial_t^j f(0,x)=0$, $j=0,1,...,M-1$

と仮定してよい．なぜなら，$Lu = f$ の両辺を t で微分することによって順次 $\partial_t^j u(0,x) = u_j(x)$ が決まるので，この $u_j(x)$ を使って

$$u_M(t,x) = \sum_{j=0}^{M} \frac{1}{j!} u_j(x) t^j$$

とおくと $w = u - u_M$ は

$$\begin{cases} Lw = f_M \\ w(0,x) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

を満たす．このとき $\partial_t^j f_M(0,x) = 0$, $j = 0,1,...,M-1$ である．また $\partial_t^j w(0,x) = 0$, $j = 0,1,...,M$ でもある．(3.5) の解 w が求まれば $u = w + u_M$ として，(3.1) の解が求まる．

さて

$$M_\epsilon = \partial_t - \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ t^2 & -\epsilon \end{pmatrix} \partial_x$$

とする．このとき

$$M_\epsilon L_\epsilon = \partial_t^2 - (t^2 + \epsilon^2)\partial_x^2 + P(t,x,\epsilon)\partial_x + B(t,x)\partial_t + Q(t,x,\epsilon) \tag{3.6}$$

ここで

$$P(t,x,\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2t & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ t^2 & -\epsilon \end{pmatrix} B(t,x),$$
$$Q(t,x,\epsilon) = \partial_t B(t,x) - \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ t^2 & -\epsilon \end{pmatrix} \partial_x B(t,x)$$

である．次に

$$h = \partial_t^2 - (t^2 + \epsilon^2)\partial_x^2$$

とおこう．さて

$$hu \cdot \overline{\partial_t u} + \overline{hu} \cdot \partial_t u = \partial_t G_1(u) + \partial_x G_2(u) - R(u) \tag{3.7}$$

ここで

$$G_1(u) = |\partial_t u|^2 + (t^2 + \epsilon^2)|\partial_x u|^2,$$
$$G_2(u) = -(t^2 + \epsilon^2)(\partial_t u \cdot \overline{\partial_x u} + \overline{\partial_t u} \cdot \partial_x u), \quad R(u) = 2t|\partial_x u|^2$$

である．さて (3.7) に $e^{-\theta t}t^{-N}$ を乗じて $S=\{\delta \le t \le T \mid |x| \le c(T-t)\}$ で積分する．但し，c は $G_1(u)c - G_2(u) \ge 0$ ととる．即ち，∂S は space-like である．さて $e^{-\theta t}t^{-N}\partial_t = \partial_t(e^{-\theta t}t^{-N}) + \theta e^{-\theta t}t^{-N} + Ne^{-\theta t}t^{-N-1}$ ゆえ

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} e^{-\theta t}t^{-N}(G_1(u)dx - G_2(u)dt) + 2\int_S e^{-\theta t}t^{-N}|hu||\partial_t u|dxdt \\
\ge N\int_S e^{-\theta t}t^{-N-1}G_1(u)dxdt \\
+\theta\int_S e^{-\theta t}t^{-N}G_1(u)dxdt - \int_S e^{-\theta t}t^{-N}R(u)dxdt
\end{aligned}
$$

を得る．Cauchy-Schwarz の不等式より

$$
2t^{-N}|hu||\partial_t u| \le 3N^{-1}t^{-N+1}|hu|^2 + 3^{-1}Nt^{-N-1}|\partial_t u|^2
$$

であるから，∂S が空間的であることを考慮して

$$
\begin{aligned}
3N^{-1}\int_S e^{-\theta t}t^{-N+1}|hu|^2dxdt \\
+\int_{|x|\le c(T-\delta)} e^{-\theta\delta}\delta^{-N}G_1(u(\delta,x))dx \\
\ge (2N/3)\int_S e^{-\theta t}t^{-N-1}(|\partial_t u|^2 + (t^2+\epsilon^2)|\partial_x u|^2)dxdt \\
+\int_S e^{-\theta t}t^{-N-1}(3^{-1}N(t^2+\epsilon^2) - 2t^2)|\partial_x u|^2dxdt \\
+\theta\int_S e^{-\theta t}t^{-N}G_1(u)dxdt
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

を得る．次に

$$
\partial_t u \cdot \overline{u} + \overline{\partial_t u}\cdot u = \partial_t|u|^2
$$

に $e^{-\theta t}t^{-N-2}$ を乗じて S 上で積分すると

$$
\begin{aligned}
2\int_S e^{-\theta t}t^{-N-2}|\partial_t u||u|dxdt \\
\ge \int_{\partial S} e^{-\theta t}t^{-N-2}(-|u|^2dx) \\
+(N+2)\int_S e^{-\theta t}t^{-N-3}|u|^2dxdt + \theta\int_S e^{-\theta t}t^{-N-2}|u|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

再び Cauchy-Schwarz の不等式より

$$
2t^{-N-2}|\partial_t u||u| \le 3N^{-1}t^{-N-1}|\partial_t u|^2 + 3^{-1}Nt^{-N-2}|u|^2
$$

であるから，全体に N^2 を乗じて

$$
\begin{aligned}
&3N\int_S e^{-\theta t}t^{-N-1}|\partial_t u|^2dxdt\\
&+N^2\int_{|x|\le c(T-\delta)} e^{-\theta\delta}\delta^{-N-2}|u(\delta,x)|^2dx\\
&\ge (2N^3/3)\int_S e^{-\theta t}t^{-N-3}|u|^2dxdt\\
&+N^2\theta\int_S e^{-\theta t}t^{-N-2}|u|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

今

$$
E(u)=|\partial_t u|^2+t^2|\partial_x u|^2+N^2t^{-2}|u|^2,
$$
$$
E_\epsilon(u)=|\partial_t u|^2+(t^2+\epsilon^2)|\partial_x u|^2+N^2t^{-2}|u|^2
$$

とおくと $N/3\ge 2$ と N をとって，(3.8) と (3.9) から

補題 3.1. 次の不等式が成立する．

$$
\begin{aligned}
&3\int_S e^{-\theta t}t^{-N+1}|hu|^2dxdt+Ne^{-\theta\delta}\delta^{-N}\int_{|x|\le c(T-\delta)}E_\epsilon(u(\delta,x))dx\\
&\ge (N^2/3)\int_S e^{-\theta t}t^{-N-1}E(u)dxdt+\theta N\int_S e^{-\theta t}t^{-N}E(u)dxdt.
\end{aligned}
$$

さて今一般に $P(t,x,\epsilon)$ を (t,x,ϵ), $0\le\epsilon\le 1$ の滑らかな 2×2 行列とするとき $E(u)$ の形から

$$
\int_S e^{-\theta t}t^{-N+1}|P\partial_x u|^2dxdt\le C\int_S e^{-\theta t}t^{-N-1}E(u)dxdt,
$$
$$
\int_S e^{-\theta t}t^{-N+1}|P\partial_t u|^2dxdt\le C\int_S e^{-\theta t}t^{-N+1}E(u)dxdt
$$

となる ϵ に無関係な C がとれる．従って補題 3.1 を適用すると

命題 3.2. ある N があって

$$
\begin{aligned}
&\theta\int_S e^{-\theta t}t^{-N}E(u)dxdt+\int_S e^{-\theta t}t^{-N-1}E(u)dxdt\\
&\le C\int_S e^{-\theta t}t^{-N+1}|M_\epsilon L_\epsilon u|^2dxdt\\
&+Ce^{-\theta\delta}\delta^{-N}\int_{|x|\le c(T-\delta)}E_\epsilon(u(\delta,x))dx
\end{aligned}
$$

が成立する．ただし，C は $0 \le \epsilon \le 1$ に無関係な定数である．

今 $u^{(\epsilon)}$ を

$$\begin{cases} L_\epsilon u^{(\epsilon)} = f \\ u^{(\epsilon)}(0,x) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

の解としよう．$\partial_t^j f(0,x) = 0$, $j = 0, 1, ..., M$, $2M - N - 1 \ge 0$ と仮定してよかったので，$M_\epsilon L_\epsilon u^{(\epsilon)} = M_\epsilon f = O(t^M)$ となる．また (3.10) を順次 t で微分して $t = 0$ とおくことによって $\partial_t^j u^{(\epsilon)}(0,x) = 0$, $j = 0, 1, ..., M$ が従う．故に，$u^{(\epsilon)} = O(t^{M+1})$ となって

$$E_\epsilon(u^{(\epsilon)}(\delta, \cdot)) = O(\delta^{2M})$$

が従い

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^{-N} \int_{|x| \le c(T-\delta)} E_\epsilon(u^{(\epsilon)}(\delta, x)) dx = 0$$

を得る． 即ち，命題 3.2 の右辺で $\delta \downarrow 0$ とできる．これから $u^{(\epsilon)}$ の ϵ に依らない評価を得る．特に ϵ に依らない C があって

$$\int_{S_0} (|\partial_t u^{(\epsilon)}(t,x)|^2 + |\partial_x u^{(\epsilon)}(t,x)|^2 + |u^{(\epsilon)}(t,x)|^2) dt dx \le C$$

が成立する．ただし

$$S_0 = \{0 \le t \le T, |x| \le c(T-t)\}$$

である．この不等式と方程式から $u^{(\epsilon)}$ が S_0 で ϵ に依らず有界となることが分かる．(3.2) を x について微分した方程式を考えて，即ち $\partial_x u^{(\epsilon)}$ を未知関数とする方程式を考えて同じ議論を繰り返すことによって，$\partial_t^k \partial_x^j u^{(\epsilon)}$, $k + j \le 1$ が S_0 で ϵ によらず有界となることが分かる．以下同様にして $\partial_t^k \partial_x^j u^{(\epsilon)}$, $k + j \le p$ が S_0 で ϵ によらず有界となる．$p \ge 2$ ととって，Ascoli-Arzela の定理によれば，$\{u^{(\epsilon)}\}$ から一次導関数まで込めて一様収束する部分列が取り出せるがこの極限 w が

$$\begin{cases} Lw = f_M \\ w(0,x) = 0 \end{cases}$$

を満たすことは明らかである．

4. 命題 4.1 (基本命題) と主結果の証明

記号の準備

$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_n), \delta = (\delta_0, \delta_1, ..., \delta_n) \in \mathbb{Q}_+^{n+1}$ とする．$K(x, D)$ は $C^\infty(\Omega; \mathbb{C}^m)$ に働く微分作用素とする（一階とは限らない）. $y \in \mathbf{R}^{n+1}$ を固定して $K_\lambda(y, x, \xi)$ を次式で定義する．

$$K_\lambda(y, x, \xi) = K(\lambda^{-\delta} y + \lambda^{-\sigma} x, \lambda^\sigma \xi).$$

ただし λ は正のパラメーターで，$\lambda^\sigma \xi = (\lambda^{\sigma_0}\xi_0, \lambda^{\sigma_1}\xi_1, ..., \lambda^{\sigma_n}\xi_n)$ 等を表わす．明らかに，ある $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ があって

$$K_\lambda(y, x, \xi) = \sum_{j=s}^{\infty} K_j(y, x, \xi)\lambda^{-\epsilon j}$$

と形式的にかける．ここで $K_j(y, x, \xi)$ は (y, x, ξ) の多項式である．さて このような K_λ を一般的に扱うために $X = (X_1, ..., X_N) \in \mathbf{R}^N$ とする．

定義 4.1: $W \subset \mathbf{R}^N$ を開集合とする．$\mathcal{A}(W; M(m, \mathbb{C}))$ を係数とする，$\lambda^{-\epsilon}$ の形式的な有理型関数

$$A(X, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(X)\lambda^{-\epsilon j}, \quad A_j(X) \in \mathcal{A}(W; M(m, \mathbb{C})) \tag{4.1}$$

の全体を $\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ で表わす．($\epsilon \in \mathbb{Q}_+$). 有限個の負の j を除いて $A_j = 0$ である．$A_t(X) \neq 0$ なる最小の $t \in \mathbb{Z}$ に対して，$-t\epsilon$ で $A(X, \lambda)$ の order を定義する．すなわち

$$\mathrm{Ord}A = -t\epsilon.$$

また，$\sigma_p(A) = A_t(X)$, $\sigma_0(A) = A_0(X)$ と書くことにする．また次のようにおく．

$$\mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]] = \{A \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\} \mid \mathrm{Ord}A \leq 0\},$$
$$\mathcal{A}\{\{\tilde{\lambda}\}\} = \cup_{\epsilon\in\mathbb{Q}_+}\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$$
$$\mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]] = \cup_{\epsilon\in\mathbb{Q}_+}\mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$$

$\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ の元 $A(X, \lambda)$ で，ある R をとると, (4.1) が $|\lambda| > R$, $X \in W$ で収束し，和が λ を固定するとき，$X \in W$ の解析関数となるものの全体を $\mathcal{A}(W)\{\lambda^{-\epsilon}\}$ で表わす．さらに，$\mathrm{Ord} \leq 0$ であるものの全体を $\mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$ で表わす．

定義 4.2: $A(X, \lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ とする．$\mathrm{Ord}\lambda^{-k}A \leq 0$ のとき $A(X, \lambda) = O(\lambda^k)$ とかく．更に $\sigma_0(\lambda^{-k}A) = 0$ なら $A(X, \lambda) = o(\lambda^k)$ と書く．$A(X, \lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ が可逆とは $B_i(X, \lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ があって

$$B_1(X, \lambda)A(X, \lambda) = A(X, \lambda)B_2(X, \lambda) = I$$

となることとする．このとき，$B_1 = B_2$ なので，B_i の代わりに $A(X, \lambda)^{-1}$ と書く．

命題 **4.1.** (基本命題) $\sigma \geq \delta$, $\Omega \ni 0$ とする．$C^\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ 上の微分作用素 N と，スカラー値の $\phi(y,x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]]$ (W は $(y,x) \in \mathbf{R}^{2n+2}$ のある開集合) で次の条件を満たすものがあるとする．

$$L(x,\xi)N(x,\xi) = G(x,\xi), \quad G_\lambda(y,x,\phi_x(y,x,\lambda)) = 0,$$
$$G_\lambda^{(\alpha)}(y,x,\phi_x(y,x,\lambda)) = c_\alpha(y,x,\lambda)K(y,x,\lambda), \quad |\alpha| = 1$$

ここで，$c_\alpha(y,x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]]$ はスカラーで，$K(y,x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ は可逆でまた $c_{(1,0,\ldots,0),0}(y,x) \neq 0$ とする．$L(x,D)$ が $x=0$ で強双曲系ならば次が成立：

$$N_\lambda(y,x,\phi_x(y,x,\lambda))K(y,x,\lambda)^{-1} = O(1).$$

ただし，
$$\phi_x(y,x,\lambda) = (\partial\phi/\partial x_0, \partial\phi/\partial x_1, ..., \partial\phi/\partial x_n),$$
$$G_\lambda^{(\alpha)}(y,x,\xi) = (\partial/\partial\xi)^\alpha G_\lambda(y,x,\xi)$$
である．

この結果を解釈するために特性根の重複度が一定のときの単独方程式に対する Levi 条件の Flaschka と Strang [16] による定式化を思い出そう．P を m 階の単独作用素，p をその主表象とし，$\overline{z} = (\overline{x}, \overline{\xi})$ の近くで $p = eq^r$ の形をしているとする．ただし，$e(\overline{z}) \neq 0$, $q(\overline{z}) = 0$, $d_\xi q(\overline{z}) \neq 0$. このとき $\overline{z}$ の近くで Levi 条件が満たされるためには次のことが必要十分である：すなわち

$$q(x,\phi_x(x)) = 0, \quad \phi_x(\overline{x}) = \overline{\xi}$$

を満たす $\overline{x}$ の近くで定義された任意の $\phi \in C^\infty$ と任意の $f \in C^\infty$ ($\overline{x}$ の近くで定義された) に対して
$$P(e^{i\phi\lambda}f) = O(\lambda^{m-r}), \quad \lambda \to \infty$$
が $\overline{x}$ の近くで成立することである．少し粗くいうと，このことは

$$p(e^{i\phi\lambda}f) = O(\lambda^{m-r}) \Longrightarrow P(e^{i\phi\lambda}) = O(\lambda^{m-r})$$

を意味する．

今 $L_\lambda(y,x,D)N_\lambda(y,x,D)e^{i\phi(y,x,\lambda)}f$ を考えると，$K = O(\lambda^g)$ とするとき定理の仮定は
$$(L_\lambda N_\lambda)(e^{i\phi}f) = O(\lambda^g)$$

を意味する．今 L に低階 B を加えたものを考え

$$((L_\lambda + B)N_\lambda)(e^{i\phi}f) = O(\lambda^g)$$

が任意の B に対して成立するには，$N_\lambda(e^{i\phi}f) = O(\lambda^g)$ の成立することが必要である．実際これが定理の結論である．

注意：特に N として，$L(x,\xi)$ の余因子行列を選ぶと次の結果を得る：$\sigma \geq \delta$ とする．W は $\mathbf{R}^{2n+2}$ の開集合とする．$\phi(y,x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]]$ はスカラー値で

$$\begin{aligned} h_\lambda(y,x,\phi_x(y,x,\lambda)) &= 0, \\ h_\lambda^{(\alpha)}(y,x,\phi_x(y,x,\lambda)) &= \lambda^\mu(a_\alpha(y,x) + o(1)), \quad |\alpha| = 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

とする．ただし $\mu \in \mathbb{Q}$ で $a_{(1,0,\dots,0)}(y,x) \neq 0$ とする．$\Omega \ni 0$ で $L(x,D)$ は $x = 0$ で強双曲系とすると任意の $m-1$ 次小行列式 m に対して

$$m_\lambda(y,x,\phi_x(y,x,\lambda)) = O(\lambda^\mu)$$

が成立する．

証明：M を余因子行列とする．$L(x,\xi)M(x,\xi) = h(x,\xi)I$ ゆえ $G(x,\xi) = h(x,\xi)I$ とおくと

$$G_\lambda^{(\alpha)}(y,x,\phi_x) = h_\lambda^{(\alpha)}(y,x,\phi_x)I = \lambda^\mu(a_\alpha(y,x) + o(1))I.$$

従って $K(y,x,\lambda) = \lambda^\mu I$ ととると，$c_\alpha(y,x,\lambda) = a_\alpha(y,x) + o(1)$. また K は明らかに可逆である．命題 4.1 を適用して結論を得る．結論は次の様に理解できる：即ち，$\xi = \phi_x$ が "漸近的" に h_λ の二重零点 (mod $O(\lambda^\mu)$ で二重零点) ならば，$\xi = \phi_x$ は "漸近的" に m_λ の零点である (mod $O(\lambda^\mu)$ で零点である).

命題 4.1 を認めて，命題 4.1 から導かれる結果を調べる．そのために命題 4.1 で ϕ をどう選ぶか，また N をどう選ぶかを考察する．そのための準備として，まず h_λ の "漸近的な分解" について調べる．

$(0,e_n)$ を h の r 次特性点とする．まず $h_\lambda(y,x,\lambda)$ の分解について考える．U を $(0,0,e_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ のある近傍とする．定義によって $h_\lambda(y,x,\xi)$ は $|\lambda| > R$ のとき $(y,x,\xi',\xi_0) \in U \times \mathbf{R}$ で定義されている．

もっと一般に，U_1 を $\mathbf{R}^{n+1} \times (\mathbf{R}^n \setminus \{\xi_n = 0\})$ の開集合とし，$h(x,\xi)$ を $\mathcal{A}(U_1)$ を係数とする ξ_0 の m 次多項式で ξ について斉次 m 次とする．以下 $e'_n = (0,\dots,0,1) \in \mathbf{R}^n$ で U_1 は ξ' に関して錐的とし，$\sigma, \delta \in \mathbb{Q}_+^{n+1}$ は $\sigma = (\sigma_0,\dots,\sigma_{n-1},1)$, $\sigma_j < 1$ かつ $\sigma > \delta$ であるとする．さて U を $(0,0,e'_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ の近傍 とするとき $h_\lambda(y,x,\xi)$ は $R > 0$ があって $|\lambda| > R$ のとき，$(y,x,\xi',\xi_0) \in U \times \mathbf{R}$ で定義されている．

命題 **4.2.** (主表象の漸近的分解) h は上に述べたものとする．$z=(0,e_n)$ を h の m 次特性点とする．また $\mathrm{Ord}(\lambda^{-\sigma_0 m}h_\lambda)\le 0$ を満たすとする．このとき任意の開集合 $V\subset U$ に対して，開集合 $W\subset V$, $\epsilon\in\mathbb{Q}_+$, および $\omega^j(y,x,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$ があって $(1\le j\le m)$

$$\lambda^{-\sigma_0 m}h_\lambda(y,x,\xi)=\prod_{j=1}^{m}(\xi_0-\omega^j(y,x,\xi',\lambda))$$

と書ける．ここで

$$\omega^j(y,x,\xi',\lambda)=\sum_{p=0}\omega^j_p(y,x,\xi')\lambda^{-\epsilon p},\quad \omega^j_p(y,x,\xi')\in\mathcal{A}(W)$$

で，$\omega^j_0(y,x,\xi')$ は

$$h_z^{\sigma,\delta}(y,x,\xi)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-\sigma_0 m}h_\lambda(y,x,\xi)=0$$

の根である．

証明：証明は後で与える．

注意：一般に $h(x,\xi)$ を ξ_0 の多項式 (monic) とし，係数は $\mathcal{A}(W)$ とする．このとき，任意の開集合 $V\subset U$ に対して，開集合 $W\subset V$ と W 上の実解析関数 $\omega^j(x,\xi')\in\mathcal{A}(W)$ が存在して

$$h(x,\xi)=\prod_{j=1}^{m}(\xi_0-\omega^j(x,\xi'))$$

と書ける．従って，命題の実質的な主張は λ については $\lambda=\infty$ の近傍をとれるという部分である．

注意：W を小さくとり，$\overline{\lambda}$ を大きくとって $\lambda\ge\overline{\lambda}$ のとき，次のいずれかが成立するとしてよい．

$$|\omega^i(y,x,\xi',\lambda)-\omega^j(y,x,\xi',\lambda)|\ge c\lambda^{a_{ij}},\ (y,x,\xi')\in W,$$
$$\omega^i(y,x,\xi',\lambda)=\omega^j(y,x,\xi',\lambda),\ (y,x,\xi')\in W$$

ただし，$c>0$, $a_{ij}\in\mathbb{Q}_+$.

定義 4.2: $\omega(y,x,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(U)[\tilde{\lambda}]$ を $h_\lambda(y,x,\xi_0,\xi')=0$ の根とする．このとき，$\phi(y,x,\lambda)\in\mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]]$ が $(\hat{y},\hat{x})$ (W は $(\hat{y},\hat{x})$ の近傍) で ω の特性関数であるとは $(\hat{y},\hat{x})$ の近傍で

$$\phi_{x_0}=\omega(y,x,\phi_{x'},\lambda),\quad d_x\phi_0(\hat{y},\hat{x})\ne 0$$

が成立するときをいう．

さて，$z=(0,e_n)$ を h の r 次特性点とし，$\mathrm{Ord}\lambda^{-\gamma}h_\lambda \leq 0$ とする．但し，$\gamma=\sigma_0 r+(m-r)$ である．さて $h(x,\xi_0,\xi')$ は (x,ξ') が $(0,e_n')$ の近くを動くとき次の様に分解される

$$h(x,\xi)=\tilde{h}(x,\xi)e(x,\xi)$$

ここで，$\tilde{h}(x,\xi)$, $e(x,\xi)$ は各々，ξ_0 の r 次，$m-r$ 次の多項式で $e(0,e_n)\neq 0$ である．また $(0,e_n)$ は $\tilde{h}(x,\xi)$ の r 次特性点である．

$$\begin{aligned}e_\lambda(y,x,\xi) &= e(\lambda^{-\delta}y+\lambda^{-\sigma}x,\lambda^{\sigma}\xi)\\ &= \lambda^{m-r}e(\lambda^{-\delta}y+\lambda^{-\sigma}x,\lambda^{\sigma-1}\tilde{\xi},\xi_n)=\lambda^{m-r}(e(0,\xi_n e_n)+O(\lambda^{-\tilde{\epsilon}}))\end{aligned}$$

である (ここで $\tilde{\xi}=(\xi_0,...,\xi_{n-1})$)．また仮定より，$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\sigma_0 r}\tilde{h}_\lambda)\leq 0$ となって，$\tilde{h}$ に命題 4.2 を適用できる．すると ω^j があって

$$\lambda^{-\gamma}h_\lambda=\prod_{j=1}^{t}(\xi_0-\omega^j)^{r_j}\lambda^{-(m-r)}e_\lambda,\ \omega^j\in\mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}] \tag{4.3}$$

と書ける．ここで $r_1+\cdots+r_t=r$ で

$$\omega^j(X,\xi',\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}\omega_p^j(X,\xi')\lambda^{-\epsilon p},\ \omega^j\in\mathcal{A}(U)$$

は相異なる．また $X=(y,x)$ で U は $\mathbf{R}^{2n+2}\times(\mathbf{R}^n\setminus\{\xi_n=0\})$ の開集合である．

さて，$\phi(X,\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}\phi_p(X)\lambda^{-\epsilon p}\in\mathcal{A}(U)[[\lambda^{-\epsilon}]]$ を ω^j の $\hat{X}=(\hat{y},\hat{x})$ での特性関数とする．すなわち

$$\phi_{x_0}=\omega^j(X,\phi_{x'},\lambda),\quad d_x\phi_0(\hat{X})\neq 0.$$

さて，$a_j\in\mathbb{Q}$, $b_j\in\mathbb{Q}$ を次式で定義する．

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_0}^{r_j}h_\lambda(X,\phi_x) &= \lambda^{-a_j}(c_j(X)+o(1)),\ c_j(X)\neq 0,\\ &\prod_{k\neq j}(\omega^j(X,\phi_x,\lambda)-\omega^k(X,\phi_x,\lambda))^{r_k}\\ &= \lambda^{-b_j}(c_j'(X)+o(1)),\ c_j'(X)\neq 0.\end{aligned}$$

a_j, b_j が $\phi(X,\lambda)$ に依らないことは容易に分かる．また，$a_j=b_j-\gamma$ であることも容易に分かる．

注意 : $r_k=1$ のとき，ϕ を ω^k の特性関数とすれば，条件 (4.2) が満たされる．従って，N を余因子行列 M ととることによって命題 4.1 が適用できる．

$r_k\geq 2$ の場合には少し工夫を要する．そのために次の命題を用意する．

命題 **4.3.** (漸近的 Levi 条件) $L(x,D)$ は $x=0$ で強双曲系とする．$\omega^j \in \mathcal{A}(U)[\tilde{\lambda}]$ を h_λ の重複度 r_j の根とする．このとき，$R>0$ があって

$$M_\lambda^{(\alpha)}(X,\omega^j(X,\xi',\lambda),\xi')=0,\ (X,\xi')\in U,\ |\alpha|\le r_j-2,\ \lambda>R$$

が成立する．ただし，$M(x,\xi)$ は $L(x,\xi)$ の余因子行列である．

証明：証明は後で与える．

さてここで命題 4.1 の N をどう選ぶかという問題に戻る．

$$\partial_{\xi_0}^{r_j} h_\lambda(X,\omega^j(X,\xi',\lambda),\xi')=\lambda^{-a_j}(c_j(X,\xi')+o(1))$$

とおく．$c_j(X,\xi')\neq 0$ である．ここで

$$N^j(x,\xi)=\partial_{\xi_0}^{r_j-1}M(x,\xi)$$

で N^j を定義すると

$$L(x,\xi)N^j(x,\xi)=G^j(x,\xi)$$

とおいて次が成立する．

命題 **4.4.** $L(x,D)$ は $x=0$ で強双曲系とする．このとき任意の開集合 $V\subset U$ に対して開集合 $W\subset V$ があって

$$\begin{gathered}G_\lambda^j(X,\omega^j(X,\xi',\lambda),\xi')=0,\\ G_\lambda^{j(\alpha)}(X,\omega^j(X,\xi',\lambda),\xi')=c_\alpha^j(X,\xi',\lambda)K^j(X,\xi',\lambda),\ |\alpha|=1\end{gathered}$$

が成立する．ただし，$c_\alpha^j(X,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]]$ はスカラー，また $c_{(1,0,\ldots,0)}^j(X,\xi',\lambda)=1$ で，$K^j(X,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ は可逆で

$$\begin{aligned}&N_\lambda^j(X,\omega^j,\xi')K^j(X,\xi',\lambda)^{-1}\\ &=r_j\left(\partial_{\xi_0}^{r_j}h_\lambda(X,\omega^j,\xi')\right)^{-1}\partial_{\xi_0}^{r_j-1}M_\lambda(X,\omega^j,\xi')\end{aligned}$$

である．特に

$$\mathrm{Ord}\left(N_\lambda^j(X,\omega^j,\xi')K^j(X,\xi',\lambda)^{-1}\right)=\mathrm{Ord}\left(\partial_{\xi_0}^{r_j-1}M_\lambda(X,\omega^j,\xi')\right)+a_j$$

である．

証明：後で与える．

注意 : 命題の最初の 2 式は ω^j が G_λ^j の単純根であることを示している．命題 4.1 を適用すると

$$\mathrm{Ord}(\partial_{\xi_0}^{r_j-1}M_\lambda(X,\omega^j,\xi')) = O(\lambda^{-a_j})$$

を得る．

さて，$m(x,\xi)$ を ξ の $m-1$ 次斉次多項式とする．$\gamma=\sigma_0 r+(m-r)$ とおく．また $x=(\tilde{x},x_n)=(x_0,...,x_{n-1},x_n)$ と書く．ξ に対しても同様である．同様に多重指数に対しても，$\alpha=(\tilde{\alpha},\alpha_n)=(\alpha_0,...,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ と書く．命題 4.1 において，$N=N^j$ ととることによって，$m_\lambda(X,\xi)$ の order に関する情報が得られる．この情報から $m(x,\xi)$ の零点 $(0,e_n)$ の次数を調べるために，次の補題を用意しておく．

補題 4.5. $\sigma=(\overline{\sigma},...,\overline{\sigma},1)$, $\delta=(\overline{\delta},...,\overline{\delta})$, $\overline{\delta}=1-\overline{\sigma}$, $3\overline{\delta}>1$ とする．いま $(0,e_n)$ を m の $s(<r-2)$ 次の零点とする．即ち

$$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha m(0,e_n)=0,\quad \forall|\alpha+\beta|<s$$
$$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha m(0,e_n)\neq 0\quad \text{for some}\quad |\alpha+\beta|=s.$$

このとき $\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)>0$ でさらに $\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)(X,\xi)$ は ξ_0 の s 次多項式である．従って，$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)\leq 0$ あるいは $\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_\lambda(X,\xi))$ の ξ_0 に関する次数が $r-2$ 以上ならば

$$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha m(0,e_n)=0,\quad \forall|\alpha+\beta|<r-2$$

である．

証明 : 斉次関数に関する Euler の関係式によれば $|\alpha|\leq m-1$, $\alpha_n\neq 0$ ならば

$$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha m(0,e_n)=0$$

である．故に，$|\tilde{\alpha}+\beta|=s\leq r-3$ があって $m_{(\beta)}^{(\tilde{\alpha})}(0,e_n)\neq 0$ である．

$$S=\{(\tilde{\alpha},\beta)\mid|\tilde{\alpha}+\beta|=s, m_{(\beta)}^{(\tilde{\alpha})}(0,e_n)\neq 0\},\ \kappa=\max_{(\tilde{\alpha},\beta)\in S}F(\tilde{\alpha},\beta)$$
$$F(\tilde{\alpha},\beta)=-\gamma-\overline{\delta}|\beta|+\overline{\sigma}|\tilde{\alpha}|+m-|\tilde{\alpha}|=\overline{\delta}(r-|\tilde{\alpha}+\beta|)$$

とおく．さて，

$$\lambda^{-\gamma}m_\lambda(y,x,\xi)=\lambda^{-\gamma}m(\lambda^{-\delta}y+\lambda^{-\sigma}x,\lambda^\sigma\xi)=\sum I_j$$

とかく．ここで

$$I_j=\lambda^{-\gamma}\sum_{|\tilde{\alpha}+\beta|=j}m_{(\beta)}^{(\tilde{\alpha})}(0,\lambda\xi_n e_n)(\lambda^{-\delta}y+\lambda^{-\sigma}x)^\beta(\lambda^\sigma\tilde{\xi})^{\tilde{\alpha}}/\tilde{\alpha}!\beta!$$

である．従って I_j は

$$m^{(\tilde{\alpha})}_{(\beta)}(0,e_n)(y_n+\lambda^{\overline{\delta}-1}x_n)^{\beta_n}(\tilde{y}+\lambda^{\overline{\delta}-\overline{\sigma}}\tilde{x})^{\tilde{\beta}}\tilde{\xi}^{\tilde{\alpha}} \\ \times\xi_n^{m-1-|\tilde{\alpha}|}\lambda^{F(\tilde{\alpha},\beta)-1}/\tilde{\alpha}!\beta!$$

$|\tilde{\alpha}+\beta|=j$ の和である．また

$$I_s=\lambda^{\kappa-1}(J(y,x,\xi)+o(1))$$

で $J(y,x,\xi)$ は (y,x,ξ) の多項式で ξ_0 に関して高々 s 次である．また $S\neq\emptyset$ ゆえ J は非自明である． $j\geq s+1$ のとき

$$\max_{|\tilde{\alpha}+\beta|=j}F(\tilde{\alpha},\beta)<\max_{|\tilde{\alpha}+\beta|=s}F(\tilde{\alpha},\beta)$$

ゆえに

$$\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)=J(y,x,\xi)$$

となる．また $|\tilde{\alpha}+\beta|=s$ のとき $s\leq r-3$ から，$r-|\tilde{\alpha}+\beta|\geq 3$ で従って $\overline{\delta}(r-|\tilde{\alpha}+\beta|)\geq 3\overline{\delta}>1$ となり $\kappa>1$ で従って $\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)>0$ である． □

(4.3) から

$$h^{\delta,\sigma}_z(X,\xi)=e(z)\prod_{j=1}^{t}(\xi_0-\omega_0^j(X,\xi'))^{r_j}$$

であり，従って $h^{\delta,\sigma}_z$ は ξ_0 の r 次の多項式であることを思い出しておく．

$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)\leq 0$ ならこの補題 4.5 から，m の零点 $(0,e_n)$ の次数は少なくとも $r-2$ 次である．$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)>0$ のときも，次の命題によって結局は補題 4.5 が適用できる．

