Lebesque 積分

$f(x)$ を区間 $[0,1]$ 上の関数とするとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は関数列 $f_n(x) = n(f(x+1/n) - f(x))$ の $n \to \infty$ のときの極限関数であり，$f(x)$ の原始関数 (の一つ) は関数列 $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(kx/n)x/n$ の極限関数である．このように，関数列の極限として新たな関数を導入する，という考え方は解析学の真髄といってよい．Riemann 積分は，この関数列の極限操作との相性があまり良くない．

これらのことから予想されるように，Lebesgue 積分は，関数列の極限を考える，という操作と (Riemann 積分に比べて) 相性がよく，様々な議論が簡略になる．

Lebesgue 積分が必要とされる基本的理由のうちのもう一つを説明しておこう．微積分学で学んだように，実数の全体は完備である，すなわち隙間なくつまっている，このことは微積分の展開における礎石であった．このことは，Cauchy 列は必ず収束する，ということと同値でもあった．さて，$[0,1]$ 区間上でその絶対値が Riemann 積分可能な関数の全体を考えてみよう．このような２つの関数 $f(x)$, $g(x)$ の間の ” 距離 ” を

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

で測ることは自然である．今 $[0,1]$ 上 Riemann 積分可能な関数列 $\{f_n\}$ がこの距離で Cauchy 列になっているとする．このときある Riemann 積分可能な関数 $f(x)$ があって

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \to 0, \quad n \to \infty$$

となるであろうか？　すなわちこのような関数の全体は完備であろうか？残念ながらこのことは成立しない．これに対して，Lebesgue の意味で積分可能な関数の全体は完備である．この事実は，Lebesgue 積分可能な関数の全体の上で様々な解析をおこなうときに基本的な役割を果たす．

積分の一般論の構成方法としては，一般的には，Lebesgue 方式と Daniell 方式の２通りの方法がある．Lebesgue 方式 (1902) では公理論的な測度論から出発し，そこから積分論を導く，という方法をとる．一方 Daniell 方式 (1918) では，基本関数族の上における基本積分の概念から出発し，まず積分論を構成し，積分論から測度理論を導く，という方法をとる．ここでは Daniell 方式に従って Lebesgue 積分論を解説することにする．

目次

第1章　Riemann 積分，階段関数，零集合

1.1　Riemann 積分の定義，Darboux の定理

最初に Riemann 積分の定義を思い出しておこう．$\mathbf{R}^n$ の部分集合

$$B = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, ..., a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

を区間とよび，$\max\{b_1 - a_1, ..., b_n - a_n\}$ を B の直径とよぶ．このとき $v(B) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ は B の体積である．今 B が $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$ をみたす区間 B_i で[1]

$$B = \cup_{i=1}^p B_i$$

表される場合は $v(B) = \sum_{i=1}^p v(B_i)$ である．このような $\Delta = \{B_i\}$ を B の分割といい，B_i の直径の最大のものを分割 Δ の幅，といい $d(\Delta)$ で表すことにする．以下，基本区間 B を固定して考える[2]．$f(x)$ を B で定義された実数値有界関数とする．すなわち，m, M があって

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in B.$$

さて $\Delta = \{B_i\}$ を B の分割とする．$\xi_k \in B_k$ を選んで Riemann 和

$$R(f; \Delta) = \sum_{k=1}^p f(\xi_k) v(B_k)$$

を考える．

定義 1.1.1 Riemann 和が $d(\Delta_q) \to 0$ $(q \to \infty)$ なる分割の列の選び方にも，また $\xi_k \in B_k$ の選び方にもよらない極限をもつならば，この極限を $f(x)$ の B 上の Reimann 積分と呼ぶ．このとき，この極限 $\lim_{d(\Delta) \to 0} R(f; \Delta)$ を

$$\int_B f(x) dx$$

と書く．

---

[1] B° で B の開核をあらわすことにする．また特にことわらなければ，区間といえば閉区間を意味するものとする．

[2] B は以下有界区間とする．

さて，どのような $f(x)$ に対して Riemann 積分は可能であろうか？　Cauchy によると $f(x)$ が連続関数ならば Riemann 積分可能である[3].