命題 4.6. $\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)>0$ 即ち $\tau\in\mathbb{Q}_+$ があって

$$m_\lambda(X,\xi)=\lambda^{\gamma}\sum_{j=0}\tilde{m}_j(X,\xi)\lambda^{-\epsilon j+\tau},\quad \tilde{m}_0(X,\xi)\neq 0$$

とする．更に，ある開集合 $V\subset U$ があって

$$m^{(\alpha)}_\lambda(X,\phi^j_x)=0,\ |\alpha|\leq r_j-2,\ \partial_{\xi_0}^{r_j-1}m_\lambda(X,\phi^j_x)=O(\lambda^{-a_j})$$

が ω^j のすべての特性関数 $\phi^j(X,\lambda)$ で $(X,d_x\phi^j(X,\lambda))\in V$ なるものに対して成立するとすると

$$\tilde{m}_0(X,\xi)=\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)(X,\xi)$$

は (X,ξ') がある開集合を動くとき，ξ_0 の多項式として，$h_z^{\sigma,\delta}(X,\xi)$ で割り切れる．但し，

$$h_z^{\delta,\sigma}(X,\xi) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\gamma} h_\lambda(X,\xi) = \sigma_0(\lambda^{-\gamma}h_\lambda)(X,\xi)$$

である．従って，特に $\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)$ の ξ_0 に関する次数は $h_z^{\sigma,\delta}$ のそれ以上，すなわち，r 次以上となる．

証明: $g = \lambda^{-\tau-\gamma}m_\lambda$ とおくと，$g = \sum_{j=0} \tilde{m}_j(X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}$ である．また，$g_0(X,\xi) = \tilde{m}_0(X,\xi)$ である．仮定は

$$g^{(\alpha)}(X,\phi_x^j,\lambda) = 0,\ |\alpha| \le r_j - 2,\ \partial_{\xi_0}^{r_j-1} g(X,\phi_x^j,\lambda) = O(\lambda^{-\tau-b_j})$$

である．ところで任意の $(\hat{X},\hat{\xi}') \in V'$ に対して，(ω^j の) 特性関数 $\phi^j(X,\lambda)$ で $d_{x'}\phi^j(\hat{X},\lambda) = \hat{\xi}'$ なるものが存在するので

$$\begin{gathered} g^{(\alpha)}(X,\omega^j(X,\xi',\lambda),\xi',\lambda) = 0, \quad |\alpha| \le r_j - 2 \\ \partial_{\xi_0}^{r_j-1} g(X,\omega^j(X,\xi',\lambda),\xi',\lambda) = O(\lambda^{-\tau-b_j}) \end{gathered} \tag{4.4}$$

が任意の $(X,\xi') \in V'$ で成立しているとしてよい．同じ理由で

$$\prod_{k\ne j} (\omega^j(X,\xi',\lambda) - \omega^k(X,\xi',\lambda))^{r_k} = \lambda^{-b_j}(c_j'(X,\xi') + o(1)) \tag{4.5}$$

が任意の $(X,\xi') \in V'$ に対して成立しているとしてよい．ここで $c_j'(X,\xi') \ne 0$．以下で命題 4.6 を少し一般的な形で証明する．

　まず記号を簡略化する．$\omega^j(x,s)$, $1 \le j \le t$ を s に関する形式的巾級数で相異なるものとする．

$$\omega^j(x,s) = \sum_{p=0} \omega_p^j(x)s^p, \quad \omega_p^j(x) \in \mathcal{A}(U).$$

ここで U は $\mathbf{R}^{n^*}$ のある開集合である．$f(x,y,s)$ を s の形式的巾級数で係数は $\mathcal{A}(U)[y]$ とする．

$$f(x,y,s) = \sum_{p=0} f_p(x,y)s^p$$

ただし，$f_p(x,y) \in \mathcal{A}(U)[y]$ である．更に y に関して高々 m_0 次とする．

補題 **4.7.** $s \to 0$ のとき

$$\prod_{k \neq j} (\omega^j(x,s) - \omega^k(x,s))^{r_k} = s^{b_j}(c_j(x) + o(s))$$

とする．ここで $c_j(x) \neq 0$ である．更に

$$f^{(k)}(x, \omega^j(x,s), s) = 0,\ k \leq r_j - 2,\ \ f^{(r_j-1)}(x, \omega^j(x,s), s) = o(s^{b_j})$$

$0 \leq j \leq t$ とする．ただし，$f^{(k)}(x,y,s) = \partial^k f(x,y,s)/\partial y^k$．このとき $f_0(x,y)$ は $\Omega(x,y) = \prod_{j=1}^t (y - \omega_0^j(x))^{r_j}$ で割り切れる．

補題 4.6 の証明 : $s = \lambda^{-\epsilon}$, $x = (X, \xi')$, $y = \xi_0$, $f = g(X, \xi, \lambda)$ ととって，補題 4.7 を適用する．$g_0(X,\xi) = \tilde{m}_0(X,\xi)$ であるから，命題 4.6 が証明される． □

補題 4.7 の証明 : 以下の簡明な証明は萬代武史氏に教えていただいた．
x を固定して考えればよいので次の補題を示せば十分である．

補題 **4.8.** $r_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\omega^j(s) \in \mathbb{C}[[s]]$ $(j = 1, ..., t)$ とし，すべての $j = 1, ..., t$ に対して，$b_j \in \mathbb{N}$, $c_j \neq 0$ があって，

$$\prod_{k=1, k\neq j}^{t} (\omega^j(s) - \omega^k(s))^{r_k} = s^{b_j}(c_j + o(1)) \quad (s \to 0) \tag{4.6}$$

とする．$f(s,y) \in (\mathbb{C}[[s]])[y]$ が，すべての $j = 1, ..., t$ に対して

$$(\partial_y^k f)(s, \omega^j(s)) = o(s^{b_j(r_j - k)}) \quad (s \to 0) \quad (0 \leq k \leq r_j - 1)$$

をみたすとすると，$f(0,y)$ は $\prod_{j=1}^t (y - \omega^j(0))^{r_j}$ で割り切れる．

証明 : 十分高いオーダーで切ることで $\omega^j \in \mathbb{C}[s]$ と仮定してよい．さて

$$F(s,y) = \prod_{j=1}^{t} (y - \omega^j(s))^{r_j}, \quad \deg_y F = \sum_{j=1}^{t} r_j = m$$

とおく．このとき

$$f(s,y) = q(s,y)F(s,y) + R(s,y),\ q, R \in (\mathbb{C}[[s]])[y],\ \deg_y R \leq m - 1$$

となる q, R がある．仮定から

$$(\partial_y^k R)(s,\omega^j(s)) = (\partial_y^k f)(s,\omega^j(s)) = o(s^{b_j(r_j-k)}) \tag{4.7}$$

$(0 \leq k \leq r_j - 1)$ s$\to$ 0 である．$R(0,y) \equiv 0$ を示せばよい．$\varepsilon > 0$ を十分小さくとると，(4.6) により，$0 < |s| < \varepsilon$ では $\{\omega^j(s) \mid j = 1,...,t\}$ は互いに相異なる．ゆえにこのような s を止めるごとに，部分分数展開によって，

$$\frac{R(s,y)}{F(s,y)} = \sum_{j=1}^{t} \frac{U_j(s,y)}{(y-\omega^j(s))^{r_j}},\ \mathrm{deg}_y U_j \leq r_j - 1$$

なる $U_j(s,y) \in \mathbb{C}[y]$ が（一意的に）存在する．すなわち，

$$R(s,y) = \sum_{j=1}^{t} U_j(s,y) \prod_{p=1,p\neq j}^{t} (y-\omega^p(s))^{r_p}. \tag{4.8}$$

これより，すべての $j = 1,...,t$ に対して

$$(\partial_y^k U_j)(s,\omega^j(s)) = o(s^{b_j(r_j-k-1)})\ (s \to 0)\ (0 \leq k \leq r_j - 1)$$

が示せる．帰納法による．$k = 0$ のときは,

$$R(s,\omega^j(s)) = U_j(s,\omega_j(s)) \prod_{p=1,p\neq j} (\omega^j(s) - \omega^p(s))^{r_p}$$

により，(4.6), (4.7) $(k = 0)$ からでる．$1 \leq k \leq r_j - 1$ とし，$k - 1$ までは正しいと仮定する．(4.8) から

$$\begin{aligned}(\partial_y^k R)(s,\omega^j(s)) &= (\partial_y^k U_j)(s,\omega^j(s)) \prod_{p=1,p\neq j}^{t} (\omega^j(s) - \omega^p(s))^{r_p} \\ &+ \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} (\partial_y^{k-l} U_j)(s,\omega^j(s)) (\partial_y^l \prod_{p=1,p\neq j}^{t} (y - \omega^p(s))^{r_p})|_{s=\omega^j(s)} \\ &= (\partial_y^k U_j)(s,\omega^j(s)) \prod_{p=1,p\neq j}^{t} (\omega^j(s) - \omega^p(s))^{r_p} + O(s^{b_j(r_j-k)})\end{aligned}$$

となり，(4.6), (4.7) により，$(\partial_y^k U_j)(s,\omega^j(s)) = O(s^{b_j(r_j-k-1)})$ となる．従って，

$$U_j(s,y) = \sum_{j=0}^{r_j-1} \frac{1}{k!} (\partial_y^k U_j)(s,\omega^j(s))(y-\omega^j(s))^k = o(1)$$

$(s \to 0)$ となり，$U_j(0,y) \equiv 0$ $(1 \leq j \leq t)$．従って，$R(0,y) \equiv 0$. $\square$

定理 1.5 の証明のために次の結果を準備する．

命題 4.9. (局所化の標準形) $\Lambda(h_z)$, $z=(0,e_n)$ を包合的な部分空間とする．このとき次の様な新座標系を選ぶことができる．

$$\tilde{y}=A\tilde{x},\quad y_n=x_n+Q(\tilde{x})/2,\quad y_0=x_0$$

で，$k\in\mathbb{N}$ と斉次多項式 q があって

$$h_z(y,\tilde{\eta})=q(\eta_0,...,\eta_k,y_{k+1},...,y_n)$$

ここで，A は正則行列，Q は二次形式である．

証明：後で与える．

さて $\epsilon>0$, $\epsilon_0>0$ を

$$0<\epsilon_0<\epsilon<\frac{1}{2(2r+1)},\quad \epsilon(r-2)<\epsilon_0 r$$

が成立するように選ぶ．更に

$$\sigma_0=\delta_0=\frac{1}{2}-\epsilon_0,\quad \sigma_j=\delta_j=\frac{1}{2}-\epsilon,\quad 1\le j\le k$$
$$\sigma_j=\delta_j=\frac{1}{2}+\epsilon,\quad k+1\le j\le n-1,\quad \sigma_n=1,\quad \delta_n=\frac{1}{2}+\epsilon$$

とおく．

補題 4.10. $\sigma,\delta\in\mathbb{Q}_+^{n+1}$ は上のように選ぶ．$y=(0,...,0,y_n)$ ととり

$$h_z(x,\tilde{\xi})=q(\xi_0,...,\xi_k,x_{k+1},...,x_n)$$

であるとする．このとき

$$h_z^{\sigma,\delta}(y,x,\xi)=c\xi_n^{m-r}\xi_0^r,\quad c\neq 0$$

となる．

証明：まず

$$\alpha=(\tilde{\alpha},\alpha_n)=(\alpha_0,\alpha',\alpha'',\alpha_n)=(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_k,\alpha_{k+1},...,\alpha_{n-1},\alpha_n),$$
$$x=(\tilde{x},x_n)=(x_0,x',x'',x_n)=(x_0,x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_{n-1},x_n)$$

と書くことにする．ξ についても同様．$\lambda^{-\gamma}h(\lambda^{-\delta}y+\lambda^{-\sigma}x,\lambda^{\sigma}\xi)=\sum_{j\geq r}I_j$ と書ける．ただし

$$I_j=\lambda^{-\gamma}\sum_{|\tilde{\alpha}+\beta|=j}h^{(\tilde{\alpha})}_{(\beta)}(0,\lambda\xi_n e_n)(\lambda^{-\delta}y+\lambda^{-\sigma}x)^{\beta}(\lambda\tilde{\xi})^{\tilde{\alpha}}/\tilde{\alpha}!\beta!$$

である．I_j の一般項は

$$\begin{aligned}h^{(\tilde{\alpha})}_{(\beta)}(0,e_n)(y_n+\lambda^{\epsilon-1/2}x_n)^{\beta_n}(x')^{\beta'}(x'')^{\beta''}x_0^{\beta_0}\\ \times\xi_0^{\alpha_0}(\xi')^{\alpha'}(\xi'')^{\alpha''}\xi_n^{m-|\tilde{\alpha}|}\lambda^{F(\tilde{\alpha},\beta)}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}F(\tilde{\alpha},\beta)=\epsilon_0 r+r/2-|\tilde{\alpha}+\beta|/2-\epsilon(\beta_n-|\beta'|+|\beta''|)\\ +\epsilon_0(\beta_0-\alpha_0)-\epsilon(|\alpha'|-|\alpha''|)\end{aligned}$$

である．$|\tilde{\alpha}+\beta|=l$ とするとき $\epsilon_0<\epsilon$ であるから

$$F(\tilde{\alpha},\beta)\leq-(l-r)/2+\epsilon|\tilde{\alpha}+\beta|+\epsilon_0 r\leq-(l-r)/2+\epsilon(l+r)$$

である．従って $l>r$ ならば右辺は負となり

$$h_z^{\sigma,\delta}(y,x,\xi)=\lim_{\lambda\to\infty}I_r$$

である．$|\tilde{\alpha}+\beta|=r$ かつ $h^{(\tilde{\alpha})}_{(\beta)}(0,e_n)\neq 0$ なら仮定

$$h_z(x,\xi)=q(\xi_0,...,\xi_k,x_{k+1},...,x_n)$$

から $\beta_0=0$, $\beta'=0$, $\alpha''=0$ が従い

$$F(\tilde{\alpha},\beta)=(\epsilon_0-\epsilon)(r-\alpha_0)\tilde{\alpha}$$

となって $F(\tilde{\alpha},\beta)\leq 0$ で しかも $F(\tilde{\alpha},\beta)=0\Longleftrightarrow\tilde{\alpha}_0=r$ である．このことから容易に結論が従う． □

補題 **4.11.** σ, δ は上の様にとる．ある $|\alpha+\beta|=s(\leq r-2)$ があって

$$\partial_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}m(0,e_n)\neq 0$$

とする．このとき，$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_{\lambda})>0$ でかつ $\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_{\lambda})(y,x,\xi)$ の ξ_0 に関する次数は $\leq s$ である．従って，$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_{\lambda})\leq 0$ 或いは $\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_{\lambda})(y,x,\xi)$ の ξ_0 に関する次数が $r-1$ 以上ならば

$$\partial_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}m(0,e_n)=0\quad\textit{for}\quad|\alpha+\beta|\leq r-2$$

である．

証明 : S を

$$S=\{(\tilde{\alpha},\beta)\mid|\tilde{\alpha}+\beta|=s, m_{(\beta)}^{(\tilde{\alpha})}(0,e_n)\neq 0\},\ \kappa=\max_{(\tilde{\alpha},\beta)\in S}F(\tilde{\alpha},\beta)$$

とおく．$|\tilde{\alpha}+\beta|=l\leq r-2$ のとき，

$$F(\tilde{\alpha},\beta)-1\geq\epsilon_0 r-(r-l)/2-1-\epsilon l\geq\epsilon_0 r-\epsilon(r-2)$$

である．ϵ,ϵ_0 の選びかたから，$\kappa-1>0$ である．

$$\lambda^{-\gamma}m(\lambda^{-\delta}y+\lambda^{-\sigma}x,\lambda^{\sigma}\xi)=\sum I_j$$

と書く．I_j の一般項は

$$\begin{aligned}&m_{(\beta)}^{(\tilde{\alpha})}(0,e_n)(y_n+\lambda^{\epsilon-1/2}x_n)^{\beta_n}(x')^{\beta'}(x'')^{\beta''}x_0^{\beta_0}\xi_0^{\alpha_0}\\&\qquad\times(\xi')^{\alpha'}(\xi'')^{\alpha''}\xi_n^{m-1-|\tilde{\alpha}|}\lambda^{F(\tilde{\alpha},\beta)-1}\end{aligned}$$

である．$I_s=\lambda^{\kappa-1}(J(y,x,\xi)+o(1))$ に注意する．ここで $J(y,x,\xi)$ は (y,x,ξ) の多項式で，ξ_0 に関して $\deg\leq s$ である．以下証明は補題 4.5 のそれと同じ． □

注意 :

$$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)\leq 0\Longrightarrow m_{(\beta)}^{(\tilde{\alpha})}(0,e_n)=0,\ |\tilde{\alpha}+\beta|<r-1.$$

定理 1.3 および 1.5 の証明を始める．

定理 1.3 の証明 : 命題 4.4 から，命題 4.1 を $N=N^j$, $G=G^j$ として適用できる．この結果，m をかってな $m-1$ 次行列式因子とするとき，

$$\partial_{\xi_0}^{r_j-1}m_\lambda(X,\phi_x(X,\lambda))=O(\lambda^{-a_j})\tag{4.9}$$

が成立する．ただし，$\phi(X,\lambda)$ は $\omega^j(X,\xi',\lambda)$ の特性関数である．まず，$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)\leq 0$ ならば，補題 4.5 から $m(x,\xi)$ は $(0,e_n)$ で $r-2$ 次で零になる．次に $\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)>0$ とする．(4.9) と命題 4.3 を合わせると，命題 4.6 の仮定が満たされることが分かる．従って，$\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)(X,\xi)$ は ξ_0 の多項式として，$h_z^{\sigma,\delta}(X,\xi)$ で割り切れる．従って，$\sigma_p(\lambda^{-\gamma}m_\lambda)(X,\xi)$ は r 次以上 (ξ_0 について) の多項式である．ゆえに再び補題 4.5 から

$$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha m(0,e_n)=0,\quad|\alpha+\beta|<r-2$$

が従う． □

定理 1.5 の証明:同様にして，まず，$\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda) \le 0$ ならば，補題 4.11 から $m(x,\xi)$ は $(0,e_n)$ で $r-1$ 次で零になる．故に $\mathrm{Ord}(\lambda^{-\gamma}m_\lambda) > 0$ とする．このとき命題 4.6 が適用できて，$\sigma_p(\lambda^{-\gamma}M_\lambda)(X,\xi)$ は ξ_0^r で割り切れる．従って，$\sigma_p(\lambda^{-\gamma}M_\lambda)(X,\xi)$ は ξ_0 に関して r 次以上である．ゆえに再び補題 4.11 が適用できて

$$\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha m(0,e_n) = 0, \quad |\alpha+\beta| < r-1$$

が従う． □

5. 基本命題 (命題 4.1) の証明

N を $C^\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ 上の m' 次の微分作用素とし，命題 4.1 の条件を満たすとする．

$$H(x,\xi) = -i\sum_{|\alpha|=1} L^{(\alpha)}(x,\xi)N_{(\alpha)}(x,\xi)$$

とおく．このとき，$L(x,D)N(x,D) = G(x,D) + H(x,D)$ で

$$(L_\lambda(X,D) + bB)N_\lambda(X,D) = G_\lambda(X,D) + H_\lambda(X,D) + bBN_\lambda(X,D)$$

である．ここで $B \in M(m,\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}$ である．$\phi(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]]$ は

$$G_\lambda(X,\phi_x) = 0,\ G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x) = c_\alpha(X,\lambda)K(X,\lambda),\ |\alpha| = 1$$

を満たすとする．

ここでは $L_\lambda + bB$ に対する漸近解 $\tilde{\mathcal{U}}_\lambda$ で $(L_\lambda + bB)$ に対する a priori 評価に矛盾するものを構成する．そのために，まず

$$G_\lambda(X,D) + H_\lambda(X,D) + bBN_\lambda(X,D)$$

に対する漸近解 $\mathcal{U}_\lambda$ を構成し，次に $N_\lambda\mathcal{U}_\lambda \ne 0$ を示し，従って，$\tilde{\mathcal{U}}_\lambda = N_\lambda\mathcal{U}_\lambda$ が $L_\lambda + bB$ の漸近解となっていることを示す．まず，$L_\lambda + bB$ に対する a priori 評価を与えよう．

命題 5.1. $\sigma,\delta \in \mathbb{Q}_+^{n+1}$ とする．$\Omega \ni 0$ で $P(x,D) = L(x,D) + bB$ に対する Cauchy 問題が，$x=0$ で両方向に well posed とする．このとき，任意のコンパクト集合，W, $V \subset \mathbf{R}^{n+1}$, 任意の $T>0$ に対して，$C>0$, $\overline{\lambda} > 0$, $p \in \mathbb{N}$ があって，

$$|u|_{C^0(W^t)} \le C\lambda^{\overline{\sigma}p}|P_\lambda u|_{C^p(W^t)},\ |u|_{C^0(W_t)} \le C\lambda^{\overline{\sigma}p}|P_\lambda u|_{C^p(W_t)}$$

が任意の $u \in C_0^\infty(W;\mathbb{C}^m)$, $\lambda \geq \overline{\lambda}$, $y \in V$, $|t| < T$ に対して成立する．ただし，$\overline{\sigma} = \max_j \sigma_j$ である．

証明 : $\forall W$, $\forall V$ に対して，コンパクト集合 $K \subset \Omega$ と $\lambda_1 > 0$ があって

$$v(x) = u(\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta} y) \in C_0^\infty(K;\mathbb{C}^m)$$

が任意の $u \in C_0^\infty(W;\mathbb{C}^m)$, 任意の $\lambda \geq \lambda_1$, $y \in V$ に対して成立する．なぜなら $x \notin K$ なら $|x| \geq a > 0$ となるよう K をとると，$x \notin K$, $y \in V$, $\lambda \geq \lambda_1$ なら，$|x - \lambda^{-\delta} y| \geq a/2$ とできる．従って，λ_1 を十分大きく選ぶと，

$$|\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta} y| \geq 2R, \quad W \subset \{|x| \leq R\}$$

となって $\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta} y \notin W$．ゆえに $v = 0$ となって結論を得る．命題 1.1 から

$$|v|_{C^0(K^s)} \leq C|Pv|_{C^p(K^s)}, \ |s| \leq \tau.$$

さて，$s = s(\lambda) = \lambda^{-\sigma_0} t + \lambda^{-\delta_0} y_0$ ととると，$y \in V$, $\lambda \geq \lambda_2$, $|t| < T$ のとき $|s(\lambda)| < \tau$ となる．$Pv(x) = (P_\lambda u)(\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta} y)$ であるから

$$\begin{aligned} |v|_{C^0(K^{s(\lambda)})} &= |u|_{C^0(W^t)}, \\ |(P_\lambda u)(\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta} y)|_{C^p(K^{s(\lambda)})} &\leq \lambda^{\overline{\sigma} p} |P_\lambda u|_{C^p(W^t)} \end{aligned}$$

以上のことから必要な結果を得る． □

さて ϕ を命題 4.1 の ϕ とする．$E_0(y,x,\lambda) = \exp\{i\phi(y,x,\lambda)\lambda^\tau\}$ とおく．ここで，$\tau > 0$ は後で決める．$G(x,D)$ は $C^\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ 上の $m'+1$ 次の微分作用素であるから，

$$\begin{aligned} E_0^{-1} G_\lambda(X,D) E_0 = \lambda^{\tau(m'+1)} [G_\lambda(X,\phi_x) + \lambda^{-\tau}\{ &\sum_{|\alpha|=1} G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x) D^\alpha \\ &+ i \sum_{|\alpha|=2} G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x) \frac{D^\alpha \phi}{\alpha!}\} + O(\lambda^{-2\tau})] \end{aligned}$$

である．例えば Chazarain [15] を見よ．$X = (y,x)$ であった．$G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x) = c_\alpha(X,\lambda) K(X,\lambda)$, $|\alpha| = 1$ を考慮に入れて，次のようにおこう．

$$\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(X,\lambda) D^\alpha = l(X,D,\lambda) = \sum_{j=0} l_j(X,D) \lambda^{-\epsilon j},$$

$$G'(X,\lambda) = i \sum_{|\alpha|=2} G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x) D^\alpha \phi / \alpha!$$

ここで，仮定から

$$l_0(X,\xi)=\sum_{j=0}^{n}a_j(X)\xi_j$$

であって，$a_0(X)\neq 0$ である．これらの記号を使うと

$$\begin{aligned}E_0^{-1}(L_\lambda+bB)N_\lambda E_0=\lambda^{\tau m'}\{&K(X,\lambda)l(X,D,\lambda)+G'(X,\lambda)\\&+H_\lambda(X,\phi_x)+bBN_\lambda(X,\phi_x)+O(\lambda^{-\tau+m'+1})\}\end{aligned}$$

となる．ここで，次の事実を使った：$\sigma_j\leq 1$ であるから，N が $C^\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ 上の m 次の微分作用素ならば，$N_\lambda=O(\lambda^m)$ である．

$K(X,\lambda)$ は仮定から可逆であるから，右辺は

$$\begin{aligned}\lambda^{\tau m'}K(X,\lambda)\{&l(X,D,\lambda)+K(X,\lambda)^{-1}G'+K^{-1}H_\lambda\\&+bK^{-1}BN_\lambda+O(\lambda^{-\tau+g'})\}\end{aligned}\tag{5.1}$$

ただし，ここで $g'\leq m'+1+\mathrm{Ord}K^{-1}$．さて命題 4.1 が成立しないとする．即ち，$N_\lambda(X,\phi_x)K(X,\lambda)^{-1}=(c_{ij}(X,\lambda))$ と記すとき，i,j があって，

$$c_{ij}(X,\lambda)-\lambda^\nu c_{ij}(X)=o(\lambda^\nu)\quad(\lambda\to\infty)$$

なる $\nu\in\mathbb{Q}_+$ がある．ただし，$c_{ij}(X)$ は恒等的には 0 でない．故にある開集合 U があって，U 上 $c_{ij}(X)\neq 0$ である．$B\in M(m,\mathbb{C})$ を，(j,i) 要素以外は 0 で (j,i) 要素は $\beta\in\mathbb{C}$ となる定数行列とする．このとき

$$\mathrm{Tr}BN_\lambda K^{-1}-\beta c_{ij}(X)\lambda^\nu=o(\lambda^\nu)$$

は明らかである．$\beta\in\mathbb{C}$ は $\mathrm{Im}\beta c_{ij}(X)\neq 0$ がある開集合 $X\in U'\subset U$ で成立するように選ぶ．さて

$$A(b,X,\lambda)=-K^{-1}(G'+H_\lambda+bBN_\lambda)$$

とおく．$\mathrm{Tr}A=-\mathrm{Tr}\{(G'+H_\lambda+bBN_\lambda)K^{-1}\}$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}A=-\mathrm{Tr}(BN_\lambda K^{-1}),\quad \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}A+\beta c_{ij}(X)\lambda^\nu=o(\lambda^\nu)$$

が成立する．(5.1) 式を次の様に書き換える．

$$\lambda^{\tau m'}K\{l(X,D,\lambda)-A(b,X,\lambda)+\lambda^{-\tau+g'}A'(b,X,D,\lambda)\}\tag{5.2}$$

ここで，

$$A'_j(b,X,\xi)=\sum_{j=0}A'_j(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}$$

で $A'_j(b,X,\xi)$ は (b,X,ξ) の多項式で，ξ に関して，$m'+1$ 次以下である．ここで次の命題を準備する．W を $X\in\mathbf{R}^N$ の開集合とする．

命題 **5.2.** (漸近的対角化) $R(X,\xi,\lambda)=\sum_{j=0}R_j(X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}$, $\epsilon\in\mathbb{Q}_+$ を考える．ここで $R_j(X,\xi)$ は ξ の一次以下の多項式である．$H(X,\lambda)\in\mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ とする．このとき，任意の開集合 $V\subset W$ に対して，開集合 $U\subset V$ と可逆な $\Gamma(X,\lambda)\in\mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で

$$\begin{aligned}&(R(X,D,\lambda)-H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda)\\ &=\Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda)-\oplus_{j=1}^m\lambda_j(X,\lambda)+K(X,\lambda)),\\ &\mathrm{Ord}\Gamma,\ \mathrm{Ord}\Gamma^{-1}\le c(m)\mathrm{Ord}H\end{aligned}$$

を満たすものがある．ただし，$\lambda_j(X,\lambda)\in\mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $K(X,\lambda)\in\mathcal{A}(U)[[\tilde{\lambda}]]$ で

$$\sum_{j=1}^m\lambda_j(X,\lambda)-\mathrm{Tr}H(X,\lambda)=O(1)$$

注意：普通の意味で対角化している訳ではない．例えば

$$\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

のような操作を行っている．重要なことは，$\mathrm{Ord}\Gamma$ が $c(m)\mathrm{Ord}H$ で評価されることである．固有値や Tr と Jordan 標準形は同じレベルで不変な訳ではない．例えば上の例のように定数行列

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

を $\mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で考えると

$$\mathrm{rank}(A-E)=1,\quad \mathrm{rank}(\sigma_0(\Gamma^{-1}A\Gamma)-E)=0,\quad \Gamma=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であるが $\mathrm{Tr}\sigma_0(\Gamma^{-1}A\Gamma)=\mathrm{Tr}A$ である．

証明：証明は後で行う．

さて，I を $\mathbf{R}$ の開区間とする．$A(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I\times U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ に注意して，命題 5.2 を (5.2) 式に適用すると，$I_1\times U_1\subset I\times U$ と可逆な $\Gamma(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I_1\times U_1)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1}\le c(m)\mathrm{Ord}A$ があって，

$$\begin{aligned}&(l(X,D,\lambda)-A(b,X,\lambda))\Gamma(b,X,\lambda)\\ &=\Gamma(b,X,\lambda)(l-\oplus_{j=1}^m\lambda_j(b,X,\lambda)+K'(b,X,\lambda))\end{aligned}$$

ただし，$K'(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I_1\times U_1)[[\tilde{\lambda}]]$ で

$$\mathrm{Tr}A-\sum_{j=1}^m\lambda_j=O(1)$$

である．さて，OrdΓ, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1}$ が τ に依らない評価をもつので

$$\lambda^{-\tau+g'}A'(b,X,D,\lambda)\Gamma=\lambda^{-\tau+g'+2d}\Gamma A''(b,X,D,\lambda)$$

とかける．ただし，$d=c(m)\mathrm{Ord}A$ で

$$A''(b,X,\xi,\lambda)=\sum_{j=0}A''_j(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}$$

である．τ を十分大にとって $-\tau+g'+2d=-\tau+g''$ は負で大になるようにできる．

$$(l-A+\lambda^{-\tau+g'}A')\Gamma=\Gamma(l-\oplus_{j=1}^m\lambda_j+K'+\lambda^{-\tau+g''}A'')$$

今すべての j に対して $\partial\mathrm{Im}\lambda_j/\partial b=O(1)$ と仮定すると，

$$\frac{\partial}{\partial b}(\sum\mathrm{Im}\lambda_j)=O(1)$$

となって，

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}A+\beta c_{ij}(X)\lambda^\nu=o(\lambda^\nu),\ \mathrm{Tr}A-\sum_{j=1}^m\lambda_j(b,X,\lambda)=O(1)$$

に反する．故にある j_0 及び開集合 $I_2\times U_2\subset I_1\times U_1$ があってある $\nu_2\in\mathbb{Q}_+$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Im}\lambda_{j_0}(b,X,\lambda)-\lambda^{\nu_2}c_2(b,X)=o(\lambda^{\nu_2}),\quad c_2(b,X)\not\equiv 0$$

が成立する．このことから，ある $\nu_1\in\mathbb{Q}_+$ があって

$$\mathrm{Im}\lambda_{j_0}(b,X,\lambda)-\lambda^{\nu_1}c_1(b,X)=o(\lambda^{\nu_1}),\quad c_1(b,X)\not\equiv 0$$

が従う．更に必要ならば，$I_2\times U_2$ を縮めて任意の j に対して

$$\lambda_{j_0}(b,X,\lambda)-\lambda_j(b,X,\lambda)=O(1)$$

或いは

$$\lambda_{j_0}(b,X,\lambda)-\lambda_j(b,X,\lambda)=\lambda^{\nu'_j}(c'_j(b,X)+o(1))$$

のいずれかが成立するとしてよい．但し，$\nu'_j\in\mathbb{Q}_+$, $c'_j(b,X)\not\equiv 0$ である．

補題 **5.3.** $\theta(b,X,\lambda)=\lambda_{j_0}(b,X,\lambda)$ とおく．任意の $(\hat{b},\hat{X})\in I\times U$ に対し開近傍 $J\times V$ と，$\psi(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(J\times V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で次の条件を満たすものが存在する：

$$l(X,\partial,\lambda)\psi(b,X,\lambda)-\theta(b,X,\lambda)=O(1),\ \partial=(\frac{\partial}{\partial x_0},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$$

で，ψ は次のいずれかを満たす.

$$-\mathrm{Im}\psi(b,X,\lambda)\leq -c\{x_0-\hat{x}_0+|x'-\hat{x}'|^2\}\lambda^{\nu_1},(b,X)\times V,x_0\geq\hat{x}_0,\lambda:\text{大}$$

或いは

$$-\mathrm{Im}\psi(b,X,\lambda)\leq -c\{\hat{x}_0-x_0+|x'-\hat{x}'|^2\}\lambda^{\nu_1},(b,X)\times V,x_0\leq\hat{x}_0,\lambda:\text{大}$$

証明：$\theta(b,X,\lambda)=\sum_{j=-\mu}\theta_j(b,X,)\lambda^{-\epsilon j}$ であった．ここで $\mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X)\neq 0$, $(b,X)\in J\times V$, $\nu_1=-\mu'\epsilon$.さてψ を次の形で求めよう.

$$\psi(b,X,\lambda)=\sum_{j=-\mu}\psi_j(b,X)\lambda^{-\epsilon j}$$

$l(X,\partial,\lambda)\psi(b,X,\lambda)=\theta(b,X,\lambda)$ は

$$l_0(X,\partial)\psi_p(b,X)=\theta_p(b,X)-\sum_{i+j=p,j\leq p-1}l_i(X,\partial)\psi_j(b,X)$$

と書ける．さて，$-\mu\leq j<-\mu'$ 対して，θ_j は実数値であるから，ψ_j, $-\mu\leq j<\mu'$ を実数値として求めるこができる．次に

$$\begin{aligned}l_0(X,\partial)\psi_{-\mu'}(b,X)\\=\theta_{-\mu'}(b,X)-\sum_{i+j=-\mu',j\leq\mu'-1}l_i(X,\partial)\psi_j(b,X)\\=f_{-\mu'}(b,X)\end{aligned}$$

を考える．さて，$\mathrm{Im}f_{-\mu'}(b,X)=\mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X)\neq 0$ in $I_2\times U_2$ であるから，$\psi_{\mu'}$ を初期条件

$$\psi_{-\mu'}(b,y,\hat{x}_0,x')=i|x'-\hat{x}'|^2$$

の下で解く.

$$l_0(X,\partial)=\sum_{j=0}^{n}a_j(X)\partial_j,\quad a_0(X)\neq 0$$

であった．従って $\mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X) \geq c' > 0$ ならば，

$$\mathrm{Im}\psi_{-\mu'}(b,X) \geq c\{x_0 - \hat{x}_0 + |x' - \hat{x}'|^2\},\ c > 0,\ x_0 \geq \hat{x}_0$$

が成立する．$\mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X) \leq -c' < 0$ ならば

$$\mathrm{Im}\psi_{-\mu'}(b,X) \geq c\{\hat{x}_0 - x_0 + |x' - \hat{x}'|^2\},\ c > 0,\ x_0 \leq \hat{x}_0$$

が成立する．次に，$j \geq -\mu' + 1$ に対して，$\psi_j(b,X)$ を

$$\psi_j(b,y,\hat{x}_0,x') = 0$$

なる初期条件の下で解く．従って

$$-\mathrm{Im}\psi_j(b,X) \leq C\{|x_0 - \hat{x}_0| + |x' - \hat{x}'|^2\},\ j \geq -\mu' + 1$$

さて

$$-c|x_0 - \hat{x}_0| + C|x_0 - \hat{x}_0|\lambda^{-\epsilon} \leq -c|x_0 - \hat{x}_0|/2$$

であるから λ を大にして結論を得る． □

さて

$$E_1(b,X,\lambda) = \exp\left(i\psi(b,X,\lambda)\right)$$

とおく．補題 5.3 から

$$E_1^{-1} l(X,D,\lambda) E_1 = l(X,D,\lambda) + \tilde{\lambda}_{j_0}$$

となる．$\tilde{\lambda}_{j_0} - \lambda_{j_0} = O(1)$ である．従って

$$E^{-1} Q_\lambda E \Gamma = \lambda^{\tau m'} K\Gamma(l + \lambda_{j_0} I - \oplus\lambda_j + K'' + \lambda^{-\tau+g''} A'')$$

ここで $E = E_0 E_1$, $K'' \in \mathcal{A}(I_2 \times U_2)[[\tilde{\lambda}]]$，$Q_\lambda = (L_\lambda + bB)N_\lambda$ である．

補題 5.4. 任意の $s \in \mathbb{N}$ に対して $(\hat{b},\hat{X})$ の近傍 $I_s \times U_s \subset I_2 \times U_2$ とベクトル $\mathcal{U}_s(b,X,\lambda) \in \mathcal{A}(I_s \times U_s)[[\tilde{\lambda}]]$ で，$\sigma_0(\mathcal{U}_s)(\hat{b},\hat{X}) \neq 0$ なるものがあって

$$(l + \lambda_{j_0} I - \oplus\lambda_j + K'' + \lambda^{-\tau+g''} A'')\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-s})$$

を満たす.