簡単な Riemann 積分不可能な例をあげておく (従ってこの関数は連続関数ではない)

例 1.1.1 $\chi(x)$ は $0 \le x \le 1$ で次のように定義された関数とする．

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ は無理数} \\ 1 & x \text{ は有理数} \end{cases}$$

このとき χ は Riemann 積分可能でない．

$\Delta = \{B_k\}_{k=1}^p$ を B の分割とする．$f(x)$ は B 上の有界関数とし

$$m_k = \inf_{x \in B_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in B_k} f(x)$$

とおく．さて

$$\underline{D}(f;\Delta) = \sum_{k=1}^p m_k v(B_k), \quad \overline{D}(f;\Delta) = \sum_{k=1}^p M_k v(B_k)$$

を分割 Δ に対する，下 Darboux 和，上 Darboux 和と呼ぼう．任意に $\xi_k \in B_k$ を選んできたときに

$$mv(B) \le \underline{D}(f;\Delta) \le R(f;\Delta) \le \overline{D}(f;\Delta) \le Mv(B)$$

が成立することに注意しよう．ただし $m = \inf_{x \in B} f(x)$, $M = \sup_{x \in B} f(x)$ である．いま Δ, Δ' を I の 2 つの異なる分割とし，Δ' は Δ の細分とする．すなわち Δ をさらに分割してできたものとする．このとき，

$$\underline{D}(f;\Delta) \le \underline{D}(f;\Delta'), \quad \overline{D}(f;\Delta') \le \overline{D}(f;\Delta)$$

が成立する．なぜなら，$B_k = \cup B_{kj}$ とすると，$m_{kj} = \inf_{x \in B_{kj}} f(x)$ とおくとき $m_k \le m_{kj}$ であるから

$$\begin{aligned} \underline{D}(f;\Delta) &= \sum_k m_k v(B_k) = \sum_k m_k \sum_j v(B_{kj}) \\ &\le \sum_k \sum_j m_{kj} v(B_{kj}) = \underline{D}(f;\Delta') \end{aligned}$$

が従う．上 Darboux 和についても同様である．つぎに Δ, Δ' を任意の分割とするとき，

$$\underline{D}(f;\Delta) \le \overline{D}(f;\Delta') \tag{1.1}$$

[3] Analyse algébrique (1821) による．ただしその証明は厳密ではない．厳密な証明には，いわゆる一様連続性の概念を必要とするが，Cauchy はまだこの概念をもっていなかった．一様連続性の概念は Abel によって導入された．厳密な証明は Darboux による (1875)．閉区間上の連続関数が一様連続になることは Heine による (1870).

であることをみておこう．Δ の区間と Δ' の区間のありとあらゆる交わりを考える．それらの全体は新しい分割 Δ'' を定める．Δ'' は Δ および Δ' の細分になっている．従って上に示したことから

$$\underline{D}(f;\Delta) \le \underline{D}(f;\Delta'') \le \overline{D}(f;\Delta'') \le \overline{D}(f;\Delta')$$

となって結論を得る．つぎに $f(x)$ の B 上の下積分，上積分を

$$\underline{\int}_B f(x)dx = \sup_{\Delta} \underline{D}(f;\Delta), \quad \overline{\int}_B f(x)dx = \inf_{\Delta} \overline{D}(f;\Delta)$$

で定義する．ここで Δ はすべての分割を動くものとする．(1.1) からただちに

$$\underline{\int}_B f(x)dx \le \overline{\int}_B f(x)dx$$

が従う．

定理 1.1.1 (Darboux) $\Delta_1,\ldots,\Delta_q,\ldots$ は B の分割の列で $d(\Delta_q) \to 0$ $(q \to \infty)$ とする．このとき

$$\underline{D}(f;\Delta_q) \to \underline{\int}_B f(x)dx, \quad \overline{D}(f;\Delta_q) \to \overline{\int}_B f(x)dx$$

である．

証明：下積分の定義から，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\underline{\int}_B f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < \underline{D}(f;\Delta)$$

をみたす分割 Δ がある．$\Delta_q = \{B_j^{(q)}\}_{j\in J}$ とし，

$$\underline{D}(f;\Delta_q) = \sum{}' m_j^{(q)} v(B_j^{(q)}) + \sum{}'' m_j^{(q)} v(B_j^{(q)})$$

と書こう．ここで $\sum'$ は $B_j^{(q)}$ が Δ のある区間に含まれるようなものの和を表し，$\sum''$ はそれ以外の和を表す．Δ と Δ_q の区間のあらゆる交わりからなる分割を Δ'_q とするとき

$$0 \le \underline{D}(f;\Delta'_q) - \underline{D}(f,\Delta_q) \le (M-m)\sum{}'' v(B_j^{(q)})$$

は明らかである．$\sum'' v(B_j^{(q)})$ を評価しよう．$q \ge q_0$ ならば $B_j^{(q)}$ の各辺は Δ の分点をたかだか 1 つしか含まないとしてよい．Δ の第 k 辺の分点の数を r_k とするとき，$B_j^{(q)}$ の第 k 辺が Δ の分点を含むような $B_j^{(q)}$ の体積の和は

$$r_k d(\Delta_q) \prod_{i\ne k}(b_i - a_i), \quad B = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$$

以下である．従って $0 \le \underline{D}(f;\Delta'_q) - \underline{D}(f,\Delta_q) \le cd(\Delta_q)$ が成り立つ．一方

$$\underline{\int}_B f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < \underline{D}(f;\Delta) \le \underline{D}(f;\Delta'_q) \le \underline{\int}_B f(x)dx$$

であったから $cd(\Delta_q) \le \epsilon/2$ のとき

$$0 \le \underline{\int}_B f(x)dx - \underline{D}(f;\Delta_q) \le \epsilon$$

が従う．$\epsilon > 0$ は任意であるから

$$\lim_{q\to\infty} \underline{D}(f,\Delta_q) = \underline{\int}_B f(x)dx$$

である．上積分についても同様．(証終)

系 1.1.1 $f(x)$ が Riemann 積分可能であるための必要十分条件は

$$\underline{\int}_B f(x)dx = \overline{\int}_B f(x)dx$$

となることである．

証明：$\Delta_q = \{B_j^{(q)}\}$ を $d(\Delta_q) \to 0$ なる分割の列とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して $\xi_j^{(q)} \in B_j^{(q)}$ があって $f(\xi_j^{(q)}) < m_j^{(q)} + \epsilon$ とできるから

$$\begin{aligned} R(f;\Delta_q) &= \sum f(\xi_j^{(q)})v(B_j^{(q)}) \le \sum (m_j^{(q)} + \epsilon)v(B_j^{(q)}) \\ &= \underline{D}(f;\Delta_q) + \epsilon v(B) \le \underline{\int}_B f(x)dx + \epsilon v(B) \end{aligned}$$

$f(x)$ が Riemann 積分可能ならば $q \to \infty$ として

$$\int_B f(x)dx \le \underline{\int}_B f(x)dx + \epsilon v(B)$$

が従う．全く同様にして

$$\overline{\int}_B f(x)dx - \epsilon v(B) \le \int_B f(x)dx$$

を得る．$\epsilon > 0$ は任意であるから

$$\overline{\int}_B f(x)dx \le \underline{\int}_B f(x)dx$$

となって結論を得る．逆を示そう．$\Delta_q = \{B_j^{(q)}\}$ を $d(\Delta_q) \to 0$ なる分割列とする．Darboux の定理より

$$\begin{aligned} \underline{\int}_B f(x)dx &= \lim_{q\to\infty} \underline{D}(f;\Delta_q) \le \lim_{q\to\infty} R(f;\Delta_q) \\ &\le \lim_{q\to\infty} \overline{D}(f;\Delta_q) = \overline{\int}_B f(x)dx \end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$\lim_{q\to\infty} R(f;\Delta_q) = \underline{\int}_B f(x)dx = \overline{\int}_B f(x)dx$$

となって $f(x)$ は Riemann 積分可能である．(証終)