証明：必要ならば，行と列を入れ替えて次のように仮定できる.

$$-\lambda_{j_0}I+\oplus\lambda_j-K''-\lambda^{-\tau+g''}A''=R=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$$

で

$$R_{ij}(b,X,D,\lambda)=R'_{ij}(b,X,\lambda)+R''_{ij}(b,X,D,\lambda),$$

$(ij)=(11),(12),(21)$. また

$$R_{22}=\oplus r_j(b,X,\lambda)+R'_{22}(b,X,\lambda)+R''_{22}(b,X,D,\lambda)$$

ここで，$R'_{ij}(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I_2\times U_2)[[\tilde{\lambda}]],(ij)=(11),(12),(21),(22)$. また $r_j(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I_2\times U_2)\{\{\tilde{\lambda}$
$\mathrm{Ord}r_j>0$ さらに

$$R''_{ij}(b,X,\xi,\lambda)=\lambda^{-\epsilon}\sum_{k=0}R_{ijk}(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon k}$$

必要なら $I_2\times U_2$ を更に縮めて，$\sigma_p(r_j)(b,X)\neq 0$, $(b,X)\in I_2\times U_2$ としてよい.

$$\Lambda=I\oplus\{\oplus\lambda^{-\kappa_j}\},\ \kappa_j=\mathrm{Ord}r_j\in\mathbb{Q}_+$$

とおき，

$$\Lambda(l-R)\mathcal{U}_s=O(\lambda^{-s})$$

を解けばよい.

$$\mathcal{U}_s=\begin{pmatrix}\mathcal{U}_s^I\\ \mathcal{U}_s^{II}\end{pmatrix}$$

とおくと方程式は次の様になる.

$$\begin{aligned}(l-R'_{11})\mathcal{U}_s^I&=\{\lambda^{-\epsilon}R'''_{11}\mathcal{U}_s^I+R'''_{12}\mathcal{U}_s^{II}\}=O(\lambda^{-s}),\\ \{\oplus\lambda^{-\kappa_j}r_j\}\mathcal{U}_s^{II}&=\lambda^{-\epsilon}\{R'''_{21}\mathcal{U}_s^I+R'''_{22}\mathcal{U}_s^{II}\}=O(\lambda^{-s})\end{aligned}$$

ここで

$$R'''_{ij}(b,X,\xi,\lambda)=\sum_{k=0}R'''_{ijk}(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon k}$$

で $R'''_{ijk}(b,X,\xi)$ は ξ の多項式で高々 $m'+1$ 次である. $\mathcal{U}_s$ を次の形で求めよう.

$$\mathcal{U}_s^I=\sum_{j=0}\mathcal{U}_{sj}^I(b,X)\lambda^{-\epsilon j},\ \ \mathcal{U}_s^{II}=\sum_{j=0}\mathcal{U}_{sj}^{II}(b,X)\lambda^{-\epsilon j}$$

このとき方程式は

$$(l_0(X,D)-\sigma_0(R_{11}(b,X))\mathcal{U}^{I}_{sp} = F^{I}(\mathcal{U}^{I}_{sj}; j\le p-1, \mathcal{U}^{II}_{sj}; j\le p)$$
$$\{\oplus\sigma_p(r_j)(b,X)\}\mathcal{U}^{II}_{sp} = F^{II}(\mathcal{U}^{I}_{sj}; j\le p-1, \mathcal{U}^{II}_{sj}; j\le p-1)$$

ここで $\oplus\sigma_p(r_j)(b,X)$ は正則なので，$\mathcal{U}^{II}_{sp}$ は

$$\mathcal{U}^{II}_{sp} = \{\oplus\sigma_p(r_j)(b,X)\}^{-1}F^{II}$$

として求まる．即ち，I-成分については微分方程式を解き，II-成分については代数方程式を解くことによって $\mathcal{U}_s$ が求まる．さて今までに得たことをまとめておく：

$$E^{-1}(L_\lambda+bB)E\{E^{-1}N_\lambda E\Gamma\}\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-s})$$

ここで

$$E^{-1}N_\lambda E = \lambda^{\tau m'}\{N_\lambda(X,\phi_x)+\lambda^{-\tau+g_0}N'(b,X,D,\lambda)\},$$
$$N'(b,X,\xi,\lambda) = \sum_{j=0} N'_j(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}$$

ここで，$N'_j(b,X,\xi)$ は ξ の高々 m' 次の多項式で，g_0 は τ に無関係である．

$E^{-1}N_\lambda E\Gamma\mathcal{U}_s$ が $L_\lambda+bB$ に対する漸近解であることを示すには次のことを示せば十分である．

補題 5.5. $\mathcal{V}_s = N_\lambda(X,\phi_x)\Gamma\mathcal{U}_s$ とおく．このとき，τ, s に依らない $c_i>0$ があって

$$\mathrm{Ord}\mathcal{V}_s > -c_1 \quad \textit{if} \quad \tau>c_2,\ s>c_3$$

証明： まず $\mathcal{U}_s$ は

$$(l+\tilde\lambda_{j_0}I - A + \lambda^{-\tau+g'}A')\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-s+s_0})$$

を満たす．ここで s_0 は s,τ には依らない．$\lambda^{g'}A'\Gamma = O(\lambda^{g_1})$ で g_1 を決める (τ に依らない).

$$T(X,\lambda) = -K^{-1}(X,\lambda)(G'(X,\lambda)+H_\lambda(X,\phi_x))$$

とおく．$\kappa = \max(\mathrm{Ord}T, \mathrm{Ord}\Gamma, 0)$ とする．$\tau>c_2 = 3c(m)\kappa+g_1$, $s>c_3 = 3c(m)\kappa+s_0$ ととる．このとき

$$(l+\tilde\lambda_{j_0}I - A)\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$$

次のことを思い出そう．$\mathrm{Ord}\Gamma\mathcal{U}_s \geq -c(m)\kappa$ を考慮すると，$\tilde{\lambda}_{j_0}$ は A の “固有値” である．

$$A = -K^{-1}(G' + H_\lambda + bBN_\lambda) = T(X,\lambda) - bK^{-1}BN_\lambda$$

従って，$\mathrm{Ord}\mathcal{V}_s = O(\lambda^{-g_2}), g_2 > c_1 = c_3 + \mathrm{Ord}K^{-1}$ を仮定すると，$N_\lambda\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-g_2})$ となって

$$K^{-1}BN_\lambda\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$$

となる．故に $A\Gamma\mathcal{U}_s + K^{-1}(G' + H_\lambda)\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$ となって

$$(l + \tilde{\lambda}_{j_0}I - T(X,\lambda))\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$$

が成立する．従って $\tilde{\lambda}_{j_0}$ は T の “固有値” でもある．ところが $T(X,\lambda)$ は b に依存しないので $\tilde{\lambda}_{j_0}$ が b に依存することに反する．以下このことを確かめる．

最初に $\tilde{\lambda}_{j_0}(b,X,\lambda)$ が $T(X,\lambda)$ の “固有値” であることを示す．まず補題 5.2 によると開集合 $V \subset U_s$ と $\Delta(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ があって $(\mathrm{Ord}\Delta, \mathrm{Ord}\Delta^{-1} \leq c(m)\mathrm{Ord}T)$

$$(l - T)\Delta = \Delta(l - \oplus_1^m a_j(X,\lambda) + T')$$

ただし $T' \in \mathcal{A}(V)[[\tilde{\lambda}]]$ が成立する．さて，$\mathcal{W}_s = \Delta^{-1}\Gamma\mathcal{U}_s$ とおくことによって

$$\begin{aligned} O(\lambda^{-c_3}) = (l + \tilde{\lambda}_{j_0}I - T)\Gamma\mathcal{U}_s &= (l + \tilde{\lambda}_{j_0}I - T)\Delta\mathcal{W}_s \\ &= \Delta(l + \tilde{\lambda}_{j_0}I - \oplus_1^m a_j(X,\lambda) + T')\mathcal{W}_s \end{aligned}$$

従って次を得る．

$$(l + \tilde{\lambda}_{j_0}I - \oplus a_j(X,\lambda) + T')\mathcal{W}_s = O(\lambda^{-2c(m)\kappa})$$

ところで，$0 \leq \mathrm{Ord}\mathcal{U}_s \leq \mathcal{W}_s + 2c(m)\kappa$ 故，$\mathrm{Ord}\mathcal{W}_s \geq -2c(m)\kappa$. 従って

$$\mathcal{W}_s = \lambda^{-\kappa'}\mathcal{W}'_s, \quad \sigma_0(\mathcal{W}') \neq 0, \quad \kappa' \leq 2c(m)\kappa$$

とおける．故に

$$(l + \tilde{\lambda}_{j_0}I - a_j(X,\lambda))\mathcal{W}' = O(1)$$

このことから，ある k があって $\tilde{\lambda}_{j_0}(b,X,\lambda) - a_k(X,\lambda) = O(1)$ となる．これは矛盾である．なぜなら

$$\frac{\partial \mathrm{Im}\tilde{\lambda}_{j_0}}{\partial b} = \lambda^{\nu_1}c_2(b,X), \quad \frac{\partial a_k}{\partial b} = 0$$

故に

$$\mathrm{Ord}\{N_\lambda(X,\phi_x)\Gamma\mathcal{U}_s\} \geq -c_1$$

である.

命題 4.1 の証明の完成 : $\tilde{\mathcal{U}}_s = E^{-1}N_\lambda E\Gamma\mathcal{U}_s$ とおく. τ を $\tau > c_2$ かつ

$$\mathrm{Ord}\{\lambda^{-\tau+g_0}N'(b,X,D,\lambda)\Gamma\mathcal{U}_s\} < -c_1$$

であるようにとって固定する. このとき

$$\mathrm{Ord}\tilde{\mathcal{U}}_s > \tau m' - c_1$$

で s に依らない. また

$$(L_\lambda + bB)E\tilde{\mathcal{U}}_s = EO(\lambda^{-s})$$

また, $E = \exp(i\phi\lambda^\tau + i\psi)$, $\mathrm{Im}(\phi\lambda^\tau + \psi) = \mathrm{Im}\psi$ であるから, 以下 Ivrii-Petkov [21] にならえばよい.

6. 漸近的対角化 (命題 5.2 の証明)

まずいくつかの記号を導入する.

$$J(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M(r,\mathbb{C}),\ J(r_1,...,r_s) = \oplus_{j=1}^s J(r_j)$$

とおく.

定義 6.1: $J = J(r_1,...,r_s) \in M(m,\mathbb{C})$ とする. ただし, $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s$ (≥ 1) である. $K \in M(m,\mathbb{C})$ が J に付随した Silvester 行列とは K が次の形をしているときをいう : $K = (K_{ij})_{1\leq i,j\leq s}$ を J に対応したブロック分けとしたとき K_{ij} は次の形をしている.

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ k_{r_i1}^{ij} & \cdots & k_{r_it}^{ij} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ t \leq \min(r_i, r_j)$$

$S(J)$ で J に付随する Silvester 行列の全体とする.

定義 6.2: $J=J(p_1,...,p_s)$, $J(q_1,...,q_t)\in M(m,\mathbb{C})$ を考える．但し，$p_1\geq\cdots\geq p_s$, $q_1\geq\cdots\geq q_t$ である．0 を各々，$m-s$, $m-t$ 個加えて

$$(p_1,...,p_s,0,...,0),(q_1,...,q_t,0,...,0)\in\mathbb{N}^m$$

とする．$\mathbb{N}^m$ に辞書式順序を導入する．この順序で

$$(p_1,...,p_s,0,...,0)\geq(q_1,...,q_t,0,...,0)$$

のとき

$$J(p_1,...,p_s)\geq J(q_1,...,q_t)$$

と定義する．

補題 **6.1.** $J=J(p_1,...,p_s)$, $J'=J(q_1,...,q_t)\in M(m,\mathbb{C})$ とし，$K\in S(J)$ とする．このとき $J+K$ が J' に相似ならば，$J'\geq J$ である．さらに $J+K$ が J に相似なら，$K=O$ である．

証明： $K=(K_{ij})$ と書く．さて

$$\begin{aligned} g(K_{ij})&=k^{ij}_{p_i\mu}\lambda^{\mu-1}+\cdots+k^{ij}_{p_i1},\quad \mu=\min(p_i,p_j),\ i\neq j\\ g(K_{ii})&=-\lambda^{p_i}+k^{ii}_{p_ip_i}\lambda^{p_i-1}+\cdots+k^{ii}_{p_i1}\end{aligned}\tag{6.1}$$

とおく．まず，λ-行列 $(J+K)-\lambda I_m$ は $I_p\oplus G(\lambda)$ に対等であることは容易に分かる．但し $p=m-s$ で

$$G(\lambda)=(g(K_{ij}))_{1\leq i,j\leq s}$$

である．今 $J+K$ と J' が相似とする． $J'-\lambda I_m$ は $I_q\oplus G'(\lambda)$, $G'(\lambda)=\oplus_1^t\lambda^{q_i}$, $q=m-t$ に同等であるから，$I_p\oplus G(\lambda)$ は $I_q\oplus G'(\lambda)$ に対等である．もし $q<p$ とすると $I_q\oplus G'(\lambda)$ の p 次行列式因子は λ^k $(k\geq1)$ の形をしている．他方 $I_p\oplus G(\lambda)$ の p 次行列式因子は 1 であるから明らかに矛盾である．従って $q\geq p$ であることが分かる．このことから

$$G(\lambda)\quad \text{対等}\quad I_{q-p}\oplus(\oplus_1^t\lambda^{q_j})$$

が従う．便宜上 $q_{t+1}=\cdots=q_s=0$ とおくと，$G(\lambda)$ は $\oplus_1^s\lambda^{q_j}$ に対等である．d'_k で $\oplus_{j=1}^s\lambda^{q_j}$ の k 次行列式因子 $D'_k(\lambda)$ の次数を表わすとすると $d'_j=q_s+\cdots+q_{s-j+1}$ かつ $D'_j(\lambda)=\lambda^{d'_j}$ $(1\leq j\leq s)$ であることが容易に分かる．(6.1) から $G(\lambda)$ の k 次主小行列式は

$$\epsilon\lambda^{p_s+\cdots+p_{s-k+1}}+\text{lower order}\quad(\epsilon=\pm1)$$

であることが分かる．この k 次小行列式は $D'_k(\lambda)$ で割り切れるから次が従う．

$$d'_k = q_s + \cdots + q_{s-k+1} \le p_s + \cdots + p_{s-k+1}$$

このことから，

$$(p_1, ..., p_s, 0, ..., 0) \le (q_1, ..., q_t, 0, ..., 0)$$

を得る．即ち $J' \ge J$.

次に，$J+K$ が J に相似とする．従って $G(\lambda)$ は $\oplus_1^s \lambda^{p_j}$ に対等である．$g(K_{sj})$, $g(K_{js})$ は λ^{p_s} で割り切れるから，$g(K_{sj})$, $g(K_{js})$ が λ の $p_s - 1$ 次以下の多項式であることに注意すると

$$g(K_{sj}) = g(K_{js}) = 0, \quad j \neq s$$

を得る．また $g(K_{ss})$ も λ^{p_s} で割り切れるから $g(K_{ss}) = -\lambda^{p_s}$ でもある．従って

$$G(\lambda) = G_1(\lambda) \oplus \{-\lambda^{p_s}\}$$

ただし，$G_1(\lambda) = (g(K_{ij}))_{1 \le i,j \le s-1}$. ゆえに，$G_1(\lambda)$ は $\oplus_1^{s-1} \lambda^{p_j}$ に対等である．以下帰納法によって $g(K_{ij}) = 0$, $i \neq j$ かつ $g(K_{ii}) = -\lambda^{p_i}$ が従う．このことから $K = O$ を得る．　□

補題 **6.2.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$,

$$\sigma_p(H)(X) = J(r_1, ..., r_s) = J \in M(m, \mathbb{C})$$

を考える．このとき，可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$, $\sigma_0(\Gamma) = I_m$ 　があって

$$(R(X,D,\lambda) + H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda) = \Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda) + \tilde{H}(X,\lambda))$$

ここで $\tilde{H}(X,\lambda) = \sum \tilde{H}_j(X)\lambda^{-\epsilon j} \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ で

$$\sigma_p(\tilde{H})(X) = J, \quad \mathrm{Ord}\tilde{H} = \mathrm{Ord}H, \quad \tilde{H}_j(X) \in \mathcal{A}(W; S(J)).$$

証明： 省略．V.I.Arnold [12], Kajitani [22] を見よ．

補題 **6.3.** $H(X,\lambda)$, $\tilde{H}(X,\lambda)\in\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$;

$$H(X,\lambda)=\sum_{j=s}H_j(X)\lambda^{-\epsilon j},\quad \tilde{H}(X,\lambda)=\sum_{j=s}\tilde{H}_j(X)\lambda^{-\epsilon j}$$

を考える．いま

$$(R(X,D,\lambda)-H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda)=\Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda)-\tilde{H}(X,\lambda))$$

とする．ここで $\Gamma(X,\lambda)=\sum_{j=0}\Gamma_j(X)\lambda^{-\epsilon j}\in\mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$, $\det\Gamma_0\neq 0$ 従って可逆とする．このとき

$$\mathrm{Tr}H_j=\mathrm{Tr}\tilde{H}_j,\quad j<0$$

が従う.

証明： まず，次のことに注意する.

$$\sum_{i+j=p}H_{s+i}\Gamma_j-\Gamma_j\tilde{H}_{s+i}=C_{s+p},\quad p=0,1,...,\;\; C_q=0,\;\; q<0$$

さて $\Gamma^{-1}=\sum_{j=0}\Gamma'_j\lambda^{\epsilon j}$ とおき，

$$\sum_{i=0}^{l}\sum_{p=i}^{l}\Gamma'_{l-p}(H_{i+s}\Gamma_{p-i}-\Gamma_{p-i}\tilde{H}_{i+s})=\sum_{p=0}^{l}\Gamma'_{l-p}C_{s+p}.$$

ここで，$\sum_{p=i}^{l}\Gamma'_{l-p}\Gamma_{p-i}=\delta_{l-i,0}I_m$ を利用して

$$-\tilde{H}_{l+s}+\sum_{i=0}^{l}\sum_{q+r=l-i}\Gamma'_rH_{i+s}\Gamma_q=\sum_{p=0}^{l}\Gamma'_{l-p}C_{p+s}$$

を得る．$l+s<0$ ならば右辺は 0 であるから $l+s<0$ のとき

$$\mathrm{Tr}\tilde{H}_{l+s}=\sum_{i=0}^{l}\sum_{q+r=l-i}\mathrm{Tr}(\Gamma_q\Gamma'_rH_{i+s})$$

$$=\mathrm{Tr}(\sum_{i=0}^{l}(\sum_{q+r=l-i}\Gamma_q\Gamma'_r)H_{i+s})=\mathrm{Tr}H_{l+s}$$

これが示すべきことであった. □

次に $H(X,\lambda)=\sum H_j(X)\lambda^{-\epsilon j}\in\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ を考える．ここで $\sigma_p(H)$ は

$$\sigma_p(H)(X)=\oplus_{i=1}^{r}B_i(X)\in M(m,\mathbb{C})$$

すなわちブロック対角で対角ブロックは

$$B_j(X)=\begin{pmatrix}\lambda_j(X) & \epsilon_{j1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \epsilon_{jr_{j-1}} \\ & & & \lambda_j(X)\end{pmatrix}\in M(r_j,\mathbb{C}),\ \epsilon_{ji}=0\quad\text{or}\quad 1$$

の形をしているとする．ただし $\lambda_i(X)-\lambda_j(X)\neq 0$ in W if $i\neq j$ であるとする．

補題 **6.4.** $H(X,\lambda)$ は上の条件を満たすとする，このとき，$\Gamma_0=I,\Gamma(X,\lambda)\in\mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$ なる可逆な Γ と $\tilde{H}(X,\lambda)=\sum\tilde{H}_j(X)\lambda^{-\epsilon j}$, $\sigma_p(\tilde{H})=\sigma_p(H)$ なる $\tilde{H}$ があって

$$(R(X,D,\lambda)+H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda)=\Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda)+\tilde{H}(X,D,\lambda))$$

が成立する．ここで $\tilde{H}_j(X)$ はブロック対角である：

$$\tilde{H}_j(X)=\oplus_{i=1}^{r}\tilde{H}_{ji}(X)$$

証明： 例えば Wasow [10] を見よ．

定義 6.3: $J=J(r_1,...,r_s)\in M(m,\mathbb{C})$ とする．このとき

$$\Lambda(\lambda,\epsilon)=\oplus_1^s\Lambda_{r_j}(\lambda,\epsilon),$$
$$\Lambda_k(\lambda,\epsilon)=\oplus_{i=1}^{k}\lambda^{-i\epsilon}=\mathrm{diag}(\lambda^{-\epsilon},\lambda^{-2\epsilon},...,\lambda^{-k\epsilon})\in M(k,\mathbb{C}),\epsilon\in\mathbb{Q}_+$$

を J に付随した shearing 行列という．(例えば Wasow [10] を見よ).

さて，$\Lambda(\lambda,\epsilon)\in\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$，$\mathrm{Ord}\Lambda(\lambda,\epsilon)=-\epsilon$ で $\Lambda(\lambda,\epsilon)$ は可逆かつ

$$\Lambda^{-1}=\bigoplus_{j=1}^{s}\Lambda_{r_j}(\lambda,-\epsilon),\quad \mathrm{Ord}\Lambda^{-1}=\max_j(r_j\epsilon)$$

である．$\Lambda(\lambda,\epsilon)$ が J に付随する shearing 行列のとき次のことに注意しよう．

$$\Lambda(\lambda,\epsilon)^{-1}J\Lambda(\lambda,\epsilon)=\lambda^{-\epsilon}J.$$

また，$A=(a_{ij})\in M(m,\mathbb{C})$ とするとき

$$\Lambda(\lambda,\epsilon)^{-1}A\Lambda(\lambda,\epsilon)=(a_{ij}\lambda^{-t_{ij}\epsilon})$$

である．ここで $t_{ij}=j-i$ は明らかに A には依らない．

補題 **6.5.** $H(X,\lambda)\in\mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ を $\mathrm{Ord}H>0$ で $\sigma_p(H)=J$. ここで $J=J(r_1,...,r_s)$ とする．このとき，J に付随する shearing 行列 $\Lambda(X,\theta)$ で $\mathrm{Ord}\Lambda,\,\mathrm{Ord}\Lambda^{-1}\le m\mathrm{Ord}H$ を満たし，かつ次を成立させるものが存在する：

$$\Lambda(\lambda,\theta)^{-1}H(X,\lambda)\Lambda(\lambda,\theta)=\tilde{H}(X,\lambda)$$

ただし，ここで $\mathrm{Ord}\tilde{H}\le 0$ 或いは $\mathrm{Ord}H>\mathrm{Ord}\tilde{H}>0$ かつ $\sigma_p(\tilde{H})=J+K(X)$, $K(X)\not\equiv 0$.

証明： $H(X,\lambda)=\lambda^{-t\epsilon}(J+H'(X,\lambda))$ とかく．仮定から $t\epsilon<0$ である．ここで

$$H'(X,\lambda)=(h'_{ij}(X,\lambda))\in\mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$$

で $\mathrm{Ord}H'<0$ である．従って，$q_{ij}\in\mathbb{N}_+$ があって

$$h'_{ij}(X,\lambda)=\lambda^{-\epsilon q_{ij}}(a_{ij}(X)+O(\lambda^{-\epsilon})),\quad a_{ij}(X)\not\equiv 0$$

とかける．

$$\Lambda(\lambda,\delta)^{-1}H'\Lambda(\lambda,\delta)=\left(\lambda^{-\epsilon q_{ij}-\delta t_{ij}}(a_{ij}(X)+O(\lambda^{-\epsilon}))\right)$$

に注意して

$$\theta(\epsilon)=\min_{i,j,1-t_{ij}>0}\left(\frac{\epsilon q_{ij}}{1-t_{ij}},-t\epsilon\right)$$

で $\theta(\epsilon)$ を定める．定義から $0<\theta(\epsilon)\le -t\epsilon=\mathrm{Ord}H$ で

$$-\epsilon q_{ij}-\theta(\epsilon)t_{ij}\le -\theta(\epsilon)$$

となる．$\theta=\theta(\epsilon)$ とおいて $\Lambda(\lambda,\theta)^{-1}H'\Lambda(\lambda,\theta)=O(\lambda^{-\theta})$ 故

$$\Lambda(\lambda,\theta)^{-1}H\Lambda(\lambda,\theta)=O(\lambda^{-\theta-t\epsilon})$$

ここで，$\mathrm{Ord}\Lambda$, $\mathrm{Ord}\Lambda^{-1}\le m\mathrm{Ord}H$ である．$-\theta-t\epsilon\le 0$ なら証明は終り．もし $-\theta-t\epsilon>0$ ならば，θ の定義から，k,l があって

$$-\epsilon q_{kl}-t_{kl}\theta=-\theta$$

となるから，従って

$$\Lambda(\lambda,\theta)^{-1}H'\Lambda(\lambda,\theta)=\lambda^{-\theta}(K(X)+O(\lambda^{-\epsilon})),\ \ K(X)\not\equiv 0$$

これが示すべきことであった． □

命題 **6.6.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で，$\mathrm{Tr}H(X,\lambda) = O(1)$ とする．このとき，任意の開集合 $V \subset W$ に対し，開集合 $U \subset V$ 及び可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le c(m)\mathrm{Ord}H$ なる Γ で次を満足させるものがある：

$$(R+H)\Gamma = \Gamma(R+K), \quad K \in \mathcal{A}(U)[[\tilde{\lambda}]]$$

か，または

$$(R+H)\Gamma = \Gamma(R+\tilde{H}), \quad \tilde{H} \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$$

で $\mathrm{Ord}H \ge \mathrm{Ord}\tilde{H} > 0$, $\mathrm{Tr}\tilde{H} = O(1)$, $\sigma_p(\tilde{H})(X)$ は任意の $X \in U$ に対して，零でない固有値をもつ.

命題 6.6 の証明のために，まず次の補題を証明する.

補題 **6.7.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\sigma_p(H) = J = J(p_1, ..., p_s)$ で $\mathrm{Tr}H(X,\lambda) = O(1)$ とする．このとき，開集合 $V \subset U$ と可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le m\mathrm{Ord}H$ で あって更に $(R(X,D,\lambda)+H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda)$ が次の 3 つのいずれかとなる Γ が存在する.

(a) $\Gamma(R(X,D,\lambda)+K(X,\lambda))$, $K(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)[[\tilde{\lambda}]]$,

(b) $\Gamma(R(X,D,\lambda)+H^1(X,\lambda))$, $H^1(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, ここで，$\mathrm{Ord}H \ge \mathrm{Ord}H^1 > 0$, $\mathrm{Tr}H^1 = O(1)$, $\sigma_p(H^1)(X)$ は任意の $X \in V$ に対して零でない固有値を持つ.

(c) $\Gamma(R(X,D,\lambda)+H^1(X,\lambda))$, $H^1(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, ここで，$\mathrm{Ord}H \ge \mathrm{Ord}H^1 > 0$, $\sigma_p(H^1)(X) = J_1 = J(q_1, ..., q_t) > J$, $\mathrm{Tr}H^1(X,\lambda) = O(1)$.