1.2　階段関数の定義，積分

定義 1.2.1 B で定義された関数 h に対し，B の分割 $\{B_i\}$ が存在し，

$$(*)\qquad h(x) = \begin{cases} h_1, & x \in B_1^\circ \\ \cdots & \\ h_q, & x \in B_q^\circ \end{cases}$$

となっているとき，h を階段関数という．ここで $h_1,...,h_q$ は定数である[4]．$B = \{\mathbf{R^n}$ のときは，有界な，内点を共有しない有限個の区間 $\{B_i\}$ があって $(*)$ を満たし，$\mathbf{R}^n \setminus \cup B_i$ では $h(x) = 0$ となっているとき，$h(x)$ を階段関数と呼ぶ．境界平面上の値は本質的ではない．

B における階段関数の全体を $H(B)$ で表す．$H(B)$ は線形空間である．さらに $h(x)$ が階段関数なら $|h(x)|$ も階段関数である．また $h(x), k(x)$ が階段関数ならば $\max\{h(x), k(x)\}, \min\{h(x), k(x)\}$ も階段関数である．特に

$$h^+(x) = \max\{h(x), 0\}, \quad h^-(x) = \max\{0, -h(x)\}$$

も階段関数である．階段関数の積分を定義しよう．

定義 1.2.2 階段関数 $h(x)$ の積分を

$$I(h) = \sum_{k=1}^{p} h_k v(B_k)$$

で定義し，B 上の h の積分という．

階段関数の積分について次が成立する．

- $h, k \in H(B)$ のとき $I(\alpha h + \beta k) = \alpha I(h) + \beta I(k)$
- $h(x) \le k(x)$ ならば $I(h) \le I(k)$．とくに $h(x) \ge 0$ ならば $I(h) \ge 0$.

最初の主張を確かめておこう．$B = \cup B_i$, $B = \cup B'_j$ とし B_i 上で $h(x) = h_i$, B'_j 上で $k(x) = k_j$ であるとしよう．

$$v(B'_j) = \sum_i v(B_i \cap B'_j), \quad v(B_i) = \sum_j v(B'_j \cap B_i)$$

[4] 当面，h_i は実定数とする

であることに注意すると

$$I(h) = \sum_i h_i v(B_i) = \sum_i \sum_j h_i v(B'_j \cap B_i)$$
$$I(k) = \sum_j k_j v(B'_j) = \sum_j \sum_i k_j v(B_i \cap B'_j)$$

である．他方

$$I(\alpha h + \beta k) = \sum_j \sum_i (\alpha h_i + \beta k_j) v(B'_j \cap B_i)$$
$$= \alpha \sum_j \sum_i h_i v(B'_j \cap B_i) + \beta \sum_j \sum_i k_j v(B_i \cap B'_j)$$
$$= \alpha I(h) + \beta I(k).$$

1.3 零集合の定義と特徴づけ

定義 1.3.1 $Z \subset B$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して Z が，体積の和が ϵ を超えない有限個，または可算個の区間 $B_1,...,B_n,...$ の開核で被覆できるとき，すなわち

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^{\circ}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i) \leq \epsilon$$

とできるとき，Z を零集合，あるいは測度 0 の集合という．

まずいくつかの簡単な注意を与えておこう．定義において Z が B_i の開核で被覆されることは本質的ではない．そうでないときには，例えば同心の体積が 2 倍の閉区間を考えればよい．また，つぎのことは容易にわかる．

- 零集合の部分集合は零集合である．
- 零集合の高々可算個の和集合は再び零集合である．

最初の主張は明らかである．２番目の主張を確かめよう．$Z_1,...,Z_n,...$ を零集合とするとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，Z_n を $\epsilon 2^{-n}$ より小なる体積和をもつ高々可算個の区間で被覆できる．従って，これらの区間をすべてあわせれば，$Z = \cup_{i=1}^{\infty} Z_i$ は ϵ より小な体積和をもつ可算個の区間で被覆される．