証明： 補題 6.2 から，$\Gamma'(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)[[\tilde{\lambda}]]$, $\Gamma'_0 = I$ があって

$$(R+H)\Gamma' = \Gamma'(R+H'), \quad H' \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}, \quad \mathrm{Tr}H' = O(1)$$

で $\sigma_p(H') = J$ かつ $H'_j \in \mathcal{A}(W; S(J))$ である．次に補題 6.5 から J に付随した shearing 行列 $\Lambda(\lambda,\theta)$, $\mathrm{Ord}\Lambda$, $\mathrm{Ord}\Lambda^{-1} \le m\mathrm{Ord}H$ があって

$$H'\Lambda = \Lambda H'', \quad \mathrm{Ord}H'' \le 0$$

或いは

$$\mathrm{Ord}H' > \mathrm{Ord}H'' > 0, \quad \sigma_p(H'') = J + C(X)$$

となる．ただし $C(X) \not\equiv 0$. また $\sigma_p(H'') = J$, $H''_j \in \mathcal{A}(W; S(J))$ に注意する．従って特に $C(X) \in S(J)$ である．ここで，$R\Lambda = \Lambda R$ 故

$$(R+H)\Gamma'\Lambda = \Gamma'\Lambda(R+H'')$$

もし，$\mathrm{Ord}H'' \leq 0$ ならば，(a) である．従って，$\mathrm{Ord}H'' > 0$ とする．もし，$\sigma_p(H'')(X)$ がある $X \in U$ で零でない固有値をもてば，ある開集合 $V \subset U$ $(V \ni X)$ を適当にとって，任意の $X \in V$ に対して $\sigma_p(H'')(X)$ は零でない固有値を持つ．従って (b) である．以上の二つの場合には，$\Gamma = \Gamma'\Lambda$ ととればよく

$$\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} = \mathrm{Ord}\Lambda^{-1}\Gamma'^{-1} \leq m\mathrm{Ord}H$$

が従う．

最後に残った場合を考える．$\mathrm{Ord}H'' > 0$ かつ $\sigma_p(H'')(X)$ は任意の $X \in U$ に対して零固有値のみをもつ．このとき，ある開集合 $V \subset U$ と，$N(X) \in \mathcal{A}(V; M(m, \mathbb{C}))$ で

$$N^{-1}(X)\sigma_p(H'')(X)N(X) = J_1 = J(q_1, ..., q_t)$$

なる $N(X)$ がある (例えば [22], [10] をみよ)．$\sigma_p(H'') = J + C(X)$ であるから，V をとりなおして，V で $C(X) \neq 0$ が成り立つとしてよい．すると，補題 6.1 から

$$J_1 > J$$

である．従って次の結論に達した．

$$(R + H)\Gamma'\Lambda N = \Gamma'\Lambda N(R + H''')$$

ここで，$H''' \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\sigma_p(H''') = J_1$, $\mathrm{Tr}H''' = O(1)$ これは (c) である．このとき，$\Gamma = \Gamma'\Lambda \quad N$ ととると

$$\mathrm{Ord}\Gamma,\ \mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \leq m\mathrm{Ord}H$$

である． □

命題 6.6 の証明 : $\sigma_p(H)(X)$ がある $X \in U$ で零でない固有値をもてば，$V \subset U$ を適当にとって，$\sigma_p(H)(X)$ は任意の $X \in V$ に対して，零でない固有値をもつとしてよいからこのとき $\Gamma = I$ ととればよい．

次に $\sigma_p(H)$ が任意の $X \in U$ に対して巾零とする．補題 6.7 の証明を考慮すると，

$$\sigma_p(H)(X) = J = J(p_1, ..., p_s)$$

と仮定してよい．ここで補題 6.7 を繰り返し適用する．(a) 又は (b) に達すれば証明が終わる．(c) に達すれば，再び補題 6.7 を適用する．ところで，(c) は高々 $c_1(m)$ 回しか起らない:

$$J = J(m) > J(m-1, 1) > \cdots$$

従って多くとも $c_1(m)$ 回後には，(a) 又は (b) に達して証明を終わる．さて Γ は

$$\Gamma = \Gamma^1\Gamma^2\cdots\Gamma^s, \quad \mathrm{Ord}\Gamma^i \le m\mathrm{Ord}H, \quad s \le c_1(m)$$

なので，$\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le mc_1(m)\mathrm{Ord}H$ となる． □

補題 **6.8.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ とする．任意の開集合 $V \subset W$ に対し，開集合 $U \subset V$ 及び，可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le c(m)\mathrm{Ord}H$ があって次が成立する．

$$(R+H)\Gamma = \Gamma(R+\tilde{H}), \ \ \tilde{H} \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}, \ \ \mathrm{Tr}H - \mathrm{Tr}\tilde{H} = O(1)$$

ここで，$\mathrm{Ord}\tilde{H} > 0$ ならば，$\tilde{H}$ はブロック対角で *2* つ以上のブロックから成るか，或いは modulo $O(1)$ で対角である．

証明：$H = \phi I + H'$, $\phi(X,\lambda) = \mathrm{Tr}H/m$ とおく．従って，$\mathrm{Tr}H' = 0$ である．命題 6.6 から，開集合 $U \subset V$ と可逆な $\Gamma' \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma'$, $\mathrm{Ord}\Gamma'^{-1} \le c(m)\mathrm{Ord}H$ があって

$$(R+H')\Gamma' = \Gamma'(R+H''), \quad \mathrm{Tr}H'' = O(1)$$

である．ここで $\mathrm{Ord}H'' \le 0$ か或いは $\mathrm{Ord}H'' > 0$ でかつ $\sigma_p(H'')$ は任意の $X \in U$ に対して零でない固有値をもつ．$\mathrm{Ord}H'' \le 0$ ならば $\phi I + H''$ は勿論 $O(1)$ を法にして対角である．さて $\mathrm{Ord}H'' > 0$ の場合の考察に移る．開集合 $U_1 \subset U$ 及び $N(X) \in \mathcal{A}(U_1; M(m,\mathbb{C}))$ を適当にとると

$$N(X)^{-1}\sigma_p(H'')(X)N(X) = \oplus_1^s B_j(X)$$

ここで

$$B_j(X) = \begin{pmatrix} \lambda_j(X) & \epsilon_{j1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \epsilon_{jr_j-1} \\ & & & \lambda_j(X) \end{pmatrix} \in M(r_j,\mathbb{C}), \ \ \epsilon_{jk} = 0 \ \text{ or } \ 1$$

で，$i \ne j$ なら $\lambda_i(X) \ne \lambda_j(X)$ である．$\mathrm{Tr}H'' = O(1)$ 　でかつ $\sigma_p(H'')$ は任意の $X \in U_1$ に対して零でない固有値をもつから $s \ge 2$ である．

$$(R+H')\Gamma' N = \Gamma'(R+H'')N = \Gamma' N(R+\tilde{H}'')$$

と書く．ここで $\sigma_p(\tilde{H}'') = \oplus_{j=1}^{s} B_j(X)$ である．補題 6.4 から $\Gamma'' \in \mathcal{A}(U_1)[[\tilde{\lambda}]]$, $\Gamma''_0 = I$ があって

$$(R + \tilde{H}'')\Gamma'' = \Gamma''(R + H'''), \quad \mathrm{Tr} H''' = O(1)$$

ここで，H''' はブロック対角である．$\Gamma = \Gamma' N \Gamma''$ として

$$(R + \phi I + H')\Gamma = \Gamma(R + \phi I + H''')$$

となって結論を得る． □

命題 5.2 の証明：最初に，$H \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ がブロック対角ならば，補題 6.8 は各ブロックごとに適用できることに注意する．補題 6.8 を適用して，H から H' をうる．H' が $O(1)$ を法にして対角ならば証明は終わり．そうでなければ，H' はブロック対角で，二つ以上のブロックからなる．次に各ブロックに補題 6.8 を適用する．H' から H'' を得る．以下，高々 m 回この操作を繰り返せば結論に到る． □

5. 基本命題 (命題 4.1) の証明

N を $C^\infty(\Omega; \mathbb{C}^m)$ 上の m' 次の微分作用素とし，命題 4.1 の条件を満たすとする．

$$H(x,\xi) = -i \sum_{|\alpha|=1} L^{(\alpha)}(x,\xi) N_{(\alpha)}(x,\xi)$$

とおく．このとき，$L(x,D)N(x,D) = G(x,D) + H(x,D)$ で

$$(L_\lambda(X,D) + bB)N_\lambda(X,D) = G_\lambda(X,D) + H_\lambda(X,D) + bBN_\lambda(X,D)$$

である．ここで $B \in M(m,\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}$ である．$\phi(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\tilde{\lambda}]]$ は

$$G_\lambda(X,\phi_x) = 0,\ G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x) = c_\alpha(X,\lambda)K(X,\lambda),\ |\alpha| = 1$$

を満たすとする．

ここでは $L_\lambda + bB$ に対する漸近解 $\tilde{\mathcal{U}}_\lambda$ で $(L_\lambda + bB)$ に対する a priori 評価に矛盾するものを構成する．そのために，まず

$$G_\lambda(X,D) + H_\lambda(X,D) + bBN_\lambda(X,D)$$

に対する漸近解 $\mathcal{U}_\lambda$ を構成し，次に $N_\lambda \mathcal{U}_\lambda \neq 0$ を示し，従って，$\tilde{\mathcal{U}}_\lambda = N_\lambda \mathcal{U}_\lambda$ が $L_\lambda + bB$ の漸近解となっていることを示す．まず，$L_\lambda + bB$ に対する a priori 評価を与えよう．

命題 **5.1.** 今，$\sigma, \delta \in {\mathbb{Q}_+}^{n+1}$ とする．$\Omega \ni 0$ で $P(x, D) = L(x, D) + bB$ に対する Cauchy 問題が，$x = 0$ で両方向に well posed とする．このとき，任意のコンパクト集合，$W, V \subset \mathbb{R}^{n+1}$, 任意の $T > 0$ に対して，$C > 0, \overline{\lambda} > 0, p \in \mathbb{N}$ があって，

$$|u|_{C^0(W^t)} \leq C\lambda^{\overline{\sigma}p}|P_\lambda u|_{C^p(W^t)},\ |u|_{C^0(W_t)} \leq C\lambda^{\overline{\sigma}p}|P_\lambda u|_{C^p(W_t)}$$

が任意の $u \in C_0^\infty(W; \mathbb{C}^m)$, $\lambda \geq \overline{\lambda}$, $y \in V$, $|t| < T$ に対して成立する．ただし，$\overline{\sigma} = \max_j \sigma_j$ である．

証明 : $\forall W, \forall V$ に対して，コンパクト集合 $K \subset \Omega$ と $\lambda_1 > 0$ があって

$$v(x) = u(\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta}y) \in C_0^\infty(K; \mathbb{C}^m)$$

が任意の $u \in C_0^\infty(W; \mathbb{C}^m)$, 任意の $\lambda \geq \lambda_1$, $y \in V$ に対して成立する．なぜなら $x \notin K$ なら $|x| \geq a > 0$ となるよう K をとると，$x \notin K$, $y \in V$, $\lambda \geq \lambda_1$ なら，$|x - \lambda^{-\delta}y| \geq a/2$ とできる．従って，λ_1 を十分大きく選ぶと，

$$|\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta}y| \geq 2R, \quad W \subset \{|x| \leq R\}$$

となって $\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta}y \notin W$．ゆえに $v = 0$ となって結論を得る．命題 1.1 から

$$|v|_{C^0(K^s)} \leq C|Pv|_{C^p(K^s)},\ |s| \leq \tau.$$

さて，$s = s(\lambda) = \lambda^{-\sigma_0}t + \lambda^{-\delta_0}y_0$ ととると，$y \in V$, $\lambda \geq \lambda_2$, $|t| < T$ のとき $|s(\lambda)| < \tau$ となる．$Pv(x) = (P_\lambda u)(\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta}y)$ であるから

$$\begin{aligned} |v|_{C^0(K^{s(\lambda)})} &= |u|_{C^0(W^t)}, \\ |(P_\lambda u)(\lambda^\sigma x - \lambda^{\sigma-\delta}y)|_{C^p(K^{s(\lambda)})} &\leq \lambda^{\overline{\sigma}p}|P_\lambda u|_{C^p(W^t)} \end{aligned}$$

以上のことから必要な結果を得る． □

さて ϕ を命題 4.1 の ϕ とする．$E_0(y, x, \lambda) = \exp\{i\phi(y, x, \lambda)\lambda^\tau\}$ とおく．ここで，$\tau > 0$ は後で決める．$G(x, D)$ は $C^\infty(\Omega; \mathbb{C}^m)$ 上の $m' + 1$ 次の微分作用素であるから，

$$\begin{aligned} E_0^{-1}G_\lambda(X, D)E_0 = \lambda^{\tau(m'+1)}[G_\lambda(X, \phi_x) + \lambda^{-\tau}\{ &\sum_{|\alpha|=1} G_\lambda^{(\alpha)}(X, \phi_x)D^\alpha \\ &+ i\sum_{|\alpha|=2} G_\lambda^{(\alpha)}(X, \phi_x)\frac{D^\alpha\phi}{\alpha!}\} + O(\lambda^{-2\tau})] \end{aligned}$$

である．例えば Chazarain [15] を見よ．$X=(y,x)$ であった．$G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x)=c_\alpha(X,\lambda)K(X,\lambda)$, $|\alpha|=1$ を考慮に入れて，次のようにおこう．

$$\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(X,\lambda)D^\alpha = l(X,D,\lambda)=\sum_{j=0} l_j(X,D)\lambda^{-\epsilon j},$$
$$G'(X,\lambda)=i\sum_{|\alpha|=2} G_\lambda^{(\alpha)}(X,\phi_x)D^\alpha\phi/\alpha!$$

ここで，仮定から

$$l_0(X,\xi)=\sum_{j=0}^{n} a_j(X)\xi_j$$

であって，$a_0(X)\neq 0$ である．これらの記号を使うと

$$\begin{aligned}E_0^{-1}(L_\lambda+bB)N_\lambda E_0=\lambda^{\tau m'}\{&K(X,\lambda)l(X,D,\lambda)+G'(X,\lambda)\\ &+H_\lambda(X,\phi_x)+bBN_\lambda(X,\phi_x)+O(\lambda^{-\tau+m'+1})\}\end{aligned}$$

となる．ここで，次の事実を使った：$\sigma_j\leq 1$ であるから，N が $C^\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ 上の m 次の微分作用素ならば，$N_\lambda=O(\lambda^m)$ である．

$K(X,\lambda)$ は仮定から可逆であるから，右辺は

$$\begin{aligned}\lambda^{\tau m'}K(X,\lambda)\{&l(X,D,\lambda)+K(X,\lambda)^{-1}G'+K^{-1}H_\lambda\\ &+bK^{-1}BN_\lambda+O(\lambda^{-\tau+g'})\}\end{aligned}\tag{5.1}$$

ただし，ここで $g'\leq m'+1+\mathrm{Ord}K^{-1}$．さて命題 4.1 が成立しないとする．即ち，$N_\lambda(X,\phi_x)K(X,\lambda)^{-1}=(c_{ij}(X,\lambda))$ と記すとき，i,j があって，

$$c_{ij}(X,\lambda)-\lambda^\nu c_{ij}(X)=o(\lambda^\nu)\quad(\lambda\to\infty)$$

なる $\nu\in\mathbb{Q}_+$ がある．ただし，$c_{ij}(X)$ は恒等的には 0 でない．故にある開集合 U があって，U 上 $c_{ij}(X)\neq 0$ である．$B\in M(m,\mathbb{C})$ を，(j,i) 要素以外は 0 で (j,i) 要素は $\beta\in\mathbb{C}$ となる定数行列とする．このとき

$$\mathrm{Tr}BN_\lambda K^{-1}-\beta c_{ij}(X)\lambda^\nu=o(\lambda^\nu)$$

は明らかである．$\beta\in\mathbb{C}$ は $\mathrm{Im}\beta c_{ij}(X)\neq 0$ がある開集合 $X\in U'\subset U$ で成立するように選ぶ．さて

$$A(b,X,\lambda)=-K^{-1}(G'+H_\lambda+bBN_\lambda)$$

とおく．$\mathrm{Tr}A = -\mathrm{Tr}\{(G' + H_\lambda + bBN_\lambda)K^{-1}\}$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}A = -\mathrm{Tr}(BN_\lambda K^{-1}), \quad \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}A + \beta c_{ij}(X)\lambda^\nu = o(\lambda^\nu)$$

が成立する．(5.1) 式を次の様に書き換える．

$$\lambda^{\tau m'}K\{l(X,D,\lambda) - A(b,X,\lambda) + \lambda^{-\tau+g'}A'(b,X,D,\lambda)\} \tag{5.2}$$

ここで，

$$A'_j(b,X,\xi) = \sum_{j=0} A'_j(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}$$

で $A'_j(b,X,\xi)$ は (b,X,ξ) の多項式で，ξ に関して，$m'+1$ 次以下である．ここで次の命題を準備する．W を $X \in \mathbb{R}^N$ の開集合とする．

命題 5.2. (漸近的対角化) $R(X,\xi,\lambda) = \sum_{j=0} R_j(X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}, \epsilon \in \mathbb{Q}_+$ を考える．ここで $R_j(X,\xi)$ は ξ の一次以下の多項式である．$H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ とする．このとき，任意の開集合 $V \subset W$ に対して，開集合 $U \subset V$ と可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で

$$\begin{aligned} &(R(X,D,\lambda) - H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda) \\ &= \Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda) - \oplus_{j=1}^m \lambda_j(X,\lambda) + K(X,\lambda)), \\ &\mathrm{Ord}\Gamma,\ \mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le c(m)\mathrm{Ord}H \end{aligned}$$

を満たすものがある．ただし，$\lambda_j(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}, K(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)[[\tilde{\lambda}]]$ で

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j(X,\lambda) - \mathrm{Tr}H(X,\lambda) = O(1)$$

注意：普通の意味で対角化している訳ではない．例えば

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \lambda^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

のような操作を行っている．重要なことは，$\mathrm{Ord}\Gamma$ が $c(m)\mathrm{Ord}H$ で評価されることである．固有値や Tr と Jordan 標準形は同じレベルで不変な訳ではない．例えば上の例のように定数行列

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

を $\mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で考えると

$$\mathrm{rank}(A-E) = 1, \quad \mathrm{rank}(\sigma_0(\Gamma^{-1}A\Gamma) - E) = 0, \quad \Gamma = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

であるが $\mathrm{Tr}\sigma_0(\Gamma^{-1}A\Gamma) = \mathrm{Tr}A$ である．

証明：証明は後で行う．

さて，I を $\mathbb{R}$ の開区間とする．$A(b,X,\lambda) \in \mathcal{A}(I\times U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ に注意して，命題 5.2 を (5.2) 式に適用すると，$I_1\times U_1 \subset I\times U$ と可逆な $\Gamma(b,X,\lambda) \in \mathcal{A}(I_1\times U_1)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le c(m)\mathrm{Ord}A$ があって，

$$
\begin{aligned}
&(l(X,D,\lambda) - A(b,X,\lambda))\Gamma(b,X,\lambda)\\
&= \Gamma(b,X,\lambda)(l - \oplus_{j=1}^m \lambda_j(b,X,\lambda) + K'(b,X,\lambda))
\end{aligned}
$$

ただし，$K'(b,X,\lambda) \in \mathcal{A}(I_1\times U_1)[[\tilde{\lambda}]]$ で

$$
\mathrm{Tr}A - \sum_{j=1}^m \lambda_j = O(1)
$$

である．さて，$\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1}$ が τ に依らない評価をもつので

$$
\lambda^{-\tau+g'}A'(b,X,D,\lambda)\Gamma = \lambda^{-\tau+g'+2d}\Gamma A''(b,X,D,\lambda)
$$

とかける．ただし，$d = c(m)\mathrm{Ord}A$ で

$$
A''(b,X,\xi,\lambda) = \sum_{j=0} A''_j(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}
$$

である．τ を十分大にとって $-\tau+g'+2d = -\tau+g''$ は負で大になるようにできる．

$$
(l - A + \lambda^{-\tau+g'}A')\Gamma = \Gamma(l - \oplus_{j=1}^m\lambda_j + K' + \lambda^{-\tau+g''}A'')
$$

今すべての j に対して $\partial\mathrm{Im}\lambda_j/\partial b = O(1)$ と仮定すると，

$$
\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum \mathrm{Im}\lambda_j\right) = O(1)
$$

となって，

$$
\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}A + \beta c_{ij}(X)\lambda^\nu = o(\lambda^\nu),\ \mathrm{Tr}A - \sum_{j=1}^m \lambda_j(b,X,\lambda) = O(1)
$$

に反する．故にある j_0 及び開集合 $I_2\times U_2 \subset I_1\times U_1$ があってある $\nu_2 \in \mathbb{Q}_+$ に対して

$$
\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Im}\lambda_{j_0}(b,X,\lambda) - \lambda^{\nu_2}c_2(b,X) = o(\lambda^{\nu_2}), \quad c_2(b,X) \not\equiv 0
$$

が成立する．このことから，ある $\nu_1 \in \mathbb{Q}_+$ があって

$$\mathrm{Im}\lambda_{j_0}(b,X,\lambda) - \lambda^{\nu_1}c_1(b,X) = o(\lambda^{\nu_1}), \quad c_1(b,X) \not\equiv 0$$

が従う．更に必要ならば，$I_2 \times U_2$ を縮めて任意の j に対して

$$\lambda_{j_0}(b,X,\lambda) - \lambda_j(b,X,\lambda) = O(1)$$

或いは

$$\lambda_{j_0}(b,X,\lambda) - \lambda_j(b,X,\lambda) = \lambda^{\nu'_j}(c'_j(b,X) + o(1))$$

のいずれかが成立するとしてよい．但し，$\nu'_j \in \mathbb{Q}_+$, $c'_j(b,X) \not\equiv 0$ である．

補題 **5.3.** $\theta(b,X,\lambda) = \lambda_{j_0}(b,X,\lambda)$ とおく．任意の $(\hat{b},\hat{X}) \in I \times U$ に対し開近傍 $J \times V$ と，$\psi(b,X,\lambda) \in \mathcal{A}(J \times V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で次の条件を満たすものが存在する：

$$l(X,\partial,\lambda)\psi(b,X,\lambda) - \theta(b,X,\lambda) = O(1),\ \partial = (\frac{\partial}{\partial x_0},...,\frac{\partial}{\partial x_n})$$

で，ψ は次のいずれかを満たす.

$$-\mathrm{Im}\psi(b,X,\lambda) \leq -c\{x_0 - \hat{x}_0 + |x' - \hat{x}'|^2\}\lambda^{\nu_1}, (b,X)\times V, x_0 \geq \hat{x}_0, \lambda : 大$$

或いは

$$-\mathrm{Im}\psi(b,X,\lambda) \leq -c\{\hat{x}_0 - x_0 + |x' - \hat{x}'|^2\}\lambda^{\nu_1}, (b,X)\times V, x_0 \leq \hat{x}_0, \lambda : 大$$

証明：$\theta(b,X,\lambda) = \sum_{j=-\mu}\theta_j(b,X,)\lambda^{-\epsilon j}$ であった．ここで $\mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X) \neq 0$, $(b,X) \in J \times V$, $\nu_1 = -\mu'\epsilon$.さてψ を次の形で求めよう.

$$\psi(b,X,\lambda) = \sum_{j=-\mu}\psi_j(b,X)\lambda^{-\epsilon j}$$

$l(X,\partial,\lambda)\psi(b,X,\lambda) = \theta(b,X,\lambda)$ は

$$l_0(X,\partial)\psi_p(b,X) = \theta_p(b,X) - \sum_{i+j=p, j\leq p-1} l_i(X,\partial)\psi_j(b,X)$$

と書ける．さて，$-\mu \leq j < -\mu'$ 対して，θ_j は実数値であるから，ψ_j, $-\mu \leq j < \mu'$ を実数値として求めるこができる．次に

$$\begin{aligned} &l_0(X,\partial)\psi_{-\mu'}(b,X) \\ = \theta_{-\mu'}(b,X) - \sum_{i+j=-\mu', j\leq\mu'-1} &l_i(X,\partial)\psi_j(b,X) \\ &= f_{-\mu'}(b,X) \end{aligned}$$

を考える．さて，$\mathrm{Im} f_{-\mu'}(b,X) = \mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X) \neq 0$ in $I_2 \times U_2$ であるから，$\psi_{\mu'}$ を初期条件

$$\psi_{-\mu'}(b, y, \hat{x}_0, x') = i|x' - \hat{x}'|^2$$

の下で解く．

$$l_0(X, \partial) = \sum_{j=0}^{n} a_j(X)\partial_j, \quad a_0(X) \neq 0$$

であった．従って $\mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X) \geq c' > 0$ ならば,

$$\mathrm{Im}\psi_{-\mu'}(b,X) \geq c\{x_0 - \hat{x}_0 + |x' - \hat{x}'|^2\},\ c > 0,\ x_0 \geq \hat{x}_0$$

が成立する．$\mathrm{Im}\theta_{-\mu'}(b,X) \leq -c' < 0$ ならば

$$\mathrm{Im}\psi_{-\mu'}(b,X) \geq c\{\hat{x}_0 - x_0 + |x' - \hat{x}'|^2\},\ c > 0,\ x_0 \leq \hat{x}_0$$

が成立する．次に，$j \geq -\mu' + 1$ に対して，$\psi_j(b,X)$ を

$$\psi_j(b, y, \hat{x}_0, x') = 0$$

なる初期条件の下で解く．従って

$$-\mathrm{Im}\psi_j(b,X) \leq C\{|x_0 - \hat{x}_0| + |x' - \hat{x}'|^2\},\ j \geq -\mu' + 1$$

さて

$$-c|x_0 - \hat{x}_0| + C|x_0 - \hat{x}_0|\lambda^{-\epsilon} \leq -c|x_0 - \hat{x}_0|/2$$

であるから λ を大にして結論を得る． □

さて

$$E_1(b, X, \lambda) = \exp\left(i\psi(b, X, \lambda)\right)$$

とおく．補題 5.3 から

$$E_1^{-1} l(X, D, \lambda) E_1 = l(X, D, \lambda) + \tilde{\lambda}_{j_0}$$

となる．$\tilde{\lambda}_{j_0} - \lambda_{j_0} = O(1)$ である．従って

$$E^{-1} Q_\lambda E \Gamma = \lambda^{\tau m'} K \Gamma (l + \lambda_{j_0} I - \oplus \lambda_j + K'' + \lambda^{-\tau + g''} A'')$$

ここで $E = E_0 E_1$, $K'' \in \mathcal{A}(I_2 \times U_2)[[\tilde{\lambda}]]$，$Q_\lambda = (L_\lambda + bB) N_\lambda$ である．

補題 **5.4.** 任意の $s\in\mathbb{N}$ に対して $(\hat{b},\hat{X})$ の近傍 $I_s\times U_s\subset I_2\times U_2$ とベクトル $\mathcal{U}_s(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I_s\times U_s)[[\tilde{\lambda}]]$ で，$\sigma_0(\mathcal{U}_s)(\hat{b},\hat{X})\neq 0$ なるものがあって

$$(l+\lambda_{j_0}I-\oplus\lambda_j+K''+\lambda^{-\tau+g''}A'')\mathcal{U}_s=O(\lambda^{-s})$$

を満たす.

証明：必要ならば，行と列を入れ替えて次のように仮定できる.

$$-\lambda_{j_0}I+\oplus\lambda_j-K''-\lambda^{-\tau+g''}A''=R=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}$$

で

$$R_{ij}(b,X,D,\lambda)=R'_{ij}(b,X,\lambda)+R''_{ij}(b,X,D,\lambda),$$

$(ij)=(11),(12),(21)$. また

$$R_{22}=\oplus r_j(b,X,\lambda)+R'_{22}(b,X,\lambda)+R''_{22}(b,X,D,\lambda)$$

ここで，$R'_{ij}(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I_2{\times}U_2)[[\tilde{\lambda}]],(ij)=(11),(12),(21),(22)$. また $r_j(b,X,\lambda)\in\mathcal{A}(I_2{\times}U_2)\{\{\tilde{\lambda}$ $\mathrm{Ord}r_j>0$ さらに

$$R''_{ij}(b,X,\xi,\lambda)=\lambda^{-\epsilon}\sum_{k=0}R_{ijk}(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon k}$$

必要なら $I_2\times U_2$ を更に縮めて，$\sigma_p(r_j)(b,X)\neq 0$, $(b,X)\in I_2\times U_2$ としてよい.

$$\Lambda=I\oplus\{\oplus\lambda^{-\kappa_j}\},\ \kappa_j=\mathrm{Ord}r_j\in\mathbb{Q}_+$$

とおき，

$$\Lambda(l-R)\mathcal{U}_s=O(\lambda^{-s})$$

を解けばよい.

$$\mathcal{U}_s=\begin{pmatrix}\mathcal{U}_s^I\\ \mathcal{U}_s^{II}\end{pmatrix}$$

とおくと方程式は次の様になる.

$$(l-R'_{11})\mathcal{U}_s^I=\{\lambda^{-\epsilon}R'''_{11}\mathcal{U}_s^I+R'''_{12}\mathcal{U}_s^{II}\}=O(\lambda^{-s}),$$
$$\{\oplus\lambda^{-\kappa_j}r_j\}\mathcal{U}_s^{II}=\lambda^{-\epsilon}\{R'''_{21}\mathcal{U}_s^I+R'''_{22}\mathcal{U}_s^{II}\}=O(\lambda^{-s})$$

ここで

$$R'''_{ij}(b,X,\xi,\lambda)=\sum_{k=0}R'''_{ijk}(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon k}$$

で $R'''_{ijk}(b,X,\xi)$ は ξ の多項式で高々 $m'+1$ 次である．$\mathcal{U}_s$ を次の形で求めよう．

$$\mathcal{U}_s^I=\sum_{j=0}\mathcal{U}_{sj}^I(b,X)\lambda^{-\epsilon j},\ \mathcal{U}_s^{II}=\sum_{j=0}\mathcal{U}_{sj}^{II}(b,X)\lambda^{-\epsilon j}$$

このとき方程式は

$$\begin{aligned}(l_0(X,D)-\sigma_0(R_{11}(b,X))\mathcal{U}_{sp}^I&=F^I(\mathcal{U}_{sj}^I;j\le p-1,\mathcal{U}_{sj}^{II};j\le p)\\ \{\oplus\sigma_p(r_j)(b,X)\}\mathcal{U}_{sp}^{II}&=F^{II}(\mathcal{U}_{sj}^I;j\le p-1,\mathcal{U}_{sj}^{II};j\le p-1)\end{aligned}$$

ここで $\oplus\sigma_p(r_j)(b,X)$ は正則なので，$\mathcal{U}_{sp}^{II}$ は

$$\mathcal{U}_{sp}^{II}=\{\oplus\sigma_p(r_j)(b,X)\}^{-1}F^{II}$$

として求まる．即ち，I-成分については微分方程式を解き，II-成分については代数方程式を解くことによって $\mathcal{U}_s$ が求まる．さて今までに得たことをまとめておく：

$$E^{-1}(L_\lambda+bB)E\{E^{-1}N_\lambda E\Gamma\}\mathcal{U}_s=O(\lambda^{-s})$$

ここで

$$\begin{aligned}E^{-1}N_\lambda E=\lambda^{\tau m'}\{N_\lambda(X,\phi_x)+\lambda^{-\tau+g_0}N'(b,X,D,\lambda)\},\\ N'(b,X,\xi,\lambda)=\sum_{j=0}N'_j(b,X,\xi)\lambda^{-\epsilon j}\end{aligned}$$

ここで，$N'_j(b,X,\xi)$ は ξ の高々 m' 次の多項式で，g_0 は τ に無関係である．

$E^{-1}N_\lambda E\Gamma\mathcal{U}_s$ が $L_\lambda+bB$ に対する漸近解であることを示すには次のことを示せば十分である．

補題 5.5. $\mathcal{V}_s=N_\lambda(X,\phi_x)\Gamma\mathcal{U}_s$ とおく．このとき，τ, s に依らない $c_i>0$ があって

$$\mathrm{Ord}\mathcal{V}_s>-c_1\quad if\quad \tau>c_2,\ s>c_3$$

証明： まず $\mathcal{U}_s$ は

$$(l+\tilde{\lambda}_{j_0}I-A+\lambda^{-\tau+g'}A')\Gamma\mathcal{U}_s=O(\lambda^{-s+s_0})$$

を満たす．ここで s_0 は s,τ には依らない．$\lambda^{g'}A'\Gamma=O(\lambda^{g_1})$ で g_1 を決める (τ に依らない).

$$T(X,\lambda)=-K^{-1}(X,\lambda)(G'(X,\lambda)+H_\lambda(X,\phi_x))$$

とおく．$\kappa = \max(\mathrm{Ord}T, \mathrm{Ord}\Gamma, 0)$ とする．$\tau > c_2 = 3c(m)\kappa + g_1$, $s > c_3 = 3c(m)\kappa + s_0$ ととる．このとき

$$(l + \tilde{\lambda}_{j_0} I - A)\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$$

次のことを思い出そう．$\mathrm{Ord}\Gamma\mathcal{U}_s \geq -c(m)\kappa$ を考慮すると，$\tilde{\lambda}_{j_0}$ は A の "固有値" である．

$$A = -K^{-1}(G' + H_\lambda + bBN_\lambda) = T(X, \lambda) - bK^{-1}BN_\lambda$$

従って，$\mathrm{Ord}\mathcal{V}_s = O(\lambda^{-g_2})$, $g_2 > c_1 = c_3 + \mathrm{Ord}K^{-1}$ を仮定すると，$N_\lambda\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-g_2})$ となって

$$K^{-1}BN_\lambda\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$$

となる．故に $A\Gamma\mathcal{U}_s + K^{-1}(G' + H_\lambda)\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$ となって

$$(l + \tilde{\lambda}_{j_0} I - T(X, \lambda))\Gamma\mathcal{U}_s = O(\lambda^{-c_3})$$

が成立する．従って $\tilde{\lambda}_{j_0}$ は T の "固有値" でもある．ところが $T(X, \lambda)$ は b に依存しないので $\tilde{\lambda}_{j_0}$ が b に依存することに反する．以下このことを確かめる．

最初に $\tilde{\lambda}_{j_0}(b, X, \lambda)$ が $T(X, \lambda)$ の "固有値" であることを示す．まず補題 5.2 によると開集合 $V \subset U_s$ と $\Delta(X, \lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ があって $(\mathrm{Ord}\Delta, \mathrm{Ord}\Delta^{-1} \leq c(m)\mathrm{Ord}T)$

$$(l - T)\Delta = \Delta(l - \oplus_1^m a_j(X, \lambda) + T')$$

ただし $T' \in \mathcal{A}(V)[[\tilde{\lambda}]]$ が成立する．さて，$\mathcal{W}_s = \Delta^{-1}\Gamma\mathcal{U}_s$ とおくことによって

$$\begin{aligned} O(\lambda^{-c_3}) = (l + \tilde{\lambda}_{j_0} I - T)\Gamma\mathcal{U}_s &= (l + \tilde{\lambda}_{j_0} I - T)\Delta\mathcal{W}_s \\ &= \Delta(l + \tilde{\lambda}_{j_0} I - \oplus_1^m a_j(X, \lambda) + T')\mathcal{W}_s \end{aligned}$$

従って次を得る．

$$(l + \tilde{\lambda}_{j_0} I - \oplus a_j(X, \lambda) + T')\mathcal{W}_s = O(\lambda^{-2c(m)\kappa})$$

ところで，$0 \leq \mathrm{Ord}\mathcal{U}_s \leq \mathcal{W}_s + 2c(m)\kappa$ 故，$\mathrm{Ord}\mathcal{W}_s \geq -2c(m)\kappa$. 従って

$$\mathcal{W}_s = \lambda^{-\kappa'}\mathcal{W}'_s, \quad \sigma_0(\mathcal{W}') \neq 0, \quad \kappa' \leq 2c(m)\kappa$$

とおける．故に

$$(l + \tilde{\lambda}_{j_0} I - a_j(X, \lambda))\mathcal{W}' = O(1)$$

このことから，ある k があって $\tilde{\lambda}_{j_0}(b,X,\lambda) - a_k(X,\lambda) = O(1)$ となる．これは矛盾である．なぜなら

$$\frac{\partial \mathrm{Im}\tilde{\lambda}_{j_0}}{\partial b} = \lambda^{\nu_1} c_2(b,X), \quad \frac{\partial a_k}{\partial b} = 0$$

故に

$$\mathrm{Ord}\{N_\lambda(X,\phi_x)\Gamma\mathcal{U}_s\} \geq -c_1$$

である．

命題 4.1 の証明の完成 : $\tilde{\mathcal{U}}_s = E^{-1}N_\lambda E\Gamma\mathcal{U}_s$ とおく．τ を $\tau > c_2$ かつ

$$\mathrm{Ord}\{\lambda^{-\tau+g_0}N'(b,X,D,\lambda)\Gamma\mathcal{U}_s\} < -c_1$$

であるようにとって固定する．このとき

$$\mathrm{Ord}\tilde{\mathcal{U}}_s > \tau m' - c_1$$

で s に依らない．また

$$(L_\lambda + bB)E\tilde{\mathcal{U}}_s = EO(\lambda^{-s})$$

また，$E = \exp(i\phi\lambda^\tau + i\psi)$, $\mathrm{Im}(\phi\lambda^\tau + \psi) = \mathrm{Im}\psi$ であるから，以下 Ivrii-Petkov [21] にならえばよい．

6. 漸近的対角化 (命題 5.2 の証明)

まずいくつかの記号を導入する．

$$J(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M(r,\mathbb{C}),\ J(r_1,...,r_s) = \oplus_{j=1}^s J(r_j)$$

とおく．

定義 6.1: $J = J(r_1,...,r_s) \in M(m,\mathbb{C})$ とする．ただし，$r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_s$ (≥ 1) である．$K \in M(m,\mathbb{C})$ が J に付随した Silvester 行列とは K が次の形をしているときをいう : $K = (K_{ij})_{1\leq i,j\leq s}$ を J に対応したブロック分けとしたとき K_{ij} は次の形をしている．

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ k_{r_i 1}^{ij} & \cdots & k_{r_i t}^{ij} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ t \leq \min(r_i, r_j)$$

$S(J)$ で J に付随する Silvester 行列の全体とする．

定義 6.2: $J = J(p_1, ..., p_s)$, $J(q_1, ..., q_t) \in M(m, \mathbb{C})$ を考える．但し，$p_1 \geq \cdots \geq p_s$, $q_1 \geq \cdots \geq q_t$ である．0 を各々，$m-s$, $m-t$ 個加えて

$$(p_1, ..., p_s, 0, ..., 0), (q_1, ..., q_t, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^m$$

とする．$\mathbb{N}^m$ に辞書式順序を導入する．この順序で

$$(p_1, ..., p_s, 0, ..., 0) \geq (q_1, ..., q_t, 0, ..., 0)$$

のとき

$$J(p_1, ..., p_s) \geq J(q_1, ..., q_t)$$

と定義する．

補題 **6.1.** $J = J(p_1, ..., p_s)$, $J' = J(q_1, ..., q_t) \in M(m, \mathbb{C})$ とし，$K \in S(J)$ とする．このとき $J + K$ が J' に相似ならば，$J' \geq J$ である．さらに $J + K$ が J に相似なら，$K = O$ である．

証明： $K = (K_{ij})$ と書く．さて

$$\begin{aligned} g(K_{ij}) &= k^{ij}_{p_i\mu}\lambda^{\mu-1} + \cdots + k^{ij}_{p_i 1}, \quad \mu = \min(p_i, p_j),\ i \neq j \\ g(K_{ii}) &= -\lambda^{p_i} + k^{ii}_{p_i p_i}\lambda^{p_i - 1} + \cdots + k^{ii}_{p_i 1} \end{aligned} \tag{6.1}$$

とおく．まず，λ-行列 $(J+K) - \lambda I_m$ は $I_p \oplus G(\lambda)$ に対等であることは容易に分かる．但し $p = m - s$ で

$$G(\lambda) = (g(K_{ij}))_{1 \leq i,j \leq s}$$

である．今 $J + K$ と J' が相似とする． $J' - \lambda I_m$ は $I_q \oplus G'(\lambda)$, $G'(\lambda) = \oplus_1^t \lambda^{q_i}$, $q = m - t$ に同等であるから，$I_p \oplus G(\lambda)$ は $I_q \oplus G'(\lambda)$ に対等である．もし $q < p$ とすると $I_q \oplus G'(\lambda)$ の p 次行列式因子は λ^k $(k \geq 1)$ の形をしている．他方 $I_p \oplus G(\lambda)$ の p 次行列式因子は 1 であるから明らかに矛盾である．従って $q \geq p$ であることが分かる．このことから

$$G(\lambda) \quad 対等 \quad I_{q-p} \oplus (\oplus_1^t \lambda^{q_j})$$

が従う．便宜上 $q_{t+1} = \cdots = q_s = 0$ とおくと，$G(\lambda)$ は $\oplus_1^s \lambda^{q_j}$ に対等である．d'_k で $\oplus_{j=1}^s \lambda^{q_j}$ の k 次行列式因子 $D'_k(\lambda)$ の次数を表わすとすると $d'_j = q_s + \cdots + q_{s-j+1}$

かつ $D'_j(\lambda)=\lambda^{d'_j}$ $(1\le j\le s)$ であることが容易に分かる．(6.1) から $G(\lambda)$ の k 次主小行列式は

$$\epsilon\lambda^{p_s+\cdots+p_{s-k+1}}+\text{lower order}\quad(\epsilon=\pm1)$$

であることが分かる．この k 次小行列式は $D'_k(\lambda)$ で割り切れるから次が従う．

$$d'_k=q_s+\cdots+q_{s-k+1}\le p_s+\cdots+p_{s-k+1}$$

このことから，

$$(p_1,...,p_s,0,...,0)\le(q_1,...,q_t,0,...,0)$$

を得る．即ち $J'\ge J$.