例 1.3.1 B と座標平面の交わり $B \cap \{x_k = 0\}$ は零集合である．

以下必要となるので，Heine-Borel の定理を思いだしておこう．

定理 1.3.1 (Heine – Borel) E を有界閉集合で，$\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を E の開被覆とする，すなわち O_α は開集合で

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$$

とする．このとき，有限個の $O_{\alpha_1},...,O_{\alpha_p}$ があって $E \subset O_{\alpha_1} \cup \cdots \cup O_{\alpha_p}$ とできる．

例 **1.3.2** 区間 B は零集合ではない．

ここで次の定義を導入しておく．

定義 **1.3.2** ある性質 (P) が適当な零集合を除けば成立しているとき，ほとんど至る所 (P) が成立するといい，(P) a.e.(almost everywhere) と略記する．

測度論を積分論から導く，という立場なので零集合も積分を使って特徴づけておこう．

定理 **1.3.2** $e \subset B$ が零集合であるためには，任意の $\epsilon > 0$ に対して次のような $h_i^{(\epsilon)} \in H(B)$ の列が存在することが必要十分である：

$$0 \le h_1^{(\epsilon)}(x) \le h_2^{(\epsilon)}(x) \le \cdots \le h_m^{(\epsilon)}(x) \le h_{m+1}^{(\epsilon)}(x) \le \cdots$$
$$\sup_m h_m^{(\epsilon)}(x) \ge 1, \forall x \in e, \quad I(h_m^{(\epsilon)}) < \epsilon.$$

証明：e を零集合とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して区間の列 $\{B_i\}$ があって

$$e \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^{\circ}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} v(B_i) \le \epsilon$$

とできる．さて

$$h_m^{(\epsilon)} = \begin{cases} 1, & x \in \cup_{i=1}^m B_i \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義するとこの $\{h_m^{(\epsilon)}\}$ が求めるものである．次に逆を考えよう．定理の主張をみたす $\{h_m^{(\epsilon)}\}$ が与えられているとしよう．$h_1^{(\epsilon)}(x)$ がその内部で 1/2 以上の値をとる区間を $B_1,...,B_{r_1}$ つぎに $h_2^{(\epsilon)}(x)$ がその内部で 1/2 以上の値をとる区間を $B_1,...,B_{r_1},...,B_{r_2}$ とし，以下同様に区間を選んでいく．共通内点が空でないときには，さらに細分することによって，共通の内点をもたない区間列 $B_1,...,B_{r_1},...,B_{r_p},..$ を得る．$h_m^{(\epsilon)}$, $m = 1, 2, ...$ を定義する区間の境界の和集合を Z とすると Z は零集合故，区間の列 $\tilde{B}_j$ があって，$Z \subset \cup_{j=1}^{\infty} \tilde{B}_j^{\circ}$, $\sum_{j=1}^{\infty} v(\tilde{B}_j) < \epsilon$ とできる．このとき

$$e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{B}_j$$

である．さて $I(h_m^{(\epsilon)}) \le \epsilon$ であるから $\sum_{j=1}^{r_m} v(B_j) \le 2\epsilon$ となる．ここで $m \to \infty$ とすると $\sum_{j=1}^{\infty} v(B_j) \le 2\epsilon$ が従う．(証終)

1.4　基本補題

ここで今後の考え方の基礎となる補題を２つ証明する．これらは非負の階段関数列の単調減少列があったとき，その積分値の零極限の存在と関数列自身の殆ど至る所での零極限の存在の同等性を主張するものである．

補題 1.4.1 非負の階段関数の列，$h_1(x),\dots,h_p(x),\dots$ が $h_1(x) \geq \cdots \geq h_p(x) \geq \cdots$ でかつ $I(h_p) \to 0$ ならば

$$\lim_{p\to\infty} h_p(x) = 0, \quad a.e.$$

である[5]．

証明： 今 $g(x) = \lim_{p\to\infty} h_p(x)$ とおくと $g(x)$ は下に有界な単調減少列の極限として，任意の $x \in B$ に対して定義されている．$G = \{x \in B \mid g(x) > 0\}$ とおくと

$$G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m, \quad G_m = \{x \in B \mid g(x) \geq \frac{1}{m}\}.$$