次に，$J+K$ が J に相似とする．従って $G(\lambda)$ は $\oplus_1^s\lambda^{p_j}$ に対等である．$g(K_{sj})$, $g(K_{js})$ は λ^{p_s} で割り切れるから，$g(K_{sj})$, $g(K_{js})$ が λ の p_s-1 次以下の多項式であることに注意すると

$$g(K_{sj})=g(K_{js})=0,\quad j\ne s$$

を得る．また $g(K_{ss})$ も λ^{p_s} で割り切れるから $g(K_{ss})=-\lambda^{p_s}$ でもある．従って

$$G(\lambda)=G_1(\lambda)\oplus\{-\lambda^{p_s}\}$$

ただし，$G_1(\lambda)=(g(K_{ij}))_{1\le i,j\le s-1}$. ゆえに，$G_1(\lambda)$ は $\oplus_1^{s-1}\lambda^{p_j}$ に対等である．以下帰納法によって $g(K_{ij})=0$, $i\ne j$ かつ $g(K_{ii})=-\lambda^{p_i}$ が従う．このことから $K=O$ を得る． □

補題 **6.2.** $H(X,\lambda)\in\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$,

$$\sigma_p(H)(X)=J(r_1,...,r_s)=J\in M(m,\mathbb{C})$$

を考える．このとき，可逆な $\Gamma(X,\lambda)\in\mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$, $\sigma_0(\Gamma)=I_m$ 　があって

$$(R(X,D,\lambda)+H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda)=\Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda)+\tilde H(X,\lambda))$$

ここで $\tilde H(X,\lambda)=\sum\tilde H_j(X)\lambda^{-\epsilon j}\in\mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ で

$$\sigma_p(\tilde H)(X)=J,\quad \mathrm{Ord}\tilde H=\mathrm{Ord}H,\quad \tilde H_j(X)\in\mathcal{A}(W;S(J)).$$

証明： 省略．V.I.Arnold [12], Kajitani [22] を見よ．

補題 **6.3.** $H(X,\lambda)$, $\tilde{H}(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$;

$$H(X,\lambda) = \sum_{j=s} H_j(X)\lambda^{-\epsilon j}, \quad \tilde{H}(X,\lambda) = \sum_{j=s} \tilde{H}_j(X)\lambda^{-\epsilon j}$$

を考える．いま

$$(R(X,D,\lambda) - H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda) = \Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda) - \tilde{H}(X,\lambda))$$

とする．ここで $\Gamma(X,\lambda) = \sum_{j=0} \Gamma_j(X)\lambda^{-\epsilon j} \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$, $\det\Gamma_0 \neq 0$ 従って可逆とする．このとき

$$\mathrm{Tr}H_j = \mathrm{Tr}\tilde{H}_j, \quad j < 0$$

が従う.

証明： まず，次のことに注意する.

$$\sum_{i+j=p} H_{s+i}\Gamma_j - \Gamma_j\tilde{H}_{s+i} = C_{s+p}, \quad p = 0, 1, ..., \ \ C_q = 0, \ \ q < 0$$

さて $\Gamma^{-1} = \sum_{j=0} \Gamma'_j\lambda^{\epsilon j}$ とおき，

$$\sum_{i=0}^{l}\sum_{p=i}^{l} \Gamma'_{l-p}(H_{i+s}\Gamma_{p-i} - \Gamma_{p-i}\tilde{H}_{i+s}) = \sum_{p=0}^{l} \Gamma'_{l-p}C_{s+p}.$$

ここで，$\sum_{p=i}^{l} \Gamma'_{l-p}\Gamma_{p-i} = \delta_{l-i,0}I_m$ を利用して

$$-\tilde{H}_{l+s} + \sum_{i=0}^{l}\sum_{q+r=l-i} \Gamma'_r H_{i+s}\Gamma_q = \sum_{p=0}^{l} \Gamma'_{l-p}C_{p+s}$$

を得る．$l+s<0$ ならば右辺は 0 であるから $l+s<0$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\tilde{H}_{l+s} &= \sum_{i=0}^{l}\sum_{q+r=l-i} \mathrm{Tr}(\Gamma_q\Gamma'_r H_{i+s}) \\ &= \mathrm{Tr}(\sum_{i=0}^{l}(\sum_{q+r=l-i} \Gamma_q\Gamma'_r)H_{i+s}) = \mathrm{Tr}H_{l+s}\end{aligned}$$

これが示すべきことであった. □

次に $H(X,\lambda) = \sum H_j(X)\lambda^{-\epsilon j} \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ を考える．ここで $\sigma_p(H)$ は

$$\sigma_p(H)(X) = \oplus_{i=1}^r B_i(X) \in M(m, \mathbb{C})$$

すなわちブロック対角で対角ブロックは

$$B_j(X) = \begin{pmatrix} \lambda_j(X) & \epsilon_{j1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \epsilon_{jr_{j-1}} \\ & & & \lambda_j(X) \end{pmatrix} \in M(r_j, \mathbb{C}),\ \epsilon_{ji} = 0 \quad \text{or} \quad 1$$

の形をしているとする．ただし $\lambda_i(X) - \lambda_j(X) \neq 0$ in W if $i \neq j$ であるとする．

補題 **6.4.** $H(X,\lambda)$ は上の条件を満たすとする，このとき，$\Gamma_0 = I, \Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$ なる可逆な Γ と $\tilde{H}(X,\lambda) = \sum \tilde{H}_j(X)\lambda^{-\epsilon j}$, $\sigma_p(\tilde{H}) = \sigma_p(H)$ なる $\tilde{H}$ があって

$$(R(X,D,\lambda) + H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda) = \Gamma(X,\lambda)(R(X,D,\lambda) + \tilde{H}(X,D,\lambda))$$

が成立する．ここで $\tilde{H}_j(X)$ はブロック対角である：

$$\tilde{H}_j(X) = \oplus_{i=1}^r \tilde{H}_{ji}(X)$$

証明： 例えば Wasow [10] を見よ．

定義 6.3: $J = J(r_1, ..., r_s) \in M(m, \mathbb{C})$ とする．このとき

$$\Lambda(\lambda,\epsilon) = \oplus_1^s \Lambda_{r_j}(\lambda,\epsilon),$$
$$\Lambda_k(\lambda,\epsilon) = \oplus_{i=1}^k \lambda^{-i\epsilon} = \mathrm{diag}(\lambda^{-\epsilon}, \lambda^{-2\epsilon}, ..., \lambda^{-k\epsilon}) \in M(k, \mathbb{C}), \epsilon \in \mathbb{Q}_+$$

を J に付随した shearing 行列という．(例えば Wasow [10] を見よ).

さて，$\Lambda(\lambda,\epsilon) \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$，$\mathrm{Ord}\Lambda(\lambda,\epsilon) = -\epsilon$ で $\Lambda(\lambda,\epsilon)$ は可逆かつ

$$\Lambda^{-1} = \bigoplus_{j=1}^s \Lambda_{r_j}(\lambda, -\epsilon), \quad \mathrm{Ord}\Lambda^{-1} = \max_j (r_j\epsilon)$$

である．$\Lambda(\lambda,\epsilon)$ が J に付随する shearing 行列のとき次のことに注意しよう．

$$\Lambda(\lambda,\epsilon)^{-1} J \Lambda(\lambda,\epsilon) = \lambda^{-\epsilon} J.$$

また，$A = (a_{ij}) \in M(m, \mathbb{C})$ とするとき

$$\Lambda(\lambda,\epsilon)^{-1} A \Lambda(\lambda,\epsilon) = (a_{ij}\lambda^{-t_{ij}\epsilon})$$

である．ここで $t_{ij} = j - i$ は明らかに A には依らない．

補題 **6.5.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ を $\mathrm{Ord}H > 0$ で $\sigma_p(H) = J$. ここで $J = J(r_1, ..., r_s)$ とする．このとき，J に付随する shearing 行列 $\Lambda(X,\theta)$ で $\mathrm{Ord}\Lambda, \mathrm{Ord}\Lambda^{-1} \le m\mathrm{Ord}H$ を満たし，かつ次を成立させるものが存在する：

$$\Lambda(\lambda,\theta)^{-1} H(X,\lambda) \Lambda(\lambda,\theta) = \tilde{H}(X,\lambda)$$

ただし，ここで $\mathrm{Ord}\tilde{H} \le 0$ 或いは $\mathrm{Ord}H > \mathrm{Ord}\tilde{H} > 0$ かつ $\sigma_p(\tilde{H}) = J + K(X)$, $K(X) \not\equiv 0$.

証明： $H(X,\lambda) = \lambda^{-t\epsilon}(J + H'(X,\lambda))$ とかく．仮定から $t\epsilon < 0$ である．ここで

$$H'(X,\lambda) = (h'_{ij}(X,\lambda)) \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$$

で $\mathrm{Ord}H' < 0$ である．従って，$q_{ij} \in \mathbb{N}_+$ があって

$$h'_{ij}(X,\lambda) = \lambda^{-\epsilon q_{ij}}(a_{ij}(X) + O(\lambda^{-\epsilon})), \quad a_{ij}(X) \not\equiv 0$$

とかける．

$$\Lambda(\lambda,\delta)^{-1} H' \Lambda(\lambda,\delta) = \left(\lambda^{-\epsilon q_{ij} - \delta t_{ij}}(a_{ij}(X) + O(\lambda^{-\epsilon}))\right)$$

に注意して

$$\theta(\epsilon) = \min_{i,j,1-t_{ij}>0} \left(\frac{\epsilon q_{ij}}{1 - t_{ij}}, -t\epsilon\right)$$

で $\theta(\epsilon)$ を定める．定義から $0 < \theta(\epsilon) \le -t\epsilon = \mathrm{Ord}H$ で

$$-\epsilon q_{ij} - \theta(\epsilon) t_{ij} \le -\theta(\epsilon)$$

となる．$\theta = \theta(\epsilon)$ とおいて $\Lambda(\lambda,\theta)^{-1} H' \Lambda(\lambda,\theta) = O(\lambda^{-\theta})$ 故

$$\Lambda(\lambda,\theta)^{-1} H \Lambda(\lambda,\theta) = O(\lambda^{-\theta - t\epsilon})$$

ここで，$\mathrm{Ord}\Lambda$, $\mathrm{Ord}\Lambda^{-1} \le m\mathrm{Ord}H$ である．$-\theta - t\epsilon \le 0$ なら証明は終り．もし $-\theta - t\epsilon > 0$ ならば，θ の定義から，k, l があって

$$-\epsilon q_{kl} - t_{kl}\theta = -\theta$$

となるから，従って

$$\Lambda(\lambda,\theta)^{-1} H' \Lambda(\lambda,\theta) = \lambda^{-\theta}(K(X) + O(\lambda^{-\epsilon})), \ K(X) \not\equiv 0$$

これが示すべきことであった． □

命題 **6.6.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ で，$\mathrm{Tr}H(X,\lambda) = O(1)$ とする．このとき，任意の開集合 $V \subset W$ に対し，開集合 $U \subset V$ 及び可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \leq c(m)\mathrm{Ord}H$ なる Γ で次を満足させるものがある：

$$(R+H)\Gamma = \Gamma(R+K), \quad K \in \mathcal{A}(U)[[\tilde{\lambda}]]$$

か，または

$$(R+H)\Gamma = \Gamma(R+\tilde{H}), \quad \tilde{H} \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$$

で $\mathrm{Ord}H \geq \mathrm{Ord}\tilde{H} > 0$, $\mathrm{Tr}\tilde{H} = O(1)$, $\sigma_p(\tilde{H})(X)$ は任意の $X \in U$ に対して，零でない固有値をもつ．

命題 6.6 の証明のために，まず次の補題を証明する．

補題 **6.7.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\sigma_p(H) = J = J(p_1, ..., p_s)$ で $\mathrm{Tr}H(X,\lambda) = O(1)$ とする．このとき，開集合 $V \subset U$ と可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \leq m\mathrm{Ord}H$ で あって更に $(R(X,D,\lambda)+H(X,\lambda))\Gamma(X,\lambda)$ が次の 3 つのいずれかとなる Γ が存在する．

(a) $\Gamma(R(X,D,\lambda)+K(X,\lambda))$, $K(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)[[\tilde{\lambda}]]$,

(b) $\Gamma(R(X,D,\lambda)+H^1(X,\lambda))$, $H^1(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, ここで，$\mathrm{Ord}H \geq \mathrm{Ord}H^1 > 0$, $\mathrm{Tr}H^1 = O(1)$, $\sigma_p(H^1)(X)$ は任意の $X \in V$ に対して零でない固有値を持つ．

(c) $\Gamma(R(X,D,\lambda)+H^1(X,\lambda))$, $H^1(X,\lambda) \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, ここで，$\mathrm{Ord}H \geq \mathrm{Ord}H^1 > 0$, $\sigma_p(H^1)(X) = J_1 = J(q_1, ..., q_t) > J$, $\mathrm{Tr}H^1(X,\lambda) = O(1)$.

証明： 補題 6.2 から，$\Gamma'(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)[[\tilde{\lambda}]]$, $\Gamma'_0 = I$ があって

$$(R+H)\Gamma' = \Gamma'(R+H'), \quad H' \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}, \quad \mathrm{Tr}H' = O(1)$$

で $\sigma_p(H') = J$ かつ $H'_j \in \mathcal{A}(W; S(J))$ である．次に補題 6.5 から J に付随した shearing 行列 $\Lambda(\lambda,\theta)$, $\mathrm{Ord}\Lambda$, $\mathrm{Ord}\Lambda^{-1} \leq m\mathrm{Ord}H$ があって

$$H'\Lambda = \Lambda H'', \quad \mathrm{Ord}H'' \leq 0$$

或いは

$$\mathrm{Ord}H' > \mathrm{Ord}H'' > 0, \quad \sigma_p(H'') = J + C(X)$$

となる．ただし $C(X) \not\equiv 0$. また $\sigma_p(H'') = J$, $H''_j \in \mathcal{A}(W; S(J))$ に注意する．従って特に $C(X) \in S(J)$ である．ここで，$R\Lambda = \Lambda R$ 故

$$(R+H)\Gamma'\Lambda = \Gamma'\Lambda(R+H'')$$

もし，$\mathrm{Ord}H'' \leq 0$ ならば，(a) である．従って，$\mathrm{Ord}H'' > 0$ とする．もし，$\sigma_p(H'')(X)$ がある $X \in U$ で零でない固有値をもてば，ある開集合 $V \subset U$ $(V \ni X)$ を適当にとって，任意の $X \in V$ に対して $\sigma_p(H'')(X)$ は零でない固有値を持つ．従って (b) である．以上の二つの場合には，$\Gamma = \Gamma'\Lambda$ ととればよく

$$\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} = \mathrm{Ord}\Lambda^{-1}\Gamma'^{-1} \leq m\mathrm{Ord}H$$

が従う．

最後に残った場合を考える．$\mathrm{Ord}H'' > 0$ かつ $\sigma_p(H'')(X)$ は任意の $X \in U$ に対して零固有値のみをもつ．このとき，ある開集合 $V \subset U$ と，$N(X) \in \mathcal{A}(V; M(m, \mathbb{C}))$ で

$$N^{-1}(X)\sigma_p(H'')(X)N(X) = J_1 = J(q_1, ..., q_t)$$

なる $N(X)$ がある (例えば [22], [10] をみよ). $\sigma_p(H'') = J + C(X)$ であるから，V をとりなおして，V で $C(X) \neq 0$ が成り立つとしてよい．すると，補題 6.1 から

$$J_1 > J$$

である．従って次の結論に達した．

$$(R + H)\Gamma'\Lambda N = \Gamma'\Lambda N(R + H''')$$

ここで，$H''' \in \mathcal{A}(V)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\sigma_p(H''') = J_1$, $\mathrm{Tr}H''' = O(1)$ これは (c) である．このとき，$\Gamma = \Gamma'\Lambda \quad N$ ととると

$$\mathrm{Ord}\Gamma,\ \mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \leq m\mathrm{Ord}H$$

である． □

命題 6.6 の証明 : $\sigma_p(H)(X)$ がある $X \in U$ で零でない固有値をもてば，$V \subset U$ を適当にとって，$\sigma_p(H)(X)$ は任意の $X \in V$ に対して，零でない固有値をもつとしてよいからこのとき $\Gamma = I$ ととればよい．

次に $\sigma_p(H)$ が任意の $X \in U$ に対して巾零とする．補題 6.7 の証明を考慮すると，

$$\sigma_p(H)(X) = J = J(p_1, ..., p_s)$$

と仮定してよい．ここで補題 6.7 を繰り返し適用する．(a) 又は (b) に達すれば証明が終わる．(c) に達すれば，再び補題 6.7 を適用する．ところで，(c) は高々 $c_1(m)$ 回しか起らない:

$$J = J(m) > J(m-1, 1) > \cdots$$

従って多くとも $c_1(m)$ 回後には，(a) 又は (b) に達して証明を終わる．さて Γ は

$$\Gamma = \Gamma^1\Gamma^2\cdots\Gamma^s, \quad \mathrm{Ord}\Gamma^i \le m\mathrm{Ord}H, \quad s \le c_1(m)$$

なので，$\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le mc_1(m)\mathrm{Ord}H$ となる． □

補題 **6.8.** $H(X,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ とする．任意の開集合 $V \subset W$ に対し，開集合 $U \subset V$ 及び，可逆な $\Gamma(X,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma$, $\mathrm{Ord}\Gamma^{-1} \le c(m)\mathrm{Ord}H$ があって次が成立する．

$$(R+H)\Gamma = \Gamma(R+\tilde{H}),\ \ \tilde{H} \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\},\ \ \mathrm{Tr}H - \mathrm{Tr}\tilde{H} = O(1)$$

ここで，$\mathrm{Ord}\tilde{H} > 0$ ならば，$\tilde{H}$ はブロック対角で *2* つ以上のブロックから成るか，或いは modulo $O(1)$ で対角である．

証明：$H = \phi I + H'$, $\phi(X,\lambda) = \mathrm{Tr}H/m$ とおく．従って，$\mathrm{Tr}H' = 0$ である．命題 6.6 から，開集合 $U \subset V$ と可逆な $\Gamma' \in \mathcal{A}(U)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$, $\mathrm{Ord}\Gamma'$, $\mathrm{Ord}\Gamma'^{-1} \le c(m)\mathrm{Ord}H$ があって

$$(R+H')\Gamma' = \Gamma'(R+H''), \quad \mathrm{Tr}H'' = O(1)$$

である．ここで $\mathrm{Ord}H'' \le 0$ か或いは $\mathrm{Ord}H'' > 0$ でかつ $\sigma_p(H'')$ は任意の $X \in U$ に対して零でない固有値をもつ．$\mathrm{Ord}H'' \le 0$ ならば $\phi I + H''$ は勿論 $O(1)$ を法にして対角である．さて $\mathrm{Ord}H'' > 0$ の場合の考察に移る．開集合 $U_1 \subset U$ 及び $N(X) \in \mathcal{A}(U_1; M(m,\mathbb{C}))$ を適当にとると

$$N(X)^{-1}\sigma_p(H'')(X)N(X) = \oplus_1^s B_j(X)$$

ここで

$$B_j(X) = \begin{pmatrix} \lambda_j(X) & \epsilon_{j1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \epsilon_{jr_j-1} \\ & & & \lambda_j(X) \end{pmatrix} \in M(r_j,\mathbb{C}),\ \ \epsilon_{jk} = 0\ \ \text{or}\ \ 1$$

で，$i \ne j$ なら $\lambda_i(X) \ne \lambda_j(X)$ である．$\mathrm{Tr}H'' = O(1)$ 　でかつ $\sigma_p(H'')$ は任意の $X \in U_1$ に対して零でない固有値をもつから $s \ge 2$ である．

$$(R+H')\Gamma' N = \Gamma'(R+H'')N = \Gamma' N(R+\tilde{H}'')$$

と書く．ここで $\sigma_p(\tilde{H}'') = \oplus_{j=1}^{s} B_j(X)$ である．補題 6.4 から $\Gamma'' \in \mathcal{A}(U_1)[[\tilde{\lambda}]]$, $\Gamma''_0 = I$ があって

$$(R+\tilde{H}'')\Gamma'' = \Gamma''(R+H'''), \quad \mathrm{Tr}H''' = O(1)$$

ここで，H''' はブロック対角である．$\Gamma = \Gamma' N \Gamma''$ として

$$(R+\phi I+H')\Gamma = \Gamma(R+\phi I+H''')$$

となって結論を得る． □

命題 5.2 の証明：最初に，$H \in \mathcal{A}(W)\{\{\tilde{\lambda}\}\}$ がブロック対角ならば，補題 6.8 は各ブロックごとに適用できることに注意する．補題 6.8 を適用して，H から H' をうる．H' が $O(1)$ を法にして対角ならば証明は終わり．そうでなければ，H' はブロック対角で，二つ以上のブロックからなる．次に各ブロックに補題 6.8 を適用する．H' から H'' を得る．以下，高々 m 回この操作を繰り返せば結論に到る． □

7. 局所化の標準形 (命題 4.9 の証明)

$\hat{z} = (0, e_n)$ を $L(x,\xi)$ の r 次特性点とし，$h_{\hat{z}}(x,\xi)$ を h の $\hat{z}$ での局所化とする，すなわち

$$h_{\hat{z}}(x,\xi) = \sum_{|\alpha+\beta|=r} \frac{1}{r!}\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha h(\hat{z}) x^\beta \xi^\alpha$$

である．$h_{\hat{z}}(x,\xi)$ は ξ_n には依存しないことに注意する．即ち，Euler の恒等式から $|\alpha+\beta| = r$, $\alpha_n \neq 0$ ならば $\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha h(\hat{z}) = 0$ である．

さて，$h_{\hat{z}}(x,\tilde{\xi}) = p(x,\tilde{\xi})$, $\Lambda = \Lambda(h_{\hat{z}})$, $\tilde{\xi} = (\xi_0, ..., \xi_{n-1})$ とおき

$$\Lambda = \{(x,\tilde{\xi}) \mid l_j(x,\tilde{\xi}) = 0, 0 \le j \le N\}$$

とする．ただし，l_j は一次式でかつ一次独立とする．まず，$p(x,\tilde{\xi})$ が $l(x,\tilde{\xi}) = (l_1(x,\tilde{\xi}), ..., l_N(x,\tilde{\xi}))$ の多項式であることを示す．$k_1(x,\tilde{\xi})$,...,$k_M(x,\tilde{\xi})$ を l_1,...,l_N, k_1,...,k_M が一次独立で，$N+M = 2n+1$ となるようにとる．さて $z = (x,\tilde{\xi})$ と書くことにして

$$p(z) = \sum_{|\alpha+\beta|=r} c_{\alpha\beta} l(z)^\alpha k(z)^\beta$$

と書ける．ところで

$$q(l,k) = \sum_{|\alpha+\beta|=r} c_{\alpha\beta} l^\alpha k^\beta$$

とおくとき 任意の $k' \in \mathbb{R}^M$ に対して，$k(w) = k'$ なる $w \in \Lambda$ がある．実際，$\dim\Lambda = M$ 故 $k : \Lambda \ni w \mapsto \mathbb{R}^M$ の核が $\{0\}$ であればよい．これは $l_j(\Lambda) = 0$ なので l_j, k_i の一次独立性から従う．このとき

$$
\begin{aligned}
p(z+w) =& q(l(z+w), k(z+w)) = q(l(z), k(z)+k') \\
=& p(z) = q(l(z), k(z))
\end{aligned}
$$

であるから $q(l,k) = q(l, k+k')$ が任意の $k' \in \mathbb{R}^M$ に対して成り立つ．従って q は k には依らない．故に

$$
p(z) = q(l(z), k(z)) = \sum_{|\alpha|=r} c_\alpha l(z)^\alpha .
$$

一般に適当な座標系 y (ただし $y_0 = x_0$) を選ぶことによって $h_{\hat{z}}$ は ξ_0^{r-1} の項を含まないとしてよい．このとき $\Lambda \subset \{\xi_0 = 0\}$ を示そう．Γ を $\{z \mid h_{\hat{z}}(z) \neq 0\}$ の $(0, e_0) = 0$, $e_0 = (1, 0, ..., 0)$ を含む連結成分，すなわち，$h_{\hat{z}}$ の双曲錐とする．このとき

$$
C \subset \Lambda^\sigma
$$

である．ただし，$C = \{z \mid \sigma(z,w) \leq 0, \forall w \in \Gamma\}$ で伝播錐と呼ばれる．実際 Λ の定義から $\Gamma + \Lambda \subset \Gamma$ は容易．今 $z \in C$ とすると

$$
\sigma(z, w+tu) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \Lambda, \quad \forall w \in \Gamma
$$

従って，$\sigma(z,w) + t\sigma(z,u) \leq 0$ から $\sigma(z,u) = 0$, $\forall u \in \Lambda$ すなわち $z \in \Lambda^\sigma$．他方，$h_{\hat{z}}$ は ξ_0^{r-1} を含まないと仮定してよかったので，$h_{\hat{z}}(x, \tilde{\xi}) = 0$ の ξ_0 に関する根には必ず零以上のものがある．従って $\Gamma \subset \{\xi_0 > 0\}$ が従う．実際，$\lambda_j(x, \xi')$ を $h_{\hat{z}}(x, \xi)$ の ξ_0 に関する根とするとき

$$
\Gamma = \{(x, \xi) \mid \xi_0 > \max_j \lambda_j(x, \xi')\}
$$

である ([2, II] をみよ)．ゆえに，正の x_0 軸は C に含まれる．ゆえに Λ^σ に含まれる．Λ^σ は線形空間であるから x_0 軸を含む：$\{x_0 - \text{軸}\} \subset \Lambda^\sigma$．従って

$$
\Lambda \subset \{\xi_0 = 0\} = \{x_0 - \text{軸}\}^\sigma .
$$

このことから，

$$
\Lambda = \{(x, \tilde{\xi}) \mid l_0 = \xi_0 = 0, l_j(x, \tilde{\xi}) = 0, 1 \leq j \leq N\}
$$

と仮定できる．更に，適当な c_j をとって $l_j - c_j l_0$, $j = 1, ..., N$ を考えれば，l_j, $1 \leq j \leq N$ は ξ_0 を含まないとしてよい．

次のことに注意しておく．

補題 **7.1.** $\Lambda = \{z = (x, \xi) \mid l_j(z) = 0, 0 \leq j \leq N\}$ とするとき，Λ が包合的であるための必要十分条件は

$$\{l_i, l_j\} = 0, \quad \forall i, j$$

の成立することである．

証明： $l_j(z) = \sigma(z, H_{l_j})$ として H_{l_j} を定義する．$l_j(x, \xi) = \langle a, x\rangle + \langle b, \xi\rangle$ ならば $H_{l_j} = (b, -a)$ である．このとき，$z \in \Lambda \Longleftrightarrow \sigma(z, H_{l_j}) = 0, \forall j$ であるから

$$\Lambda^\sigma = \mathrm{span}\{H_{l_j} \mid 0 \leq j \leq N\}$$

となる．ゆえに $\Lambda^\sigma \subset \Lambda$ であるためには，$H_{l_j} \in \Lambda$ すなわち

$$l_i(H_{l_j}) = \sigma(H_{l_j}, H_{l_i}) = 0, \quad \forall i, j$$

であることが必要十分である．さて $H_{l_i} = (b_i, -a_i)$ とするとき，すなわち，$l_i(z) = \langle a_i, x\rangle + \langle b_i, \xi\rangle$ とするとき

$$\sigma(H_{l_j}, H_{l_i}) = \langle a_i, b_j\rangle - \langle a_j, b_i\rangle = \frac{\partial l_i}{\partial x}\frac{\partial l_j}{\partial \xi} - \frac{\partial l_i}{\partial \xi}\frac{\partial l_j}{\partial x} = \{l_i, l_j\}$$

従って明らか． □

補題 7.1 から $\{l_0, l_j\} = 0$ 従って $l_j, 1 \leq j \leq N$ は x_0 を含まない．以上のことから，$1 \leq j \leq N$ に対して

$$l_j = l_j(x', \tilde{\xi}'), \;\; \tilde{\xi}' = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}), \;\; x' = (x_1, ..., x_n)$$

としてよい．

$$\Lambda' = \{(x', \tilde{\xi}') \mid l_j(x', \tilde{\xi}') = 0, 1 \leq j \leq N\}$$

とおく．

さて次の様な座標変換を考える：

$$\tilde{y} = A\tilde{x}, \quad y_n = x_n + q(\tilde{x})/2, \quad \tilde{x} = (x_0, ..., x_{n-1})$$

ここで，$A \in M(n, \mathbb{R})$ で，$q(\tilde{x}) = \langle Q\tilde{x}, \tilde{x}\rangle$ は二次形式，すなわち Q は実対称行列である．

補題 **7.2.** $\tilde{y} = A\tilde{x}$, $y_n = x_n + q(\tilde{x})/2$ とする．$\tilde{L}(y, D_y)$ を $L(x, D)$ の座標系 y での表現とし，$\tilde{h}(y, \eta)$ を主表象の行列式とする．このとき

$$\tilde{h}_{\hat{w}}(y, \tilde{\eta}) = h_{\hat{z}}(A^{-1}\tilde{y}, y_n, {}^tA\tilde{\eta} + QA^{-1}\tilde{y})$$

である．$\hat{w}$ は $\hat{z}$ の y 座標系での (余法束上の) 座標である．

注意 : $dy_n = dx_n + \sum \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial x_j} dx_j$ は $x = 0$ で dx_n に等しく，したがって $\hat{w} = (0, e_n)$ である．

証明 : $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{y} = \phi(\tilde{y})$, $x_n = y_n - q(A^{-1}\tilde{y})/2 = \phi_n(y)$ と書くと $d\tilde{x} = A^{-1}d\tilde{y}$ また $x_n = y_n - \langle QA^{-1}\tilde{y}, A^{-1}\tilde{y}\rangle/2$ ゆえ

$$dx_n = dy_n - \langle {}^tA^{-1}QA^{-1}\tilde{y}, d\tilde{y}\rangle$$

である．したがって

$$\langle\tilde{\xi}, d\tilde{x}\rangle + \xi_n dx_n = \langle {}^tA^{-1}\tilde{\xi}, d\tilde{y}\rangle + \xi_n dy_n - \xi_n\langle {}^tA^{-1}QA^{-1}\tilde{y}, d\tilde{y}\rangle$$

$\xi dx = \eta dy$ よりこれが $\langle\tilde{\eta}, d\tilde{y}\rangle + \eta_n dy_n$ に等しいから $\xi_n = \eta_n$, ${}^tA^{-1}\tilde{\xi} - \xi_n {}^tA^{-1}QA^{-1}\tilde{y} = \tilde{\eta}$ となる．すなわち

$$\tilde{x} = A^{-1}\tilde{y}, \quad x_n = y_n - q(A^{-1}\tilde{y})/2$$
$$\tilde{\xi} = {}^tA\tilde{\eta} + QA^{-1}\tilde{y}\eta_n, \quad \xi_n = \eta_n.$$

さて

$$\begin{aligned}
h(x, \xi) &= \xi_n^m h(x, \tilde{\xi}/\xi_n, 1) \\
= \xi_n^m \Big(&\sum_{|\alpha+\beta|=r} (\tilde{\alpha}!\beta!)^{-1} h^{(\tilde{\alpha})}_{(\beta)}(0, e_n)(\tilde{\xi}/\xi_n)^{\tilde{\alpha}} x^\beta + O(|x| + |\tilde{\xi}/\xi_n|)^{r+1}\Big) \\
&= \xi_n^{m-r} \sum_{|\alpha+\beta|=r} (\tilde{\alpha}!\beta!)^{-1} h^{(\tilde{\alpha})}_{(\beta)}(0, e_n)(\tilde{\xi})^{\tilde{\alpha}}(\xi_n x)^\beta \\
&\qquad + O(|\xi_n|^{m-r-1}(|\xi_n x| + |\tilde{\xi}|)^{r+1})
\end{aligned}$$

従って $h_{\hat{z}}$ の定義から

$$h(x, \xi) = \xi_n^{m-r} h_{\hat{z}}(x\xi_n, \tilde{\xi}) + O(|\xi_n|^{m-r-1}(|\xi_n x| + |\tilde{\xi}|)^{r+1})$$

である $(|x| + |\tilde{\xi}| \to 0)$．故に

$$\xi_n^{m-r} h_{\hat{z}}(x\xi_n, \tilde{\xi}) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-\gamma} h(\lambda^{-b}x, \lambda^a\tilde{\xi}, \lambda\xi_n) \tag{7.1}$$

である．ただし，$b=1-a,\ a>b>0,\ \gamma=m-br$. さて

$$\tilde{h}(y,\eta)=h(A^{-1}\tilde{y},\phi_n(y),{}^tA\tilde{\eta}+QA^{-1}\tilde{y}\eta_n,\eta_n)$$

であるから，$\tilde{h}(\lambda^{-b}y,\lambda^a\tilde{\eta},\lambda\eta_n)$ を考えると

$$\begin{aligned}&h(\lambda^{-b}A^{-1}\tilde{y},\lambda^{-b}y_n-\lambda^{-2b}q(A^{-1}\tilde{y})/2,\lambda^a({}^tA)\tilde{\eta}+\lambda^{-b+1}QA^{-1}\tilde{y}\eta_n,\lambda\eta_n)\\&=h(\lambda^{-b}A^{-1}\tilde{y},\lambda^{-b}(y_n-\lambda^{-b}q(A^{-1}\tilde{y})/2),\lambda^a\{{}^tA\tilde{\eta}+QA^{-1}\tilde{y}\eta_n\},\lambda\eta_n)\end{aligned}$$

したがって，$\lambda\to\infty$ としたときの主要部は

$$h(\lambda^{-b}(A^{-1}\tilde{y},y_n),\lambda^a({}^tA\tilde{\eta}+QA^{-1}\tilde{y}\eta_n),\lambda\eta_n)$$

で $\lambda\to\infty$ としたときの主要部に一致する．(7.1) を考慮して $\lambda^{-\gamma}$ を乗じて $\lambda\to\infty$ とすると

$$\eta_n^{m-r}h_{\hat{z}}(A^{-1}\tilde{y}\eta_n,y_n\eta_n,{}^tA\tilde{\eta}+QA^{-1}\tilde{y}\eta_n)$$

を得る．すなわち

$$\tilde{h}_{\hat{w}}(y,\tilde{\eta})=h_{\hat{z}}(A^{-1}\tilde{y},y_n,{}^tA\tilde{\eta}+QA^{-1}\tilde{y}).$$

□

ここで

$$(\tilde{x},\tilde{\xi})\mapsto(A^{-1}\tilde{x},{}^tA\tilde{\xi}+QA^{-1}\tilde{x}),\quad A:\text{正則},\quad Q:\text{対称}$$

の形の $(\tilde{x},\tilde{\xi})$ の変換の全体は群をなすことに注意する．実際，$T_i(\tilde{x},\tilde{\xi})=(A_i^{-1}\tilde{x},{}^tA_i\tilde{\xi}+Q_iA_i^{-1}\tilde{x})$, $i=1,2$ とすると

$$\begin{aligned}T_2T_1(\tilde{x},\tilde{\xi})&=T_2(A_1^{-1}\tilde{x},{}^tA_1\tilde{\xi}+Q_1A_1^{-1}\tilde{x})\\&=(A_2^{-1}A_1^{-1}\tilde{x},{}^tA_2({}^tA_1\tilde{\xi}+Q_1A_1^{-1}\tilde{x})+Q_2A_2^{-1}A_1^{-1}\tilde{x})\\&=(A^{-1}\tilde{x},{}^tA\tilde{\xi}+\{{}^tA_2Q_1A_2+Q_2\}A^{-1}\tilde{x})\end{aligned}$$

ここで $A=A_1A_2$ で ${}^tA_2Q_1A_2+Q_2$ は対称である．この群は $\tilde{x}$ の線形な座標変換，すなわち

$$T_A:(\tilde{x},\tilde{\xi})\mapsto(A^{-1}\tilde{x},{}^tA\tilde{\xi}),\quad A:\text{正則}\tag{7.2}$$

と変換

$$S_Q:(\tilde{x},\tilde{\xi})\mapsto(\tilde{x},\tilde{\xi}+Q\tilde{x}),\quad Q:\text{対称}\tag{7.3}$$

で生成されることに注意する．実際

$$S_QT_A(\tilde{x},\tilde{\xi})=S_Q(A^{-1}\tilde{x},{}^tA\tilde{\xi})=(A^{-1}\tilde{x},{}^tA\tilde{\xi}+QA^{-1}\tilde{x}).$$

(7.2) と (7.3) の T_A と S_Q で生成される群を G で表わす．$(\tilde{x},\tilde{\xi})$ のかわりに (x,ξ) と書き少し一般的な考察をする．

補題 **7.3.** $\{(x,\xi) \mid l_j(x,\xi) = 0, 1 \le j \le p\}$ で与えられる線形空間を考える．$x = (x_1, ..., x_p)$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_p)$ である．$\{l_i, l_j\} = 0$, $\forall i, j$ と仮定する．このとき次のような $T \in G$ が存在する．

$$\begin{aligned} &\{l_j(T(x,\xi)) = 0, 1 \le j \le p\} \\ &= \{\xi_1 = \cdots = \xi_k = 0, x_{k+1} = \cdots = x_p = 0\}. \end{aligned}$$

証明： まず

$$l_1 = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p + b_1 \xi_1 + \cdots + b_p \xi_p$$

としよう．最初に $b_j \neq 0$ なる j の存在する場合を考える．$b_\mu \neq 0$ ならば，$\xi_\mu \mapsto \xi_\mu - \dfrac{a_\mu}{b_\mu} x_\mu$, x および他の ξ_ν はそのまま，即ち，S_Q で $Q = \mathrm{diag}(0, ..., 0, -a_\mu/b_\mu, 0, ..., 0)$ ととる，なる変換を繰り返して

$$l_1 = c_1 \xi_1 + \cdots + c_l \xi_l + c_{l+1} x_{l+1} + \cdots + c_p x_p$$

と仮定できる．ここで $c_j \neq 0, 1 \le j \le l$. さて第一行が $(0, ..., 0, -c_1^{-1} c_{l+1}, ..., -c_1^{-1} c_p)$ で残りの行はすべて零である $p \times p$ 行列を Q' とし $Q = Q' + {}^tQ'$ とおくと明らかに

$$\tilde{l}_1(x,\xi) = l_1(x, \xi + Qx) = c_1 \xi_1 + \cdots + c_l \xi_l$$

となる．つぎに正則な A を $c_1({}^tA\xi)_1 + \cdots + c_l({}^tA\xi)_l = \xi_1$ ととると

$$\tilde{l}_1(A^{-1}x, {}^tA\xi) = \xi_1$$

となる．$b_1 = \cdots = b_p = 0$ のときは $a_1(A^{-1}x)_1 + \cdots + a_p(A^{-1}x)_p = x_1$ なる正則な A をとると

$$\tilde{l}_1(x,\xi) = l_1(A^{-1}x, {}^tA\xi) = x_1$$

となる．

$l_1 = \xi_1$ のとき： l_j, $j \ge 2$ から l_1 の適当な定数倍を引くことによって，l_j, $j \ge 2$ は ξ_1 を含まないとしてよい．さて $\{l_1, l_j\} = 0$ から l_j, $j \ge 2$ は x_1 を含まない．従って

$$l_j = l_j(x_2, ..., x_p, \xi_2, ..., \xi_p), \quad j \ge 2.$$

$l_1 = x_1$ のとき：上と同じ議論から，l_j, $j \ge 2$ は x_1 を含まないとしてよい．更に，$\{l_1, l_j\} = 0$ から l_j, $j \ge 2$ は ξ_1 を含まない．従って

$$l_j = l_j(x_2, ..., x_p, \xi_2, ..., \xi_p), \quad j \ge 2.$$

帰納法によって，次のような $T \in G$ がある．

$$l_i(T(x,\xi)) = \begin{cases} x_i \\ \xi_i \end{cases}, \quad 1 \le i \le p$$

最後に，必要ならば座標の番号付けを変えればよい． □

Λ' の考察に戻る．いま $l_j(x',\tilde{\xi}')$ が x_n を含まないとする．このとき Λ' は $(\tilde{x}',\tilde{\xi}')\in\mathbb{R}^{2n}$ の包合的な部分空間である．補題 7.3 の証明から

$$T:(\tilde{x}',\tilde{\xi}')\mapsto(A^{-1}\tilde{x}',{}^tA\tilde{\xi}'+QA^{-1}\tilde{x}'),\ \ A:\text{正則},\ Q:\text{対称}$$

があって

$$T^{-1}(\Lambda')=\{\xi_1=\cdots=\xi_k=0,x_{k+1}=\cdots=x_N=0\}$$

とできる．すなわち $\tilde{l}_j(z)=l_j(T(z))$ で $\tilde{l}_j$ を定義すると

$$\{\tilde{l}_j(z)=0\}=\{\xi_1=\cdots=\xi_k=0,x_{k+1}=\cdots=x_N=0\}$$

即ち，$\Lambda(p(T(\cdot))=\{\xi_0=\cdots=\xi_k=0,x_{k+1}=\cdots=x_N=0\}$．ゆえに $p(T(z))$ は $(\xi_0,...,\xi_k,x_{k+1},...,x_N)$ の多項式となる．

次に，ある l_j に対して，$\partial l_j/\partial x_n\neq 0$ の場合を考える．必要ならば番号を付け替えて

$$\frac{\partial l_N}{\partial x_n}\neq 0,\quad \frac{\partial l_j}{\partial x_n}=0,\quad 1\leq j\leq N-1$$

としてよい．さて

$$\Lambda''=\{l_j(\tilde{x}',\tilde{\xi}')=0,1\leq j\leq N-1\}$$

とおくと，再び，補題 7.3 から $l_j=\xi_j$, $1\leq j\leq k$, $l_{k+j}=x_{k+j}$, $j=1,...,N-1-k$ と仮定できる．従って適当な c_j を選んで

$$l_N-\sum_{j=1}^{N-1}c_jl_j$$

を考えることによって，$l_N=l_N(x_1,...,x_k,x_N,...,x_n,\xi_{k+1},...,\xi_{n-1})$ と仮定してよい．他方，$\{l_N,l_j\}=0$ であるから

$$l_N=l_N(x_N,...,x_n,\xi_N,...,\xi_{n-1})$$

である．今 $N=n$ ならば，$l_N=l_N(x_n)$ となって証明が終わる．$N<n$ ならば $x_b=(x_N,...,x_{n-1}),\xi_b=(\xi_N,...,\xi_{n-1})$ と書くとき $l_N(x_b,x_n,\xi_b)=l'_N(x_b,\xi_b)+ax_n$ と表わせる．再び補題 7.3 を適用すると

$$T:(x_b,\xi_b)\mapsto(A^{-1}x_b,{}^tA\xi_b+QA^{-1}x_b)$$

があって $l'_N(T(z))=\xi_N$ または $l'_N(T(z))=x_N$ とできる．このとき，この変換で $(x_1,...,x_{N-1},\xi_1,...,\xi_{N-1})$ は動かさないことに注意する．$l'_N(T(z))=x_N$ のときは証明終わり．$l'_N(T(z))=\xi_N$ のときは x_N と x_{k+1} を入れ替えて，従って，ξ_N と ξ_{k+1} を入れ替えて結果を得る． □

最後に何度も使った事実，$T \in G$ のとき，

$$\{l(Tz), \tilde{l}(Tz)\} = \{l, \tilde{l}\}(Tz)$$

を示しておく．$\partial l(Tz)/\partial z = ({}^t T \partial l/\partial z)(Tz)$ であるから

$$l(Tz) = l(A^{-1}x, {}^t A\xi + QA^{-1}x)$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
\{l(Tz), \tilde{l}(Tz)\} &= \langle {}^t A^{-1}\frac{\partial l}{\partial x}(Tz) + {}^t A^{-1} Q\frac{\partial l}{\partial \xi}(Tz), A\frac{\partial \tilde{l}}{\partial \xi}(Tz)\rangle \\
&-\langle A\frac{\partial l}{\partial \xi}(Tz), {}^t A^{-1}\frac{\partial \tilde{l}}{\partial x}(Tz) + {}^t A^{-1} Q\frac{\partial \tilde{l}}{\partial \xi}(Tz)\rangle \\
&= \langle \frac{\partial l}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{l}}{\partial \xi}\rangle(Tz) - \langle \frac{\partial l}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{l}}{\partial x}\rangle(Tz) + \langle Q\frac{\partial l}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{l}}{\partial \xi}\rangle(Tz) - \langle \frac{\partial l}{\partial \xi}, Q\frac{\partial \tilde{l}}{\partial \xi}\rangle(Tz) \\
&= \{l, \tilde{l}\}(Tz)
\end{aligned}$$

$\square$

注意：$\tilde{l}(z) = l(Tz)$ とする．$\partial\tilde{l}/\partial z(z) = P(\partial l/\partial z)(Tz)$ とおいて P を求める．

$$d\tilde{l}(z) = \langle P\frac{\partial l}{\partial z}(Tz), dz\rangle = \langle {}^t T^{-1} P\frac{\partial l}{\partial z}(Tz), d(Tz)\rangle = (dl)(Tz)$$

従って ${}^t T^{-1} P = I$ から $P = {}^t T$.

8. 漸近的 Levi 条件と命題 4.4 の証明

ここでは，次の命題 8.1 を仮定して命題 4.4 を示す.

$$A(x, \xi') = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\xi_j$$

とおく．$\lambda^{-\sigma_0 m} h_\lambda = \det(\xi_0 - \lambda^{-\sigma_0} A_\lambda(X, \xi'))$ を思い出そう．

命題 8.1. (漸近的 Levi 条件) $L(x, D) = D_0 - A(x, D')$ は $x = 0$ で強双曲系とし，$\omega^j \in \mathcal{A}(U)[\tilde{\lambda}]$ を h_λ の重複度 r_j の根とする．このとき，$R > 0$ があって

$$\operatorname{rank}(\omega^j(X, \xi', \lambda) - \lambda^{-\sigma_0} A_\lambda(X, \xi')) \le m - r_j$$

が任意の $(X, \xi') \in U$ に対して成立する．

準備として少し一般的な考察を行う．以下 U は $\mathbb{R}^N$ の開集合で，局所座標を，$x = (x_1, ..., x_N)$ とする．まず，$A(x, \lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ の三角化を考える (実際には，$A(x, \lambda)$ を $A_\lambda(X, \xi')$ として適用する).

補題 **8.2.** $A(x,\lambda),\, B(x,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ とするとき，

$$\det(A(x,\lambda)B(x,\lambda)) = \det A(x,\lambda) \cdot \det B(x,\lambda)$$

である．

証明： 任意の $q \in \mathbb{Q}$ に対して

$$\det(A(x,\lambda)B(x,\lambda)) - \det A(x,\lambda) \cdot \det B(x,\lambda) = O(\lambda^{-q})$$

を示せばよく，従って有限の場合に帰着される． $\square$

補題 **8.3.** $B(x,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ とする．このとき，任意の開集合 $V \subset U$ に対して開集合 $W \subset V$ および $\det\sigma_0(P) \neq 0,\ \det\sigma_0(Q) \neq 0$ なる $P(x,\lambda)$, $Q(x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$ で

$$P(x,\lambda)B(x,\lambda)Q(x,\lambda) = \oplus a^k(x,\lambda)$$

をみたすものがある．ただし，$a^k(x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ はスカラーである．

証明: 最初に，$P_i \in \mathcal{A}(U)[[\lambda^{-\epsilon}]], i = 1,...,r$ で $\det\sigma_0(P_i) \neq 0$ ならば $P = P_1 \cdots P_r \in \mathcal{A}(U)[[\lambda^{-\epsilon}]]$ かつ $\sigma_0(P) = \sigma_0(P_1)\cdots\sigma_0(P_r)$ であることに注意しよう．特に，$\det\sigma_0(P) \neq 0$ である．$B(x,\lambda) = (b_{ij}(x,\lambda))$ とする．

$$b_{ij}(x,\lambda) = \lambda^{-\epsilon m_{ij}}(b^*_{ij}(x) + O(\lambda^{-\epsilon})),\ m_{ij} \in \mathbb{Z},\ b^*_{ij}(x) \neq 0,\ x \in W$$

であるように W をとることができる． 行と列の交換で

$$\mathrm{Ord}(b_{11}) \geq \mathrm{Ord}(b_{ij})$$

とできる．今 b_{ij} は $\mathcal{A}(U)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ の元として零でないとする．すると，$b_{11}^{-1}b_{ij} \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$ であるから，以下，有限の場合と同様である． $\square$

補題 **8.4.** $A(x,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ で，

$$\det(\tau - A(x,\lambda)) = \prod_{j=1}^{m}(\tau - \omega^j(x,\lambda)),\ \omega^j(x,\lambda) \in \mathcal{A}(U)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$$

とする．このとき，任意の開集合 $V \subset U$ に対して，開集合 $W \subset V$ と，ベクトル $\mathcal{V}^j(x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$, $\sigma_0(\mathcal{V}^j) \neq 0$ で

$$A(x,\lambda)\mathcal{V}^j(x,\lambda) = \omega^j(x,\lambda)\mathcal{V}^j(x,\lambda)$$

を満たすものが存在する．

証明： 補題 8.3 から，開集合 $W \subset V$ と P, $Q \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$, $\det\sigma_0(P) \neq 0$, $\det\sigma_0(Q) \neq 0$ があって

$$P(\omega^j - A)Q = \oplus_{i=1}^m a^i(x,\lambda)$$

が成立する．ところで，$\det(\omega^j - A) = 0$ ゆえ $a^m(x,\lambda) \equiv 0$ と仮定してよい．ゆえに，$\mathcal{V}^j = Q^t(0,...,0,1)$ ととればよい． □

注意：$Q(x,\lambda)(W)[\lambda^{-\epsilon}]$ のとき，明らかに $\mathcal{V}^j \in \mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$ である．特に，ω^j, $A(x,\lambda) \in \mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$ ならば $\mathcal{V}^j \in \mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$ である．

補題 **8.5.** 補題 8.4 と同じ仮定をする．このとき任意の開集合 $V \subset U$ に対して開集合 $W \subset U$ と $T(x,\lambda) \in \mathcal{A}(W)[[\lambda^{-\epsilon}]]$, $\det\sigma_0(T) \neq 0$ で

$$\begin{aligned} &T(x,\lambda)^{-1}A(x,\lambda)T(x,\lambda) \\ &= \mathrm{upptriag}(\omega^1,...,\omega^1,\omega^2,...,\omega^2,...,\omega^s,...,\omega^s) \end{aligned}$$

となるものがある．ここで，$\mathrm{upptriag}(\omega^1,...,\omega^1,\omega^2,...,\omega^2,...,\omega^s,...,\omega^s)$ は $\omega^1,...,\omega^1,\omega^2,...,\omega^2,...,\omega^{\dots}$ を対角成分にもつ上三角行列を表わす．

証明： 補題 8.4 から $V_1 \subset V$ と $\mathcal{V}^1 \in \mathcal{A}(V_1)[[\lambda^{-\epsilon}]]$ で

$$A(x,\lambda)\mathcal{V}^1 = \omega^1\mathcal{V}^1, \quad \sigma_0(\mathcal{V}^1) \neq 0$$

なるものが存在する．$\sigma_0(\mathcal{V}^1) \neq 0$ ゆえ $\mathcal{V}^2$,..., $\mathcal{V}^m \in \mathbb{C}^m$ を

$$\det(\sigma_0(\mathcal{V}^1),\mathcal{V}^2,...,\mathcal{V}^m) \neq 0 \quad \text{in} \quad V_1$$

ととれる (必要なら V_1 をさらに小さくとって)．さて

$$T = (\mathcal{V}^1,\mathcal{V}^2,...,\mathcal{V}^m) \in \mathcal{A}(V_1)[[\lambda^{-\epsilon}]]$$

とおくと，T は可逆で

$$T^{-1}A(x,\lambda)T = \begin{pmatrix} \omega^1 & * \\ 0 & * \\ \vdots & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

となる．従って，以下帰納法による． □

注意：ω^j, $A(x,\lambda)\in\mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$ のときは，$T\in\mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$ である．

さて命題 4.4 の証明にはいる．まず，次の命題に注意する．

補題 8.6. $\omega^j(X,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$ を h_λ の重複度 r_j, $\sum_{j=1}^s r_j=r$ の根とする．$L(x,D)$ は $x=0$ で強双曲系とする．このとき，任意の開集合 $V\subset U$ に対して，開集合 $W\subset V$ と $T(X,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$, $\det\sigma_0(T)\neq 0$ で

$$T^{-1}\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda T=A'_{1\lambda}\oplus A'_{2\lambda}$$

となるものが存在する．ここで，$A'_{1\lambda}$ はブロック上三角で対角ブロックは

$$\oplus\omega^1,\ \oplus\omega^2,...,\oplus\omega^s$$

であり，$A'_{2\lambda}(X,\xi',\lambda)$ は $(m-r)\times(m-r)$ 行列で

$$\det(\xi_0-A'_{2\lambda}(X,\xi'))=\lambda^{(1-\sigma_0)(m-r)}(c+o(1)),\quad c\neq 0$$

である．

証明: まず次のことに注意する．$(0,e'_n)$ の錐近傍 $\Omega'\times\Gamma$ と $S(x,\xi')\in\mathcal{A}(\Omega'\times\Gamma;M(m,\mathbb{C}))$ があって

$$S^{-1}(x,\xi')A(x,\xi')S(x,\xi')=A_1(x,\xi')\oplus A_2(x,\xi')$$

とできる．ここで，$\det(\xi_0-A_1)=\tilde{h}$, $\det(\xi_0-A_2)=e$ で

$$\det(\xi_0-\lambda^{-\sigma_0}A_{1\lambda})=\lambda^{-\sigma_0 r}\tilde{h}_\lambda=\prod_{j=1}^s(\xi_0-\omega^j)^{r_j},$$
$$\det(\xi_0-\lambda^{-\sigma_0}A_{2\lambda})=\lambda^{-\sigma_0(m-r)}e_\lambda$$

従って，

$$\begin{aligned}&S_\lambda^{-1}(X,\xi')\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda(X,\xi')S_\lambda(X,\xi')\\&=\lambda^{-\sigma_0}A_{1\lambda}(X,\xi')\oplus\lambda^{-\sigma_0}A_{2\lambda}(X,\xi')\end{aligned}$$

である．さて $S_\lambda(X,\xi')\in\mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$ に注意する．また

$$\sigma_0(S_\lambda)=S(0,e'_n)$$

で従って $\det\sigma_0(S_\lambda)\neq 0$ でもある．補題 8.5 およびその後の注意から，開集合 $W\subset V$ および $K(X,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$, $\det\sigma_0(K)\neq 0$ で

$$K^{-1}\lambda^{-\sigma_0}A_{1\lambda}K=\mathrm{upptriag}(\omega^1,...,\omega^1,\omega^2,...,\omega^s,...,\omega^s)$$

となるものが存在する．$T = S_\lambda(K \oplus I_{m-r})$ とおくと $T \in \mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$, $\det\sigma_0(T) \neq 0$ で

$$T^{-1}\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda T = \mathrm{upptriag}(\omega^1, ..., \omega^1, \omega^2, ..., \omega^s, ..., \omega^s) \oplus (\lambda^{-\sigma_0}A_{2\lambda})$$

が成立する．ここで，命題 8.1 を適用する．すると

$$\mathrm{rank}(\omega^j - T^{-1}\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda T) \leq m - r_j$$

が成立する．従って，$\mathrm{rank}(\omega^j - \lambda^{-\sigma_0}K^{-1}A_{1\lambda}K) \leq r - r_j$ が従う．これは，$\lambda^{-\sigma_0}K^{-1}A_{1\lambda}K$ がブロック上三角であることを示す．

$$T^{-1}\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda T = (\lambda^{-\sigma_0}K^{-1}A_{1\lambda}K) \oplus (\lambda^{-\sigma_0}A_{2\lambda})$$

であるから結論をうる． □

補題 **8.7.** 補題 8.6 と同じ仮定をする．このとき，任意の開集合 $V \subset U$ に対して，開集合 $W \subset V$ と可逆な $T(X, \xi', \lambda) \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ があって

$$T^{-1}\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda T = \mathrm{diag}(\omega^1, ..., \omega^1, \omega^2, ..., \omega^s, ..., \omega^s) \oplus (\lambda^{-\sigma_0}A_{2\lambda})$$

となる．

証明： $\omega^i - \omega^j = \lambda^{\epsilon m_{ij}}(c_{ij}(X, \xi') + O(\lambda^{-\epsilon}))$, $c_{ij} \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} &R(X, \xi', \lambda)^{-1}(\lambda^{-\sigma_0}K^{-1}A_{1\lambda}K)R(X, \xi', \lambda) \\ &\quad = \mathrm{diag}(\omega^1, ..., \omega^1, \omega^2, ..., \omega^s, ..., \omega^s) \end{aligned}$$

なる可逆な $R \in \mathcal{A}(W)\{\{\lambda^{-\epsilon}\}\}$ が存在する． □

命題 4.4 の証明に入る．補題 8.6 から，任意の開集合 $V \subset U$ 及び $1 \leq k \leq s$ に対して，開集合 $W \subset V$ と $T^k \in \mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$, $\det\sigma_0(T^k) \neq 0$ があって

$$(T^k)^{-1}\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda T^k = \begin{pmatrix} \omega^k I_{r_k} & C^k \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$$

となる．$\mu_k = \xi_0 - \omega^k$, $\Lambda_k = \xi_0 - B^k$ とおくと

$$(T^k)^{-1}\lambda^{-\sigma_0}L_\lambda T^k = \begin{pmatrix} \mu_k I_{r_k} & -C^k \\ 0 & \Lambda_k \end{pmatrix}$$

となる．従って，

$$(T^k)^{-1}\lambda^{-\sigma_0(m-1)}M_\lambda T^k = {}^{co}\begin{pmatrix} \mu_k I_{r_k} & -C^k \\ 0 & \Lambda_k \end{pmatrix}$$

から，これは次に等しい．

$$\begin{pmatrix} \mu_k^{r_k-1}(\mathrm{det}\Lambda_k)I_{r_k} & D^k \\ 0 & \mu_k^{r_k}{}^{co}\Lambda_k \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

ここで

$$D^k = \mu_k^{r_k-1}\tilde{D}^k$$

と書けることに注意する．以下簡単のために，$\Lambda(X,\xi,\lambda)\in\mathcal{A}(U\times\mathbb{C}_{\xi_0})[\tilde{\lambda}]$ に対して $\Lambda(\omega^k)=\Lambda(X,\omega^k,\xi',\lambda)$ と書く．このとき

$$\lambda^{-r\sigma_0}h_\lambda = \prod(\xi_0-\omega^j)^{r_j}e_\lambda = \lambda^{(m-r)\sigma_0}\mu_k^{r_k}\mathrm{det}\Lambda_k$$

より

$$\mathrm{det}\Lambda_k = \lambda^{-\sigma_0(m-r)}e_\lambda\prod_{j\neq k}(\xi_0-\omega^j)^{r_j}$$

が成立する．このことから，

$$\mathrm{det}\Lambda_k(\omega^k) = \frac{1}{r_k!}\partial_{\xi_0}^{r_k}\lambda^{-\sigma_0 m}h_\lambda(\omega^k)$$

これらのことから，$\partial_{\xi_0}^{r_k-1}M_\lambda$ を計算すると

$$(T^k)^{-1}\lambda^{\sigma_0}\partial_{\xi_0}^{r_k-1}M_\lambda(\omega^k)T^k = \begin{pmatrix} r_k^{-1}\partial_{\xi_0}^{r_k}h_\lambda(\omega^k)I_{r_k} & D'^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

が従う．以上の準備の下で，命題 4.4 を示す．

命題 4.4 の証明：どの $1\le j\le s$ に対しても証明は同じなので，$j=k$ のときを考え，$r_k=r$, $\omega^k=\omega$, $a_k=a$, $N^k=N$, $K^k=K$, $G^k=G$ と k をとって記すことにする．$LM=hI$ を ξ_0 で $r-1$ 回微分して

$$LN = \partial_{\xi_0}^{r-1}h-(r-1)\partial_{\xi_0}^{r-2}M$$

である ($L=\xi_0-A$ であった)．従って

$$\begin{aligned} L_\lambda\lambda^{-\sigma_0(r-1)}\partial_{\xi_0}^{r-1}M_\lambda &= L_\lambda N_\lambda \\ = \lambda^{-\sigma_0(r-1)}\partial_{\xi_0}^{r-1}h_\lambda &- (r-1)\lambda^{-\sigma_0(r-2)}\partial_{\xi_0}^{r-2}M_\lambda \end{aligned}$$

が成立する．$g=\partial_{\xi_0}^{r-1}h_\lambda$, $f=\partial_{\xi_0}^{r}h_\lambda$, $H=\lambda^{\sigma_0}\partial_{\xi_0}^{r-2}M_\lambda$, $F=\partial_{\xi_0}^{r-1}M_\lambda$ とおくと

$$L_\lambda F=gI-(r-1)H$$

である．右辺を S とおく．さて $h_\lambda=(\xi_0-\omega)^r h'$ であるから，$|\alpha|=1$ に対して

$$g^{(\alpha)}(\omega)=f(\omega)c_\alpha,\quad f(\omega)=\partial_{\xi_0}^{r}h_\lambda(\omega),\quad c_\alpha(X,\xi',\lambda)=(\xi_0-\omega)^{(\alpha)}$$

は明らかである．他方 (8.1) から，

$$M_\lambda(X,\xi)=(\xi_0-\omega)^{r-1}M'(X,\xi,\lambda)$$

と書ける．従って，

$$H^{(\alpha)}(\omega)=\lambda^{\sigma_0}F(\omega)c_\alpha,\quad F(\omega)=\partial_{\xi_0}^{r-1}M_\lambda(\omega),\quad |\alpha|=1$$

が従う．これらのことから

$$\begin{gathered}S^{(\alpha)}(\omega)=f(\omega)c_\alpha-(r-1)\lambda^{\sigma_0}F(\omega)c_\alpha=Q(\omega)c_\alpha,\\ Q(\omega)=f(\omega)I-(r-1)\lambda^{\sigma_0}F(\omega)\end{gathered}$$

である．(8.2) によれば

$$T^{-1}\lambda^{\sigma_0}F(\omega)T=\begin{pmatrix} r^{-1}f(\omega)I_r & C' \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

である．ただし，$T\in\mathcal{A}(W)[\lambda^{-\epsilon}]$, $\det\sigma_0(T)\neq 0$. 故に

$$\begin{aligned}T^{-1}Q(\omega)T&=f(\omega)-(r-1)T^{-1}\lambda^{\sigma_0}F(\omega)T\\ &=\begin{pmatrix} r^{-1}f(\omega)I_r & -(r-1)C' \\ 0 & f(\omega)I_{m-r}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．従って，$C''=-(r-1)C'$ と書くと

$$T^{-1}Q(\omega)^{-1}T=\begin{pmatrix} rf(\omega)^{-1}I_r & -rf(\omega)^{-2}C'' \\ 0 & f(\omega)^{-1}I_{m-r}\end{pmatrix}$$

このことから，$G_\lambda=\lambda^{-\sigma_0(r-1)}S$ および

$$G_\lambda^{(\alpha)}(\omega)=\lambda^{-\sigma_0(r-1)}S^{(\alpha)}(\omega)=\lambda^{-\sigma_0(r-1)}Q(\omega)c_\alpha,\quad |\alpha|=1$$

に注意すれば，$K=\lambda^{-\sigma_0(r-1)}Q(\omega)$ として，命題 4.4 の最初の部分が従う．さて，最後に，$T^{-1}F(\omega)Q^{-1}T$ は

$$
\begin{aligned}
&T^{-1}F(\omega)TT^{-1}Q^{-1}(\omega)T\\
&=\lambda^{-\sigma_0}\begin{pmatrix} r^{-1}f(\omega)I_r & C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} rf(\omega)^{-1}I_r & r(r-1)f(\omega)^{-2}C' \\ 0 & f(\omega)^{-1}I_{m-r} \end{pmatrix}\\
&=\lambda^{-\sigma_0}\begin{pmatrix} I_r & rf(\omega)^{-1}C' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=rf(\omega)^{-1}T^{-1}F(\omega)T
\end{aligned}
$$

と書けるから $F(\omega)Q^{-1}(\omega)=rf(\omega)^{-1}F(\omega)$ であることが分かる．元の記号では，

$$
Q(\omega)=\lambda^{\sigma_0(r-1)}K,\ \ N_\lambda=\lambda^{-\sigma_0(r-1)}\partial_{\xi_0}^{r-1}M_\lambda=\lambda^{-\sigma_0(r-1)}F(\omega)
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
F(\omega)Q(\omega)^{-1}&=N_\lambda K^{-1}=rf(\omega)^{-1}F(\omega)\\
&=r(\partial_{\xi_0}^r h_\lambda(\omega))^{-1}\partial_{\xi_0}^{r-1}M_\lambda(\omega)
\end{aligned}
$$

となって主張を得る． □

9. 主表象の漸近的分解 (命題 4.2 の証明)

ここでは，命題 4.2 を示す．まず

$$
\lambda^{-\sigma_0 m}h_\lambda(y,x,\xi)=\tilde{h}(y,x,\xi,\lambda^{-\epsilon})
$$

と書ける．ここで $\tilde{h}(y,x,\xi,s)$ は係数を $\mathcal{A}(U\times I)$ にもつ ξ_0 の多項式である．ただし $I=\{|s|<s_0\}$． ここで記号を簡単化しておく．ξ_0 を y, (x,ξ') を改めて x で表わすことにして

$$
\begin{aligned}
f(y,x,s)&=y^m+f_1(x,s)y^{m-1}+\cdots+f_m(x,s),\\
f_j(x,s)&\in\mathcal{O}(\Delta_N^\delta(\hat{x})\times\Delta_1^r(0))
\end{aligned}
$$

を考える．ここで $\Delta_N^\delta(\hat{x})=\{x\in\mathbb{C}^N\mid |x-\hat{x}|<\delta\}$ であり $\mathcal{O}(W)$ は W で正則な関数の全体をあらわす．実解析関数はある複素近傍に正則関数として拡張されるから，命題 4.2 は次の命題の帰結である．

命題 9.1. $f(y,x,s)$ は上に述べたとうりとする．このとき，$a\in\mathbb{R}^N$, $\Delta_N^{\bar{\delta}}(a)\subset\Delta_N^\delta(\hat{x})$ および $\bar{r}>0$ があって $f(y,x,s)$ は係数を $\mathcal{O}(\Delta_N^{\bar{\delta}}(a))$ にもつ s, $|s|<\bar{r}$ の収束する Puiseux 級数であらわされる m 個の根をもつ：

$$
\begin{aligned}
f(y,x,s)&=\prod_{j=1}^m(y-\phi^j(x,s)),\\
\phi^j(x,s)&=\sum_{k\geq 0}\phi_k^j(x)s^{k/p_j},\ \ p_j\in\mathbb{N},\ \ \phi_k^j(x)\in\mathcal{O}(\Delta_N^{\bar{\delta}}(a))
\end{aligned}
$$

証明： $\mathcal{O}_{(\hat{x},0)}$ で $(\hat{x},0)$ での正則関数の芽のなす環とする．$\mathcal{O}_{(\hat{x},0)}[y]$ は一意分解整域であるから，次のように表現できる．

$$f(y,x,s)=\prod_{j=1}^{k}p_j(y,x,s)^{r_j}$$

ここで $p_j(y,x,s)\in\mathcal{O}_{(\hat{x},0)}[y]$ は既約である．さて

$$p_j(y,x,s)=f_{j0}(x,s)y^{m_j}+\cdots+f_{jm_j}(x,s)$$

と書くと $\prod f_{j0}(\hat{x},0)=1$ であるから，$f_{j0}(x,s)\equiv 1$ と仮定してよい．

補題 9.2. $p_j(y,x,s)$ を y の多項式とみたときの判別式を $\omega_j(x,s)$ であらわす．このとき

$$\omega_j(x,s)\neq 0,\quad \forall x\in U,\quad \forall|s|<r$$

あるいは

$$\omega_j(x,s)=0,\quad x\in U,\quad |s|<r\Longrightarrow s=0$$

のいずれかが成立するような開集合 $U\subset\Delta_N^\delta(\hat{x})$, $U\cap\mathbb{R}^N\neq\emptyset$ と $r>0$ がとれる．

証明：まず次のことを思い出す．

$$\omega_1(x,s)=p_1(y,x,s)q(y,x,s)+r(y,x,s)(p_1)_y(y,x,s)$$

ここで，$\omega_1(x,s)\in\mathcal{O}(\Delta_N^\delta(\hat{x})\times\Delta_1^r(0))$．もし，$\omega_1(x,s)\equiv 0$ ならば $a(x,s)$, $b(x,s)$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$ in $\mathcal{O}_{(\hat{x},0)}$) があって

$$a(x,s)p_1(y,x,s)=u(y,x,s)d(y,x,s),$$
$$b(x,s)(p_1)_y(y,x,s)=U(y,x,s)d(y,x,s)$$

が成立する．ただし，$\mathrm{deg}d\geq 1$ である．このことから，$p_1(y,x,s)$ は $Q_{(\hat{x},0)}[y]$ で可約である．ただし，$Q_{(\hat{x},0)}$ は $\mathcal{O}_{(\hat{x},0)}$ の商体である．従って，$p_1(y,x,s)$ は $\mathcal{O}_{(\hat{x},0)}[y]$ で可約となり，矛盾する．

以下 $\omega_1(x,s)$ は $\Delta_N^\delta(\hat{x})\times\Delta_1^r(0)$ で恒等的には零でないとする．さて次のことに注意しよう．

$$\omega_1(x,s)=0,\quad \forall x\in\Delta_N^\delta(\hat{x})\cap\mathbb{R}^N,\quad \forall|s|<r$$
$$\Longrightarrow\omega_1(x,s)=0,\quad \forall x\in\Delta_N^\delta(\hat{x}),\quad \forall|s|<r$$

次の二つの場合に分けて考える．

(1) $a_1 \in \Delta_N^\delta(\hat{x}) \cap \mathbb{R}^N$ があって $\omega_1(a_1, 0) \neq 0$

(2) $\omega_1(x, 0) = 0, \forall x \in \Delta_N^\delta(\hat{x}) \cap \mathbb{R}^N$

(1) の場合は補題にいう U と r は容易にとれる．従って (2) の場合のみを考えればよい．$\omega_1(x, s)$ は $\Delta_N^\delta(\hat{x}) \times \Delta_1^r(0)$ で恒等的には零でないので，上で注意したことから $b \in \Delta_N^\delta(\hat{x}) \cap \mathbb{R}^N$ があって

$$\omega_1(b, s) \not\equiv 0 \ (s \text{ の関数として}),\ \omega_1(b, 0) = 0$$

Weierstrass の準備定理から $(b, 0)$ の近くで

$$\omega_1(x, s) = e(x, s)\{s^n + g_1(x)s^{n-1} + \cdots + g_n(x)\}$$

と表現される．ここで $g_i(b) = 0$ である．さて

$$g_{p+1} = \cdots = g_n = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{O}_b \quad \text{and} \quad g_p \neq 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{O}_b$$

なる p をとる．仮定から $p \leq n-1$ である．従って，$\delta_1 > 0, r_1 > 0$ 及び $a_1 \in \mathbb{R}^N$ $(\Delta_N^{\delta_1}(a_1) \subset \Delta_N^\delta(\hat{x}))$ があって $x \in \Delta_N^{\delta_1}(a_1), |s| < r_1$ のとき

$$\omega_1(x, s) = e(x, s)(s^{n-p} + \cdots + g_p(x))s^p, \quad |g_p(x)| \geq \exists c > 0$$

と書ける．ここで

$$\begin{aligned} |\omega_1(x, s)| \geq& |e(x, s)||s^p|\{|g_p(x)| - |s^{n-p}| - \cdots - |g_{p-1}(x)|s|\} \\ &\geq |e(x, s)||s^p|\{|g_p(x)| - M|s|\} \end{aligned}$$

に注意しよう．従って，$r_1 > 0$ を十分小さくとると

$$\omega_1(x, s) = 0,\ x \in \Delta_N^{\delta_1}(a_1),\ s \in \Delta_1^{r_1}(0) \Longrightarrow s = 0$$

いままでの結果をまとめておくと:$a_1 \in \Delta_N^\delta(\hat{x}) \cap \mathbb{R}^N, \delta_1 > 0, r_1 > 0$ で $\Delta_N^{\delta_1}(a_1) \subset \Delta_N^\delta(\hat{x})$, $r_1 \leq r$ なるものがあって，次のいずれかが成立する．

$$\omega_1(x, s) \neq 0, \quad \forall (x, s) \in \Delta_N^{\delta_1}(a_1) \times \Delta_1^{r_1}(0)$$

または

$$\omega_1(x, s) = 0,\ (x, s) \in \Delta_N^{\delta_1}(a_1) \times \Delta_1^{r_1}(0) \Longrightarrow s = 0$$

全く同じ議論を繰り返すことによって $a_2 \in \Delta_N^{\delta_1}(a_1) \cap \mathbb{R}^N$, $\delta_2 > 0$, $r_2 > 0$ で $\Delta_N^{\delta_2}(a_2) \subset \Delta_N^{\delta_1}(a_1)$, $r_2 \le r_1$ なるものをみつけて，次のいずれかが成立するようにできる．

$$\omega_2(x,s) \neq 0, \quad \forall(x,s) \in \Delta_N^{\delta_2}(a_2) \times \Delta_1^{r_2}(0)$$

または

$$\omega_2(x,s) = 0,\ (x,s) \in \Delta_N^{\delta_2}(a_2) \times \Delta_1^{r_2}(0) \Longrightarrow s = 0$$

$U = \Delta_N^{\delta_2}(a_2)$, $r = r_2$ ととれば $k = 2$ のときの証明が終わる．一般の場合はこの操作を繰り返せばよい． □

さて，$p_j(y,x,s) = 0$ を解こう．記号を簡単にするため，

$$p_j = p(y,x,s) = y^m + f_1(x,s)y^{m-1} + \cdots + f_m(x,s),$$
$$f_j(x,s) \in \mathcal{O}(\Delta_N^{\delta}(a) \times \Delta_1^{r}(0))$$

と書こう．補題 9.2 から，判別式 $\omega(x,s)$ は $\omega(x,s) \neq 0$ が $\Delta_N^{\delta}(a) \times \Delta_1^{r}(0)$ で成立するか，あるいは

$$\omega(x,s) = 0,\ (x,s) \in \Delta_N^{\delta}(a) \times \Delta_1^{r}(0) \Longrightarrow s = 0$$

のいずれかが成立するとしてよい．いま，$\omega(x,s) \neq 0$ が $\Delta_N^{\delta}(a) \times \Delta_1^{r}(0)$ で成立するならば，m 個の相異なる根 $\phi_j(x,s) \in \mathcal{O}(\Delta_N^{\delta}(a) \times \Delta_1^{r}(0))$ があって

$$p(y,x,s) = \prod_{j=1}^{m}(y - \phi_j(x,s)).$$

次の場合に移る．$\Delta_1^r(0)^* = \Delta_1^r(0)\backslash\{0\}$ と書くことにすると $(x,s) \in \Delta_N^{\delta}(a) \times \Delta_1^1(0)^*$ なら $\omega(x,s) \neq 0$ である．従って， 各 $(\hat{x},\hat{s}) \in \Delta_N^{\delta}(a) \times \Delta_1^1(0)^*$ に対して $(\hat{x},\hat{s})$ の近傍 U と m 個の関数要素 (ϕ_i, U) で次の条件を満たすものがある．

(a) $p(\phi_i(x,s),x,s) = 0, \quad (x,s) \in U$

(b) $\phi_i(\hat{x},\hat{s}) = y_i$,

(c) $p(y,x,s) = 0, (x,s) \in U$ なら，$y = \phi_i(x,s)$ なる i がある．

ここで，$\{y_i\}$ は $p(y,\hat{x},\hat{s}) = 0$ の根である．関数要素 (ϕ_1, U) は $\Delta_N^{\delta} \times \Delta_1^{r*}$ 内の任意の曲線 γ に沿って解析接続できる．このことを確かめよう．$\gamma(\tau) = (x(\tau), s(\tau))$, $a \le \tau \le b$, $\gamma(a) = (\hat{x},\hat{s})$ としよう．さて，(ϕ_1, U) が $\gamma(b)$ まで解析接続できないとする．上に述べたように， $\gamma(b)$ の近傍 W と m 個の関数要素 (ψ_i, W) がある．任意の $\epsilon > 0$ に対して，(ϕ_1, U) は $\gamma(b-\epsilon)$ まで解析接続されるから，$\epsilon > 0$ を十分

小さくとって，$\gamma(b-\epsilon)$ のある近傍が W に含まれるようにする．ϕ_1 の解析接続はこの近傍で ψ_i のいずれかに一致する．これは (ϕ_1, U) が $\gamma(b)$ まで解析接続できることになって矛盾である．

さて，$C(t) = (\hat{x}, \hat{s}e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$ とする．自然数 k に対して C^k で C の k 回の積を表わすものとする．h を

$$(\phi_1)_{C^h(2\pi)} = (\phi_1)_{C(0)}$$

を満たす最小の自然数とする．$\gamma' = (z(t), s(t))$ を $(\hat{x}, \hat{s})$ と (z, ζ) を結ぶ曲線とし，γ を

$$\gamma = (z(t), s(t)^h)$$

で定義する．γ は明らかに，$\Delta_N^\delta \times \Delta_1^{r*}$ 内の曲線である．ϕ_1 を γ に沿って解析接続したものを ϕ とし

$$F(z, \zeta) = \phi_{(z,\zeta)}$$

で $F(z, \zeta)$ を定義する．$F(z, \zeta)$ は well-defined である．なぜなら，γ'_1, γ'_2 を $(\hat{x}, \hat{s})$ と (z, ζ) を結ぶ２本の曲線とすると，$\gamma'_1(\gamma'_2)^{-1}$ は $\Delta_N^\delta \times \Delta_1^{r*}$ 内で C^n に連続変形される．ここで n はある自然数である．従って，$\gamma_1\gamma_2^{-1}$ は C^{nh} に連続変形される．ゆえに，$F(z, \zeta)$ は γ' に依らない．従って，$F(z, \zeta)$ は $\Delta_N^\delta \times \Delta_1^{r*}$ で正則であり，かつ局所有界である．ゆえに，$F(z, \zeta)$ は $\Delta_N^\delta \times \Delta_1^r$ で正則であり，従って

$$F(z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(z)\zeta^j, \quad g_j(z) \in \mathcal{O}(\Delta_N^\delta).$$

$\phi_1(z, \zeta^h) = F(z, \zeta)$ であるから

$$\phi_1(z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(z)(\zeta^{1/h})^j$$

と書ける．さて，C の何乗かに沿って互いに解析接続されるものをまとめて，グループ分けする．すなわち

$$\{1, 2, ..., m\} = \cup_{j=1}^{q} I_j, \quad I_j \cap I_k = \emptyset, \quad j \ne k$$

ここで $I_1 = \{1, j_1, ..., j_{h-1}\}$ であり，$\phi_i(z, \zeta^h) = F(z, \zeta)$, $i \in I_1$ である．次に ϕ_i, $i \in I_2$ を選んで上と同じ議論を繰り返すと，$F_2(z, \zeta) \in \mathcal{O}(\Delta_N^\delta \times \Delta_1^r)$ があって

$$\phi_i(z, \zeta^{h_2}) = F_2(z, \zeta), \quad i \in I_2$$

となる．以下この議論を繰り返すと

$$\phi_i(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{ik}(x)(s^{1/h_j})^k,\ g_{ik}(x) \in \mathcal{O}(\Delta_N^\delta),\ i \in I_j$$

これが示したいことであった． $\square$

10. 漸近的 Levi 条件 (命題 4.3, 8.1) の証明

ここでは，命題 4.3 および命題 8.1 を示す．$\omega^j(X,\xi',\lambda)\in\mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$ とし，

$$\lambda^{-\gamma}h_\lambda=\prod_{j=1}^{s}(\xi_0-\omega^j)^{r_j}\lambda^{-(m-r)}e_\lambda$$

から出発する．$\gamma=\sigma_0 r+(m-r)$ であった．$(\hat{X},\hat{\xi}')\in U$, $\hat{X}=(\hat{y},\hat{x})$ とする．$\Omega'\subset\mathbb{R}^{n+1}$ を $\hat{x}$ の開近傍，Ω'' を $\hat{\xi}'$ の開錐近傍で，$\{\hat{y}\}\times\Omega'\times\Omega''\subset U$ であるとする．このとき，$L_\lambda(\hat{y},x,D)$ は Ω' 上の微分作用素である．λ を十分大にとって固定するとき，

$$\omega^j(\hat{y},x,\xi')\in\mathcal{A}(U)$$

であり，$\omega^j(\hat{y},x,\xi')$ は $h_\lambda(\hat{y},x,\xi)$ の特性根で重複度 r_j は $\Omega'\times\Omega''$ 上一定である．ゆえに，$h_\lambda(\hat{y},x,D)$ に対して梶谷の結果 [21] が適用できる．以下このことを確かめる．

補題 10.1. $L(x,D)$ は $x=0$ で強双曲系とする．$\tilde{L}(x,D)=\lambda^{-\sigma_0}L_\lambda(\hat{y},x,D), \hat{x}\in\Omega'$ とする．$\tilde{\Omega}\subset\Omega'$ を $\hat{x}$ の十分小さな近傍とする．任意の $B(x)\in\mathcal{A}(\Omega';M(m,\mathbb{C}))$ と $x_0<\hat{x}_0$ で零となる任意の $f\in C_0^\infty(\Omega';\mathbb{C}^m)$ に対して，$x_0<\hat{x}_0$ で零になる $u\in C^\infty(\tilde{\Omega};\mathbb{C}^m)$ で

$$(\tilde{L}(x,D)+B(x))u=f\quad\text{in}\quad\tilde{\Omega}$$

なるものが存在する．さらに，閉凸錐 $\Gamma=\Gamma(\lambda)$ で $\Gamma\cap\{x_0\le 0\}=\{0\}$ なるものがあって

$$f\in C_0^\infty(\Omega';\mathbb{C}^m),\ \mathrm{supp}f\subset\hat{x}+\Gamma\Longrightarrow\mathrm{supp}u\cap\tilde{\Omega}\subset\hat{x}+\Gamma$$

が成立する．

証明： 最初の主張は明らか．二番目の主張は Holmgren (例えば [4], [5]) による．□

補題 10.2. $\tilde{L}(x,D)=\lambda^{-\sigma_0}L_\lambda(\hat{y},x,D)$ とする．$\tilde{P}=\tilde{L}+B(x), B(x)\in\mathcal{A}(\Omega';M(m,\mathbb{C}))$, $K\subset\tilde{\Omega}$ を $\hat{x}$ のコンパクト近傍とする．このとき，$C(\lambda)>0$ があって，

$$|(f,v)|\le C(\lambda)\sum_{|\alpha|\le N}\sup|D^\alpha f|\sum_{|\beta|\le N}\sup_{\hat{x}+\Gamma}|D^\beta\tilde{P}^*v|$$

が任意の $v\in C_0^\infty(K;\mathbb{C}^m)$ 任意の $\mathrm{supp}f\subset\hat{x}+\Gamma$ なる $f\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{C}^m)$ に対して成立する．

証明： [2, III, p. 402] をみよ．$f\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\mathrm{supp}f\subset\hat{x}+\Gamma$ の全体を S とする．$v\in C_0^\infty(K)$ として

$$S\ni f\mapsto(f,v)$$

を考えよう．S はセミノルム列 $\sup|D^\alpha f|$ で Fréchet 空間となる．$C_0^\infty(K)$ にセミノルム

$$\sup_{\hat{x}+\Gamma}|D^\alpha \tilde{P}^* v|$$

を導入する．さて，$f\in\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $\mathrm{supp} f\subset \hat{x}+\Gamma$ とするとき，K 上で $\chi\equiv 1$ となる $\chi\in C_0^\infty(\Omega')$ をとって χf を考えると，仮定から

$$\tilde{P}u=\chi f \quad \text{in} \quad \tilde{\Omega}$$

なる $u\in\mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$, $\mathrm{supp} u\subset\hat{x}+\Gamma$ が存在する．ゆえに

$$(f,v)=(\chi f,v)=(\tilde{P}u,v)=(u,\tilde{P}^*v)$$

従って

$$|(f,v)|\le C\sup_{\hat{x}+\Gamma}|D^\alpha\tilde{P}^*v|$$

すなわち，f を固定すると，(f,v) は v について連続である．v を固定したときの f に関する連続性は明らかであるから，separately に連続，従って連続となって，結論を得る． □

次にこの節での目的である次の補題を示そう．

補題 **10.3.** $L(x,D)$ は $x=0$ で強双曲系とする．さらに，

$$\lambda^{-\gamma}h_\lambda=\prod_{j=1}^{s}(\xi_0-\omega^j)^{r_j}\lambda^{-(m-r)}e_\lambda,\ \omega^j\in\mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$$

とする．このとき，$R>0$ があって，任意の $\lambda>R$ に対し，開集合 $U_\lambda\subset U$ および $T(X,\xi')\in\mathcal{A}(U_\lambda;M(m,\mathbb{C}))$ で

$$T(X,\xi')\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda T^{-1}(X,\xi')=\{\oplus\omega^j(X,\xi',\lambda)\}\oplus {A'}_{2\lambda}$$

を満たすものが存在する．ここで

$$\det(\omega^j(X,\xi',\lambda)-{A'}_{2\lambda}(X,\xi'))\neq 0,\ (X,\xi')\in U_\lambda,\ \lambda>R$$

である．

証明：証明のために $\tilde{P}$ の共役作用素 $\tilde{P}^*=(\tilde{L}+B(x))^*$ を考える．まず $\tilde{P}(x,D)^*$ の表象は

$$\tilde{L}(x,\xi)^*+C(x)$$

の形であることに注意しよう．$\tilde{L}(x,\xi) = \lambda^{-\sigma_0} L_\lambda(X,\xi)$ であった．補題 8.6 の議論を繰り返すことによって，$S(X,\xi') \in \mathcal{A}(U; M(m,\mathbb{C}))$ があって，

$$S(X,\xi')\tilde{L}^* S^{-1}(X,\xi') = (\xi_0 - {A'}^*_{1\lambda}) \oplus (\xi_0 - {A'}^*_{2\lambda})$$

と出来る．ここで

$$\det(\xi_0 - {A'}^*_{1\lambda}) = \prod_{j=1}^{s} (\xi_0 - \omega^j(X,\xi',\lambda))^{r_j},$$
$$\det(\xi_0 - {A'}^*_{2\lambda}) = \lambda^{(1-\sigma_0)(m-r)}(e(0,e_n) + o(1))$$

であった．$R > 0$ を十分大にとると，$\lambda > R$ で $(X,\xi') \in U$ のとき，$\det(\omega^j(X,\xi',\lambda) - {A'}^*_{2\lambda}(X,\xi')) \neq 0$ である．従って，各 $\lambda > R$ に対して，$U_\lambda \subset U$ および $S_1(X,\xi') \in \mathcal{A}(U_\lambda; M(r,\mathbb{C}))$ (S_1 は一般に λ に依存する) がとれて

$$S_1(X,\xi'){A'}^*_{1\lambda} S_1^{-1}(X,\xi') = \oplus \Lambda_j$$

とできる，ただし $\Lambda_j = \oplus_{i=1}^{q(j)} \Lambda_{ji}$

$$\Lambda_{ji} = \begin{pmatrix} \omega^j & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \omega^j & \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(U_\lambda; M(p_{ji},\mathbb{C}))$$

である ([10], [21] を見よ)．従って

$$T(X,\xi') = (S_1 \oplus I_{m-r})S(X,\xi') \in \mathcal{A}(U_\lambda; M(m,\mathbb{C}))$$

とおくと

$$T\tilde{L}^* T^{-1} = (\xi_0 - \oplus\Lambda_j) \oplus (\xi_0 - {A'}^*_{2\lambda})$$

となる．$(T^*)^{-1}\tilde{L}T^* = (\xi_0 - \oplus\Lambda_j) \oplus (\xi_0 - A'_{2\lambda})$ であるから補題を示すには，$p_{j1} = \cdots = p_{jq(j)} = 1$ を示せばよい．矛盾によって示そう．一般性を失うことなく，$p_{11} = k \geq 2$ と仮定してよい．[21] にしたがって $B(x)$ を適当に選び，補題 10.2 に矛盾する v を構成しよう．$(\hat{y},\hat{x},\hat{\xi}') \in U_\lambda$ としよう．一般性を失うことなく，$\hat{x} = 0$ と仮定してよい．$\phi(x)$ を

$$\phi_{x_0} = \omega^1(\hat{y}, x, \phi_{x'}, \lambda), \ \ \phi(0,x') = \langle x', \hat{\xi}' \rangle$$

の解とする．さて $\tilde{L}^*(x,\xi)=\xi_0-\tilde{A}^*(x,\xi')$ と書こう．

$$\tilde{A}^*(x,\xi')=\lambda^{-\sigma_0}A_\lambda(\hat{y},x,\xi')^*$$

であった．$N(x)=T(\hat{y},x,\phi_{x'})$ とおくと

$$N(x)\tilde{A}^*(x,\phi_{x'})N(x)^{-1}=\Lambda\oplus D$$

である．ここで

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\omega^1(\hat{y},x,\phi_{x'}) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \omega^1(\hat{y},x,\phi_{x'})\end{pmatrix}$$

である．さて

$$\begin{aligned}&N(x)(D_0-\tilde{A}^*+C(x))N(x)^{-1}\\ &=D_0-\tilde{A}^*_N+N(D_0N^{-1})+NCN^{-1}-\sum_{j=1}^{n}N\tilde{A}^*_j(D_jN^{-1})\end{aligned}$$

ただし，$\tilde{A}^*=\sum_{j=1}^n\tilde{A}^*_j(x)D_j$. また

$$\tilde{A}^*_N(x,D)=\sum_{j=1}^{n}N(x)\tilde{A}^*_j(x)N(x)^{-1}D_j$$

次に C を (従って，実際には B を)

$$C_0=N\{(D_0-\tilde{A}^*)N^{-1}\}+NCN^{-1}$$

とおくとき，

$$C_0=\begin{pmatrix}0 & & \\ & \ddots & \\ i & & 0\end{pmatrix}\oplus O$$

となるように選ぶ．ただしここで O は $m-k$ 次の零行列である．すると

$$N(x)(D_0-\tilde{A}^*+C)N(x)^{-1}=D_0-\tilde{A}^*_N+C_0$$

は明らかである．さて

$$\psi=\sum_{j=0}(\phi(x)+\tau_jx_0)\mu^{-j/k},\ v(\mu)={}^t(w(\mu),0),\ 0\in\mathbb{R}^{m-k}$$

とおく．このとき，容易に

$$e^{-i\mu\psi}\tilde{A}_N^* e^{i\mu\psi} v(\mu) = \mu \sum_{j=0} \sum_{l=1}^{n} N \tilde{A}_l^* N^{-1} \phi_{x_l} \mu^{-j/k} v(\mu)$$

$$= \mu \sum_{j=0} \mu^{-j/k} N \tilde{A}^*(x, \phi_{x'}) N^{-1} v(\mu) = \mu \sum_{j=0} \mu^{-j/k} \begin{pmatrix} \Lambda & O \\ 0 & D \end{pmatrix} v(\mu)$$

$$= \begin{pmatrix} \mu \sum_{j=0} \mu^{-j/k} \Lambda w(\mu) \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って，我々の解くべき方程式は

$$\{\mu(\sum_{j=0}(\phi_{x_0} + \tau_j)\mu^{-j/k} - \sum_{j=0} \mu^{-j/k}\Lambda) + \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ i & & 0 \end{pmatrix}\} w(\mu) = 0$$

である．$\phi_{x_0} - \omega^1(\hat{y}, x, \phi_{x'}) = 0$ であるから

$$\{\sum_{j=0} \tau_j \mu^{-j/k} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \sum_{j=0} \mu^{-j/k}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \\ i/\mu & & & 0 \end{pmatrix}\} w(\mu) = 0$$

さて

$$\tau(\mu) = \sum_{j=0} \tau_j \mu^{-j/k}, \ \ e(\mu) = \sum_{j=0} \mu^{-j/k}$$

とおくと次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} \tau(\mu) & -e(\mu) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -e(\mu) \\ i/\mu & & & \tau(\mu) \end{pmatrix} w(\mu) = 0 \tag{10.1}$$

ここで $\tau(\mu)$ を (10.1) が非自明な解 $w(\mu)$ をもつように選ぶ．すなわち

$$\tau(\mu)^k + \frac{i}{\mu} e(\mu)^{k-1} = 0 \tag{10.2}$$

となるように選ぶ．(10.2) から $\tau_0^k = 0$ 従ってまず，$\tau_0 = 0$ ととる．次に $\tau_1^k + i = 0$ が従う．そこで $\mathrm{Im}\tau_1 > 0$ と選ぶ．以下 (10.2) から順次 τ_j, $j \geq 2$ が決まる．$w(\mu) = {}^t(w_1(\mu), ..., w_k(\mu))$ と書く．

$$w_j(\mu) = \left(\frac{e(\mu)}{\tau(\mu)}\right)^{k-j} w_k(\mu), \quad j = 1, ..., k-1$$

ととると (10.1) が満たされる．$w_k(\mu) = \tau(\mu)^{k-1}$ ととると，$w_j(\mu) = e(\mu)^{k-j}\tau(\mu)^{j-1}$ となる．

$$w(\mu) = \sum_{j=0} W_j \mu^{-j/k}, \quad W_j \in \mathbb{C}^k$$

と書けることは明らかである．以上のことから

$$e^{-i\mu\psi}(\tilde{L} + B(x))^* e^{i\mu\psi} N(x)^{-1} v(\mu) \sim 0$$

さて，$\chi(x) \in C_0^\infty(K)$ を $\hat{x} = 0$ の近傍で 1 に等しいものとする．$v_\mu(x) = \chi(x) e^{i\mu\psi} N(x)^{-1} v(\mu)$ とおく．Γ を補題 10.2 にいう錐とする．($\hat{x} = 0$ としている) $f_\mu(\mu) = f(\mu x)\mu^{n+1}$ とおくと，$\psi(0) = 0$ であるから $\mu \to \infty$ のとき

$$\int f_\mu(x)\chi(x) e^{i\mu\psi} N(x)^{-1} dx \to \int f(y) e^{i\psi_y(y)} dy \chi(0) N^{-1}(0)$$

である．$v(\mu) \to e_1 = {}^t(1, 0, ..., 0)$ であるから

$$\int f(y) e^{i\psi_y(y)} dy \neq 0$$

とあらかじめ f を選んでおく．他方，

$$(\tilde{L} + B(x))^* v_\mu(x) = O(\mu^{-N}) e^{i\mu\psi} + \tilde{\chi}(x) e^{i\mu\psi}$$

で $\tilde{\chi}(x)$ は $\{\chi(x) = 1\}$ 上で零である．従って，$\Gamma \cap \mathrm{supp}\tilde{\chi}$ の上では $-\mu\mathrm{Im}\psi \leq -c\mu^{(k-1)/k}$ が成立する．c はある正数である．従って，任意の N' に対して，N を十分大にとると，Γ 上で $-\mathrm{Im}\psi \leq 0$ であるから

$$\sup_\Gamma |D^\beta(\tilde{L} + B(x))^* v_\mu| = O(\mu^{-N'})$$

となる．これは明らかに補題 10.2 に反する． □

命題 8.1 の証明 : $\lambda > R$ として，$\omega^k - \lambda^{-\sigma_0} A_\lambda$ を考えると，補題 10.3 から，U_λ があって，$d(X,\xi')$ を $\omega^k - \lambda^{-\sigma_0} A_\lambda$ の任意の $l > m - r_k$ 次小行列式とするとき，U_λ で $d(X,\xi') = 0$ であることが従う．$\omega^k \in \mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$ ゆえ，$\lambda > R$ を固定すると，$\omega^k(X,\xi',\lambda) \in \mathcal{A}(U)$ で従って，$d(X,\xi') \in \mathcal{A}(U)$ であるから，実は U で $d(X,\xi') = 0$ であることがわかる．d は任意の $l > m - r_j$ 次小行列式であったから，結論を得る． $\square$

命題 4.3 の証明 : $Q = \{\oplus(\xi_0 - \omega^j)\} \oplus A'_{2\lambda}$ とおく．補題 10.3 から，

$$T\lambda^{-\sigma_0(m-1)} M_\lambda T^{-1} = {}^{co}Q(X,\xi,\lambda)$$

が $(\xi_0, X, \xi') \in \mathbb{C} \times U_\lambda$ で成立する．ただし，$T(X,\xi') \in \mathcal{A}(U_\lambda; M(m,\mathbb{C}))$ である．Q の $(m-1)$ 次小行列式は

$$(\xi_0 - \omega^j)^{r_j - 1}$$

を因子として必ず含むので，

$${}^{co}Q^{(\alpha)}(X,\omega^j,\xi',\lambda) = 0,\ \ (X,\xi') \in U_\lambda,\ \ |\alpha| \le r_j - 2$$

従って

$$M_\lambda^{(\alpha)}(X,\omega^j,\xi',\lambda) = 0,\ \ (X,\xi') \in U_\lambda,\ \ |\alpha| \le r_j - 2$$

が成立する．ところで，$\omega^j(X,\xi',\lambda) \in \mathcal{A}(U)[\lambda^{-\epsilon}]$ で $M_\lambda^{(\alpha)}(X,\xi_0,\xi')$ は $\mathbb{C} \times U$ で実解析的であるから，$M_\lambda^{(\alpha)}(X,\omega^j,\xi')$ は U で実解析的，従って，$|\alpha| \le r_j - 2$ のとき，U で

$$M_\lambda^{(\alpha)}(X,\omega^j,\xi') = 0$$

となる． $\square$

11. 終わりに

最初に強双曲系の必要条件を調べるにあたって基本的と思える予想を述べることにする．$\overline{z}$ を特性点とし，$\Gamma(h_{\overline{z}})$ を $h_{\overline{z}}$ の双曲錐，即ち

$$\Gamma(h_{\overline{z}}) = \{z \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid h_{\overline{z}}(z) \neq 0\} \text{ の } (0, e_0) \text{ を含む連結成分}$$

とし，伝播錐 $C(h_{\overline{z}})$ を

$$C(h_{\overline{z}}) = \{z \in \mathbb{R}^{2n+2} \mid \sigma(z, w) \leq 0, \forall w \in \Gamma(h_z)\}$$

で定義する．このとき $\Lambda(h_{\overline{z}})$ が包合的であることと $C(h_{\overline{z}}) \subset \Lambda(h_{\overline{z}})$ は同値である (命題 12.7)．予想は

<u>予想</u>:$\overline{z}$ を r 次の特性点とする．$L(x, D)$ が $x = 0$ で強双曲型ならば次のいずれかが成立する．

(1) $\overline{z}$ は任意の $m-1$ 次小行列式に対して $r-2$ 次の特性点でかつ，$C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) = \{0\}$

(2) $\dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) = r$

定理 1.3 によって $\overline{z}$ は任意の $m-1$ 次小行列式に対して $r-2$ 次の特性点である．従ってこの予想は

$$C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) \neq \{0\} \Longrightarrow \dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) = r$$

と同値である．他方系 1.6 と上の注意から $C(h_{\overline{z}}) \subset \Lambda(h_{\overline{z}})$ なら $\dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) = r$ である．故に実質的には

$$C(h_{\overline{z}}) \not\subset \Lambda(h_{\overline{z}}),\ C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) \neq \{0\} \Longrightarrow \dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) = r$$

を示せばよい．$r = 2$ のときにはこの予想は正しい ([32])．$n = 1$ のときは $C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) \neq \{0\}$ から $C(h_{\overline{z}}) \subset \Lambda(h_{\overline{z}})$ が従うのでこの場合も正しい．

条件 $C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) = \{0\}$ は単独作用素が強双曲型であることを特徴づける条件の自然な一般化である．即ち，行列式 $h(x, \xi)$ を考えるとき，$h(x, D)$ が強双曲型であるための必要十分条件は $\overline{z}$ をかってな r 次特性点とするとき，$r \leq 2$ かつ $C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) = \{0\}$ の成立することである．条件 $\dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) = r$ は勿論 $L(\overline{z})$ の重複度 r の固有値 0 が半単純であることをいっている．

以上の考察から，$\overline{z}$ の近くで強双曲性を考察する際，最初の試みとしては，$C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) = \{0\}$ のときは単独強双曲型に近いものとして，又 $\dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) = r$ のときには対称 (或いは対称化可能) 系に近いものとして研究するのが妥当であることが推察される．

最初に $C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) = \{0\}$ の場合を考える．最も単純でかつ重要な例が §3 で扱った L である．§3 ではこの L に余因子作用素を右から作用させ，結果として得られる，主要部が単独の２階の 2×2 系に対して単独的な扱いをしている．より詳しくは，２階単独強双曲型作用素に対して a priori 評価を得る方法を適用している．更に一般の場合についての考察が [53] にある．

QUESTION: $C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) = \{0\}$ でかつ $\dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) < r$ のとき，$h_{\overline{z}}$ が満たすべき条件を求めよ．[53] では $C(h_{\overline{z}}) \cap \Lambda(h_{\overline{z}}) = \{0\}$ の他に $h_{\overline{z}}$ が余接束上で狭義双曲型を仮定して L の強双曲性を示している．しかし，この $h_{\overline{z}}$ に対する仮定 (の一部) は強双曲性の必要条件として得られるべきものと考えられる．

次に $\dim \mathrm{Ker} L(\overline{z}) = r$ の場合を考察する．ブロック対角にして考えればよいので，$r = m$ としても一般性を失わない．$\overline{z} = z_0$ とおく．$\dim \mathrm{Ker} L(z_0) = m$ から $L(z_0) = O$ である．まず $L(x, \xi)$ を $barz$ の近くで近似することを考える．

$$L(z_0 + \mu z) = \mu(L_{z_0}(z) + O(\mu)), \quad \mu \to 0$$

によって L の z_0 での局所化 L_{z_0} が定義できる．L_{z_0} は L を z_0 の近くで近似するものと考えられる．今 $z_0 = (0, e_n)$ とすると

$$L(x, \xi) = L_{z_0}(x\xi_n, \xi') + O(|x\xi_n| + |\xi'|)^2$$

である．今，主要部 $L_{z_0}(x, \xi')$ が対称あるいは対称化可能とする．最初から $T^{-1}L(x, D)T$ を考えることによって，

$$L(x, \xi) = \xi_n L_{z_0}(x, \xi'/\xi_n) + \xi_n R(x, \xi'/\xi_n),$$
$$R(x, \xi'/\xi_n) = O(|x| + |\xi'/\xi_n|)^2$$

で $L_{z_0}(x, \xi')$ は対称と仮定できる．$L(x, \xi)$ の固有値は常に実であるから，$L(x, \xi)$ は定数対称双曲系 $L_{z_0}(x, \xi')$ に “双曲摂動 ” 項 $R(x, \xi')$ を加えたものと考えることができる．記号を簡略化して

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j x_j, \quad P(x) = L(x) + R(x), \quad R(x) = O(|x|^2), \quad x \to 0$$

ここで A_j は実対称行列，$R(x)$ は $x = 0$ の近くで実解析的，また $x = (x_1, ..., x_n)$, $L(e_1) = I$ である．さらに $R(x)$ は双曲摂動項，即ち $\det P(x + \lambda e_1) = 0$ なる λ はすべて実とする． $x = 0$ の近傍で定義された実解析的な $A(x)$, $B(x)$ で $A(0)B(0) = I$ かつ $A(x)P(x)B(x)$ が $x = 0$ の近傍で対称行列になる A, B が存在するとき，この双

曲摂動は自明である，ということにする．$M^s(m,\mathbb{R})$ で m 次実対称行列の全体を表わし，その次元を $d(m)$ で表わす：$d(m)=m(m+1)/2$. また $R(L)=\{L(x)\mid x\in\mathbb{R}^n\}$ とおく．次の結果は [] にある．

以上のことから，$\dim L_{z_0}$ が十分大ならば，$L(x,\xi)$ は generic には z_0 の近くで滑らかに対称化可能であり，従って勿論強双曲系である．

QUESTION: 定理の成立する p の最小値を求めよ．もっと一般に $\dim R(L_0)$ と $L(x,\xi)$ の対称化可能性との関係を調べよ．

以上基本的と思われる予想とそれに関連する話題を述べた．この連続講演では基本命題 4.1 を示し，それを使って定理 1.3 および 1.5 を証明したが，そのとき基本命題に表われる $\sigma,\delta\in\mathbb{Q}_+^{n+1}$ としては二とうりの選び方しかしていない．その意味では基本命題を十分には活用していない．$\sigma,\delta\in\mathbb{Q}_+^{n+1}$ の選び方を変えるとそれに応じて必要条件がえられる．ここではその方法で得られる結果について少し述べる ([35]).

定理 11.1. z_0 を包合的な L の m 次の特性点，z_1 を L_{z_0} の r 次の特性点とする．このとき $L(x,D)$ が強双曲型ならば，L_{z_0} の任意の $m-1$ 次小行列式は z_1 で $r-2$ 次で零になる．

これは定理 1.3 と全く同じであり，L に対する必要条件が L_{z_0} に対しても遺伝することが分かる．これから定理 1.5 に対応する結果も成立するであろうことが予想される．このためには L の特性点が包合的という概念を定義 1.7 で導入したように L_{z_0} の特性点にたいしても導入，定式化する必要がある．そこで Σ が包合的な滑らかな多様体の場合を考察する．このとき $w\in\Sigma$, $z\in N_w\Sigma=T_w\Omega/T_w\Sigma$ に対して

$$h_\Sigma(w,z)=\lim_{\mu\to 0}h(w+\mu z)$$

で h の Σ に沿う局所化が定義できる．$N\Sigma$ 上には相対的シンプレクティック形式 $\tilde{\sigma}$ がある．さて $z_0\in\Sigma$ で $z_1\in N_{z_0}\Sigma$ を h_{z_0} の r 次の特性点とすると，$X=(z_0,z_1)$ は h_Σ の r 次特性点である．h_Σ の X での局所化を $h_{\Sigma,X}$ と書くことにし

$$\Lambda(h_{\Sigma,X})^{\tilde{\sigma}}\subset\Lambda(h_{\Sigma,X})$$

が成立するとき，X は 2-包合的ということにすると

定理 11.2. Σ は包合的な滑らかな多様体とし，$z_1\in N_{z_0}\Sigma$ を h_{z_0} の r 次の特性点とし，$X=(z_0,z_1)$ は 2-包合的とする．このとき $L(x,D)$ が強双曲型ならば

$$\dim\,\mathrm{Ker}L_{z_0}(z_1)=r$$

である．

すなわち定理 1.5 も L_{z_0} に対して遺伝する．定理 11.2 から任意の $w \in N_{z_0}\Sigma$ に対して $X = (w, z_0)$ が 2-包合的ならば $L_{z_0}(w)$ はすべての w で対角化可能である．

QUESTION: 上で述べた結果は基本命題の応用の一部でありまだ十分にはこの基本命題を利用していない．即ち，条件の座標系の選び方に対する不変性を重視したのでたとえば 単独作用素に対する Ivrii-Petkov の必要条件と呼ばれる [定理 4.1, 21] のような特性点の “inisotropic” な量りかたに対応する条件はいっさい導いていない．基本命題を利用して特性点の “inisotropic” な量りかたに対応する条件を系に対して求めよ．

ここで定理 11.1 および 11.2 と定理 11.4 がどのように強双曲性の下で結びつくのかをみよう．記号を再び簡略化して $L_{z_0}(w)$ の代わりに

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j x_j, \quad x = (x_1, ..., x_n)$$

と書く．ここで A_j は $m \times m$ の実定数行列である． $L(e_1) = I$ と仮定する．このとき ([44], [ ])

定理 **11.3.** 各 x に対し $L(x)$ は対角化可能で実固有値のみをもつとする．さらに $\dim R(L) \geq m(m+1)/2 - 1$ とする．このとき $L(x)$ は対称化可能である．即ち正則行列 T があって $T^{-}L(x)T =$ 対称 となる．

すなわち，定理 11.4 の条件が満たされていれば定理 11.5 を $L_{z_0}(w)$ に対して適用できる．従って定理 11.1 あるいは 11.2 が適当できる．

QUESTION : この定理の成立する最小の $\dim R(L)$ を求めることはそれ自身興味ある問題と思われる．

最後に最近 2×2 の 2 独立変数の系にたいしてその系が強双曲系となるための必要十分条件が求まったのでそれを簡単に述べる ([ ])．

$$Lu = \partial_t u - A(t,x)\partial_x u + B(t,x)u$$

ここで $t, x \in \mathbb{R}$ また $A(t,x)$ は原点の近くで定義された実数値実解析的 2×2 行列である．原点のまわりの座標系を取り替えて ($t = \text{const}$ は動かさない)

$$A(t,x) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,x) & a_{12}(t,x) \\ a_{21}(t,x) & -a_{11}(t,x) \end{pmatrix}.$$

と仮定してよい．$h(t,x)=-\mathrm{det}A(t,x)$ とおく．定理 2.1.1 から $h(t,x)\geq 0$ が原点の近傍で成立する．次のようにおこう．

$$c^\sharp=i(a_{12}-a_{21})/2,\quad a^\sharp=(a_{12}+a_{21})/2+ia_{11},\quad D^\sharp=c^\sharp\partial_t a^\sharp-a^\sharp\partial_t c^\sharp.$$

さて $h(t,x)$ は恒等的には零でないとする．このとき $h=|a^\sharp|^2-|c^\sharp|^2\geq 0$ であるから $|a^\sharp|$ も恒等的には零でない． Weierstrass の準備定理から $h(t,x)|a^\sharp(t,x)|^2$ は次のように書ける

$$h(t,x)|a^\sharp(t,x)|^2=x^{2n}(t^{2r}+\phi_1(x)t^{2r-1}+\cdots+\phi_{2r}(x))E(t,x) \tag{11.1}$$

ここで $\phi_j(0)=0$, $E(0,0)\neq 0$ 従ってさらに

$$h(t,x)|a^\sharp(t,x)|^2=x^{2n}\prod_{j=1}^{2r}(t-t_j(x))E(t,x)$$

と表現できる．ここで $t_j(x)$ は次の Puiseux 展開をもつ

$$t_j(x)=\sum_{k\geq 0}C_{jk}^{\pm}(\pm x)^{k/p_j},\quad p_j\in\mathbb{N},\quad 0<\pm x<\delta$$

さて

$$\mathcal{F}_\pm(A)=\{\mathrm{Re}t_1(x),...,\mathrm{Re}t_{2r}(x),\ \pm x>0\}.$$

とおこう． $r=0$ のときは $\mathcal{F}_\pm(A)=\{0\}$ とおく． $f(t,x)$ を原点の近傍で実解析的とし $\phi\in\mathcal{F}_\pm(A)$ とする．$f_\phi(t,x)=f(t+\phi(x),x)$ とおき f_ϕ の $(0,\pm 0)$ での Newton 多角形 $\Gamma_\pm(f_\phi)$ を次のように定義する．まず十分小さな $|x|$, $\pm x>0$ に対して

$$f_\phi(t,x)=\sum_{i,j\geq 0}a_{ij}^{\pm}t^i(\pm x)^{j/p},\quad \exists p\in\mathbb{N}$$

と表現できる．そこで

$$\Gamma_\pm(f_\phi)=\text{convex hull of }\{\bigcup_{a_{ij}^{\pm}\neq 0}(i,j/p)+\mathbb{R}_+^2\}.$$

と定義する．f が恒等的に零のときは $\Gamma_\pm(f_\phi)=\emptyset$ と定義する．

定理 **11.4.** L が原点で双曲型であるための必要十分条件は

$$\Gamma_{\pm}(t[D^{\sharp}+a^{\sharp}\mathrm{tr}(AB)]_{\phi})\subset\frac{1}{2}\Gamma_{\pm}([h|a^{\sharp}|^{2}]_{\phi}),\quad \forall\phi\in\mathcal{F}_{\pm}(A),$$
$$\Gamma_{\pm}(t[D^{\sharp}+a^{\sharp}\mathrm{tr}(A\overline{B})]_{\phi})\subset\frac{1}{2}\Gamma_{\pm}([h|a^{\sharp}|^{2}]_{\phi}),\quad \forall\phi\in\mathcal{F}_{\pm}(A)$$

の成立することである．

$t=0$ 以外では $h(t,x)>0$ なる A で，いかなる $B(t,x)$ をとっても L が双曲型とならない例を与える．h が恒等的に零の場合にはこのような例は松本ー山原によって始めて与えられた．

例 1: 次の A を考えよう．

$$A=\begin{pmatrix} x^2-t^4/2 & x^2+xt^2 \\ -x^2+xt^2 & -(x^2-t^4/2)\end{pmatrix}.$$

任意の $B(t,x)=(b_{ij}(t,x))$ に対して $a^{\sharp}\mathrm{tr}(AB)$ は

$$C_{40}x^4+C_{31}x^3t^2+C_{24}x^2t^4+C_{16}xt^6+C_{08}t^8$$

の形に書ける．ここで $C_{ij}(t,x)$ は $b_{ij}(t,x)$ の一次結合である．他方

$$h|a^{\sharp}|^2=t^8(x^4+t^8/4)/4=x^4t^8/4+t^{16}/16.$$

であるから $\phi=0$ ととって

$$\Gamma_{\pm}(t[D^{\sharp}+a^{\sharp}\mathrm{tr}(AB)])\not\subset\frac{1}{2}\Gamma_{\pm}([h|a^{\sharp}|^{2}])$$

が任意の B に対して成立する．なぜなら $D^{\sharp}+a^{\sharp}\mathrm{tr}(AB)$ は

$$2ix^3t+2x^2t^3+C_{40}x^4+C_{31}x^3t^2+C_{24}x^2t^4+C_{16}xt^6+C_{08}t^8$$

の形をしており，いかなる B をとっても $2ix^3t$ を消せない．

系 **11.5.** 原点の近くで $D^{\sharp}=0$ または $|c^{\sharp}|^2\le Ch$ が成立するとする．ただし C は正の定数．このとき L が双曲型であるためには

$$\Gamma_{\pm}(t[\mathrm{tr}(AB)]_{\phi})\subset\frac{1}{2}\Gamma_{\pm}(h_{\phi}),\quad \forall\phi\in\mathcal{F}_{\pm}(A). \tag{11.2}$$

の成立することが必要十分である．特に $B = O$　ならば L は双曲型である．

例 2: 対称系を考える．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

とするとき

$$c^\sharp = 0,\ \ D^\sharp = 0, \quad |a_{11}| \le |a^\sharp|,\ \ |a_{12}| = |a_{21}| \le |a^\sharp|,\ \ h = |a^\sharp|^2$$

であり，従って $|\mathrm{tr}(AB)|^2 \le Ch$ がすべての B に対して成り立つ．特に (11.2) がすべての B に対して成立する．

例 3: 次の A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} d(t,x) & a(t,x) \\ b(t,x) & -d(t,x) \end{pmatrix}$$

ある $\delta > 0$ があって $h = d^2 + ab \ge \delta d^2$ が原点の近傍で成立すると仮定する．このとき (11.2) が L が双曲型であるための必要十分条件である．

QUESTION: この例は最近の D'Ancona-Spagnolo [60] の結果と深く関連している．[60] では $m \times m$，n 独立変数の系を扱ってはいるが係数が t のみに依存する場合に限られている．この考察を 2 独立変数 (t,x) の $m \times m$ 系の場合に拡張せよ．

系 **11.6.** $h(t,x)$ は恒等的に零とする．このとき L が双曲型であるためには

$$D^\sharp + a^\sharp \mathrm{tr}(AB) \equiv 0, \quad D^\sharp + a^\sharp \mathrm{tr}(A\overline{B}) \equiv 0.$$

の成立することが必要十分である．

注意： $A^2 = O$ であるから

$$A = \begin{pmatrix} K\sigma\rho & K\sigma^2 \\ -K\rho^2 & -K\sigma\rho \end{pmatrix}$$

と書くと，系でいう条件は

$$\rho\partial_t\sigma - \sigma\partial_t\rho + b_1^2\sigma^2 - b_2^1\rho^2 + (b_1^1 - b_2^2)\sigma\rho = 0$$

に同値である．これは Vaillant [59] によって得られた条件である．更に特性根の重複度一定の一般の系に対して，系が双曲型になるための必要十分条件が松本 ([27], [29]) によって得られている．

定理 **11.7.** L が原点で強双曲型であるためには

$$\Gamma(tD_\phi^\sharp) \subset \frac{1}{2}\Gamma([h|a^\sharp|^2]_\phi),\ \Gamma(t[a_{ij}]_\phi) \subset \frac{1}{2}\Gamma(h_\phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{F}_\pm(A)$$

の成立することが必要十分である.

QUESTION: この結果を２独立変数 $m\times m$ 系に拡張せよ．即ち，２独立変数 $m\times m$ 系が強双曲系となるための条件を求めよ.

系 **11.8.** 原点の近くの各 (t,x) に対して $\|U(t,x)\|, \|U(t,x)^{-1}\| \le C$ ($C>0$ は (t,x) に依らない) なる $U(t,x)$ で

$$U(t,x)^{-1}A(t,x)U(t,x)^{-1}$$

が対角行列になるものがとれるとすると L は強双曲型である.

QUESTION : この系 11.10 は一様対角化可能ならばこの双曲系が強双曲系であることを主張している．勿論この一様対角化可能の条件は定数係数の双曲系が強双曲系となるための必要十分条件である ([24])．一様対角化可能の下での (Gevrey クラスでの) 双曲性の考察については非常に興味深い結果が梶谷 [49] にある. また，多羅間 [54] でも興味深い例が考察してある．一様対角化可能の仮定が一般には L^2 双曲性を意味しない例につては Strang [43] にある．上の系 11.10 と梶谷の結果の間を埋めよ．すなわち Gevrey クラス s で双曲型となるための，一様対角化可能条件に加えるべき条件を求めよ.

12. 付録

単因子について:

λ 行列 $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ が対等とは $A(\lambda)$ と $B(\lambda)$ が有限回の基本変形によって移りあうことである.

基本定理 **12.1.** 任意の n 次の λ 行列 $A(\lambda)$ は次の標準形に対等である.

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & & & & \\ & e_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ただし，$e_1(\lambda)$,...,$e_r(\lambda)$ は次の条件を満たす．すなわち，$e_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq r$ は monic な多項式で $i = 2, ..., r$ に対し，$e_i(\lambda)$ は $e_{i-1}(\lambda)$ で割り切れる．更に，標準形は一意的である．r を $A(\lambda)$ の階数，$e_1(\lambda)$,...,$e_r(\lambda)$ を $A(\lambda)$ の単因子という．

定義 12.1: n 次の λ-行列 $A(\lambda)$ のすべての k 次小行列式の最大公約式を，$A(\lambda)$ の k 次小行列式因子という．k 次小行列式がすべて零ならば k 次小行列式因子は零とする．

定理 **12.2.** 互いに対等な n 次 λ 行列の n 個の行列式因子は一致する．

$A(\lambda)$ の標準形を

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & & & & \\ & e_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とする．また，$d_k(\lambda)$ を k 次行列式因子とするとき，

$$d_k(\lambda) = e_1(\lambda) \cdots e_k(\lambda), \quad k \leq r, \quad d_k(\lambda) = 0, \quad k > r$$

このことから，

$$e_k(\lambda) = \frac{d_k(\lambda)}{d_{k-1}(\lambda)}, \quad k \leq r$$

とくに，このことから，単因子の一意性がわかる．

系 **12.3.** 二つの λ 行列が対等であるためには，それらの階数及び単因子が一致することが必要十分である．

定理 **12.4.** 二つの行列 A, B が相似であるためには，特性 λ 行列，$\lambda E - A, \lambda E - B$ が対等であることが必要十分である．

証明 : $B = P^{-1}AP$ のとき，$\lambda E - B = P^{-1}(\lambda E - A)P$ であるから，$\lambda E - A$ と $\lambda E - B$ は対等である．逆に $\lambda E - A$ と $\lambda E - B$ が対等ならば,

$$(\lambda E - A)P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - B)$$

なる可逆行列 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ が存在する．さて，$P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ を $\lambda E = A$, $\lambda E - B$ で除して

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)(\lambda E - B) + P, \quad Q(\lambda) = (\lambda E - A)Q_1(\lambda) + Q$$

を満たす λ 行列 $P_1(\lambda), Q_1(\lambda)$ 及び定数行列 P, Q が存在する．従って

$$(\lambda E - A)\{P_1(\lambda) - Q_1(\lambda)\}(\lambda E - B) = (\lambda E - A)P - Q(\lambda E - B)$$

が成立する．ところで，$P_1(\lambda) \neq Q_1(\lambda)$ ならば左辺は二次以上，右辺は一次以下となって矛盾する．従って，$P_1(\lambda) = Q_1(\lambda)$. ゆえに，

$$(\lambda E - A)P = Q(\lambda E - B)$$

λ の係数を比較して，$P = Q$ 従って $AP = QB$ すなわち

$$P^{-1}AP = B$$

□

伝播錐と線形性空間:

$q(X)$ は $\mathbb{R}^N$ 上の m 次斉次多項式で $\Theta \in \mathbb{R}^N$ 方向に双曲型とする．

補題 **12.5.** $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ を開凸錐とする．また，$V_i, i = 1, 2$ を $\mathbb{R}^N$ の線形部分空間で

$$\Gamma + V_i \subset \Gamma, \quad i = 1, 2$$

とする．このとき

$$\Gamma + (V_1 + V_2) \subset \Gamma$$

である．

証明：$Z \in \Gamma$, $X_i \in V_i$ とするとき

$$Z + X_1 + X_2 \in \Gamma$$

である．なぜなら，$Z/2 \in \Gamma$ ゆえ仮定から $Z/2 + X_i \in \Gamma$. Γ は凸ゆえ結果を得る．

□

この補題から

$$\Gamma + \Lambda \subset \Gamma$$

をみたす極大線形部分空間 Λ の存在することが分かる．以下 Γ としては

$$\{X \in \mathbb{R}^N \mid q(X) \neq 0\}$$

の Θ を含む連結成分，すなわち，q の双曲錐を考える．

$$\Lambda = \{X \in \mathbb{R}^N \mid q(tX+Y) = q(Y), \forall t \in \mathbb{R}, \forall Y \in \mathbb{R}^N\}$$

とする．$Y \in \Gamma$, $X \in \Lambda$ とすると，$q(tX+Y) = q(Y) \neq 0$ より Y と $X+Y$ は Γ 内の直線で結べる．従って $Y + X \in \Gamma$ すなわち

$$\Gamma + \Lambda \subset \Gamma.$$

以下 $\langle X \rangle$ は X で張られる直線を表わす.

補題 **12.6.** $\Gamma + \langle X \rangle \subset \overline{\Gamma}$ とすると $X \in \Lambda$ である．

証明 : $\epsilon > 0$ に対して $q(sY+tX) = q((s-\epsilon)Y + \epsilon Y + tX) = 0$ を考える． 仮定から $\epsilon Y + tX \in \overline{\Gamma}$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して成立する．q は Θ 方向に双曲型であるから ([13], [2, II])

$$q(sY+tX) = 0 \Longrightarrow s \leq \epsilon$$

ここで，$\epsilon > 0$ は任意であったから，$s \leq 0$ が従う．他方

$$q(sY+tX) = q(Y)\prod(s - \lambda_j(tX)),$$
$$q(sY-tX) = (-1)^m q(-sY+tX) = (-1)^m q(Y)\prod(-s-\lambda_j(tX))$$

と表現できるから，$\lambda_j(tX) \leq 0$ かつ $-\lambda_j(tX) \leq 0$ となって $\lambda_j(tX) = 0$ が従う．故に

$$q(sY+tX) = q(Y)\prod s$$

$s = 1$ ととって，$q(Y+tX) = q(Y)$, $\forall Y \in \Gamma$． ところで Γ は開錐であるから，$q(Y+tX) = q(Y)$, $\forall Y \in \mathbb{R}^N$. □

補題 12.6 から Λ は $\Gamma + \Lambda \subset \Gamma$ なる極大線形部分空間である．

命題 **12.7.** C を伝播錐，すなわち

$$C = \{X \mid \sigma(X, Y) \leq 0, Y \in \Gamma\}$$

とする．このとき

$$C \subset \Lambda \Longleftrightarrow \Lambda^\sigma \subset \Lambda$$

証明：まず，$C \subset \Lambda^\sigma$ を示そう．$\Gamma + \Lambda \subset \Gamma$ であったから，$X \in \Gamma^\sigma$ のとき

$$\sigma(X, Y + tZ) \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall Z \in \Lambda$$

従って，$\sigma(X,Y)+t\sigma(X,Z) \leq 0$ となって，$t \in \mathbb{R}$ が任意であることより，$\sigma(X,Z) = 0$ を得る．すなわち，$X \in \Lambda^\sigma$.

さて $\Lambda^\sigma \subset \Lambda$ とする．$C \subset \Lambda^\sigma \subset \Lambda$ から，$C \subset \Lambda$ である．逆に

$$C \subset \Lambda \Longrightarrow \Lambda^\sigma \subset \Lambda$$

を示そう．$C \subset \Lambda$ とし，$\Lambda^\sigma \not\subset \Lambda$ としよう．$X \in \Lambda^\sigma$, $X \notin \Lambda$ をとろう．補題 12.6 から，$\Gamma + \langle X \rangle \not\subset \overline{\Gamma}$. 従って，$Y + sX \notin \overline{\Gamma}$ なる，$Y \in \Gamma$, $s \in \mathbb{R}$ がとれる．Hahn-Banach の定理から，$W \in \mathbb{R}^N$ で

$$\sigma(W, Z) \leq 0, \quad \forall Z \in \Gamma, \quad \sigma(W, Y + sX) > 0$$

なるものがとれる．最初の不等式から，$W \in C$ である．一方，仮定から $C \subset \Lambda$ であるから明らかに，$\sigma(W, X) = 0$ でゆえに

$$\sigma(W, Y + sX) = \sigma(W, Y) + s\sigma(W, X) = \sigma(W, Y) \leq 0$$

となって矛盾する． $\square$

References

単行本

[1] L.Hörmander: Linear Partial Differential Operators. Springer 1963.

[2] L.Hörmander: The Analysis of Linear Partial Differential Operators,I,II,III,IV. Springer,1985.

[3] J.Leray: Hyperbolic Differential Equations. Inst. Adv. Study Princeton 1953.

[4] J.Rauch: Partial Differential Equations. Springer, 1991.

[5] 溝畑　茂: 偏微分方程式論**.** 岩波書店，1965.

[6] コルモゴロフ，フォーミン: 関数解析の基礎，上**,** 下**.** 岩波書店，1979.

[7] 熊ノ郷　準: 擬微分作用素**.** 岩波書店，1974.

[8] L.V. アールフォルス: 複素解析**.** 現代数学社，1979.

[9] 草場　公邦: 行列特論**.** 裳華房，1969.

[10] W.Wasow: Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. Interscience Publishers, 1965.

[11] F.R.Gantmacher: Théorie des matrices. Jacques Gabay, 1990.

論文

[12] V.I.Arnold: *Matrices depending on parameters*. Uspehi Math. Nauk **26** (1971), 101–114.

[13] M.F.Atiyah, R.Bott, L.Garding: *Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients, I*. Acta Math. **124** (1970), 109–189.

[14] E.Bernardi, T.Nishitani: *Remarks on symmetrization of* 2×2 *systems and the characteristic manifolds*. Osaka J.Math. **29** (1992), 129–134.

[15] J.Chazarain: *Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante*. Ann. Inst. Fourier **24** (1974), 173–202.

[16] H.Flaschka, G.Strang: *The correctness of the Cauchy problem.* Adv. in Math. **6** (1971), 347–379.

[17] K.O.Friedrichs: *Symmetric positive linear differential operators*. Comm.Pure Appl.Math. **11** (1958), 333–418.

[18] L.Garding: *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients*. Acta Math. **85** (1951), 1–62.

[19] L.Hörmander: *The Cauchy problem for differential equations with double characteristics*. J.Analyse Math. **32** (1977), 118 –196.

[20] L.Hörmander: *Hyperbolic systems with double characteristics*. Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 261–301.

[21] V.Ja.Ivrii, V.M.Petkov: *Necessary conditions for the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations to be well posed*. Uspehi Mat. Nauk. **29** (1974), 3–70.

[22] K.Kajitani: *Strongly hyperbolic systems with variable coefficients*. Publ. RIMS. Kyoto Univ. **9** (1974), 597–612.

[23] K.Kajitani: *Cauchy problem for non strictly hyperbolic systems*. Publ.RIMS Kyoto Univ. **15** (1979), 519–550.

[24] K.Kasahara, M.Yamaguti: *Strongly hyperbolic systems of linear partial differential equations with constant coefficients*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser A. **33** (1960), 1–23.

[25] P.D.Lax: *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*. Duke Math. J. **24** (1957), 627–646.

[26] W.Matsumoto: *On the conditions for the hyperbolicity of systems with double characteristics, I, II*. J.Math.Kyoto Univ. **21** (1981), 47–84, 251-271.

[27] W.Matsumoto: *Normal form of systems of partial differential and pseudodifferential operators in formal symbol classes*. J.Math.Kyoto Univ. **34** (1994), 15–40.

[28] W.Matsumoto, H.Yamahara: *Necessary conditions for strong hyperbolicity of first order systems*. Journées “Eq. aux D.P.” Saint Jean de Monts, 1989.

[29] W.Matsumoto: *Levi condition for general systems*. Physics on Manifolds, pp.303-307, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[30] S.Mizohata: *Some remarks on the Cauchy problem*. J.Math. Kyoto Univ. **1** (1961), 109–127.

[31] T.Nishitani: *Symmetrization of a class of hyperbolic systems with real constant coefficients*. Ann. Scuola Norm.Sup. **21** (1994), 97–130.

[32] T.Nishitani: *Une condition nécessaire pour systèmes hyperboliques*. Osaka J. Math. **26** (1989), 71–88.

[33] T.Nishitani: *Necessary conditions for strong hyperbolicity of first order systems*. J. Analyse Math. **61** (1993), 181–229.

[34] T.Nishitani: *Symmetrization of hyperbolic systems with non degenerate characteristics*. J.Func.Anal. **132** (1995), 251–272.

[35] T.Nishitani: *On localization of a class of strongly hyperbolic systems*. Osaka J.Math. **32** (1995), 41–69.

[36] O.A.Oleinik: *On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations*. Comm.Pure Appl.Math. **23** (1970), 569–586.

[37] Y.Oshime: *Canonical forms of* 3×3 *strongly hyperbolic systems with real constant coefficients*. J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 937–982.

[38] Y.Oshime: *On the canonical forms of* 3×3 *non diagonalizable hyperbolic systems with real constant coefficients*. J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), 983–1021.

[39] V.M.Petkov: *Necessary conditions for the Cauchy problem for non symmetrizable hyperbolic systems to be well posed*. Trudy Sem. Petrovski **1** (1975), 211–236.

[40] V.M.Petkov: *Sur la condition de Levi pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable*. Serdica Bulg. math. publ. **3** (1977), 309–317.

[41] V.M.Petkov: *Microlocal forms for hyperbolic systems*. Math. Nachr. **93** (1979), 117–131.

[42] V.M.Petkov, N.D.Kutev: *On regularly hyperbolic systems of first order*. God.Sofij Univ.,Fak.Mat.Mekh. **67** (1976), 375–389.

[43] G.Strang: *On strong hyperbolicity*. J. Math. Kyoto Univ. **6** (1967), 397–417.

[44] J.Vaillant: *Symétrisabilité des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique*. Ann. Scuo. Sup. Pisa **5** (1978), 405–427.

[45] J.Vaillant: *Conditions d'hyperbolicié des systèmes d'opérateurs aux derivées partielles*. Bull. Sc. Math. **114** (1990), 243–328.

[46] H.Yamahara: *On the Cauchy problem for weakly hyperbolic systems*. Publ. RIMS. Kyoto Univ. **12** (1976), 493–512.

[47] H.Yamahara: *On the strongly hyperbolic systems II, a reduction of hyperbolic matrices*. J.Math. Kyoto Univ. **29** (1989), 529–550.

[48] F.Jhon: *Algebraic conditions for hyperbolicity of systems of partial differential equations*. Comm. Pure appl. Math. **31** (1978), 787–793.

[49] K.Kajitani: *The Cauchy problem for uniformly diagonalizable hyperbolic systems in Gevrey classes.* Hyperbolic Equations and Related Topics, Ed., S.Mizohata pp.101-123, Kinokuniya 1986.

[50] T.Nishitani: *Stability of symmetric systems under hyperbolic perturbations.* Hokkaido Math. J. **26** (1997), 509–527.

[53] T.Nishitani: *Strongly hyperbolic systems of maximal rank.* to appear in Publ. RIMS., 1997.

[54] S.Tarama: *Une note sur les systm̀es hyperboliques uniformément diagonalisables.* Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ. **56** (1994), 9–18.

[55] R.Melrose: *The Cauchy problem and propagation of singularities.* Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations,Ed. S.S.Chern, pp.185-201, Springer, 1984.

[56] L.Garding: *Hyperbolic differential operators.* Perspectives in Mathematics Anniversary of Oberwolfach pp.215-247, Birkhäuser, 1984.

[57] V.Ya.Ivrii: *Linear hyperbolic equations.* Partial Differential Equations IV, Eds., Yu.V.Egorov, M.A.Shubin pp.149-235, Springer 1988.

[58] Y.Laurent: Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe. Progress in Math. Birkhäuser 53, 1985.

[59] J.Vaillant: *Sysèmes hyperboliques à multiplicité constante et dont le rang peut varier.* In Recent development in hyperbolic equations, pp. 340-366, Pitman Research Notes in Math. **183**, Longman, 1988.

[60] P.D'Ancona and S.Spagnolo: *On pseudosymmetric hyperbolic systems.* Preprint 1997.