従って補題を示すには各 G_m が零集合であることをいえばよい．さて G_m 上で $h_p(x) \geq g(x) \geq 1/m$ が任意の p に対して成立するから $mh_p(x) \geq 1$, $mh_p \in H(B)$ で $p \to \infty$ のとき $I(mh_p) = mI(h_p) \to 0$ であるから任意の $\epsilon > 0$ に対して p_0 があって $I(mh_{p_0}) \leq \epsilon$ となる．ゆえに, 列 $mh_{p_0}, mh_{p_0},\dots$ を考えると，定理 1.3.2 より G_m は零集合である．(証終)

注意：　この補題で $h_p(x)$ はほとんど至るところで減少列，としてよい．実際, $h'_2 = \min(h_1, h_2)$, $h'_3 = \min(h'_2, h_3),\cdots$ というように定義していくと $h'_p(x)$ と $h_p(x)$ は殆ど至る所等しく，従って $I(h'_p) = I(h_p)$ でさらに $\{h'_p(x)\}$ は至る所減少列となる．故にこの補題から，$\lim_{p\to\infty} h'_p(x) = 0$ a.e. であるが，ある零集合を除いて $h'_p(x) = h_p(x)$ がすべての p に対して成立しているから, $\lim_{p\to\infty} h_p(x) = 0$ a.e. が従う．

つぎに，殆ど至る所での関数列の零極限の存在から積分値の零極限の存在を導こう．

補題 1.4.2 $0 \leq h_j(x) \in H(B)$ かつ $h_1(x) \geq h_2(x) \geq \cdots \geq h_p(x) \geq \cdots$ で $\lim_{p\to\infty} h_p(x) = 0$, *a.e.* ならば

$$\lim_{p\to\infty} I(h_p) = 0$$

である．

[5] $h_1(x) = 0$ なら $h_j(x) = 0$, $j \geq 1$ であるから，$B = \mathbf{R}^n$ のときも B が有界な場合に帰着され，同じ結果が成立する

証明：仮定から零集合 Z があって，任意の $x \in B \setminus Z$ で $h_p(x) \to 0$ $(p \to \infty)$ である．$\{B_{pj}\}$ を h_p を定義する区間とするとき，B_{pj} の境界の和集合を e_p とし，$e = \cup_{p=1}^{\infty} e_p$ とおく．明らかに $Z \cup e$ は零集合である．任意の $\epsilon > 0$ に対して $Z \cup e$ を（その開核が）覆う区間列 $\{B_j\}$ で $\sum v(B_j) < \epsilon$ となるものがとれる．さて任意の $y \in B \setminus \cup B_j^\circ$ に対してある番号 $m = m(y)$ があって $h_m(y) < \epsilon$ となる．$y \notin e$ であるから y を含む $h_m(x)$ がその内部で一定値をとる区間を $\tilde{B}(y)$ とかくと $y \in \tilde{B}^\circ(y)$ である．さて

$$B \subset \bigcup_{y \in B \setminus \cup B_j^\circ} \tilde{B}^\circ(y) \cup \bigcup B_j^\circ$$

で B はコンパクト故 B_1,...,B_r, $\tilde{B}_1 = \tilde{B}(y_1)$,...,$\tilde{B}_q = \tilde{B}(y_q)$ が B を覆うとしてよい．いま $p = \max\{m(y_1), ..., m(y_q)\}$ とすると $m \geq p$ ならば $h_m(x)$ は $\tilde{B}_1^\circ$,...,$\tilde{B}_q^\circ$ 上で ϵ を超えない．また B_1°,...,B_r° 上では $M = \max_B h_1(x)$ を超えない．また必要ならば，区間を細分し，共通部分を除ぞくことによって $\tilde{B}_1$,...,$\tilde{B}_q$ は共通内点をもたないとしてよい．さて $m \geq p$ のとき $I(h_m) \leq M\epsilon + \epsilon v(B)$ であり，$\epsilon > 0$ は任意であるから $I(h_m) \to 0$ が従う．(証終)

注意：補題 1.4.1 の後の注意で述べたのと同じ推論によれば，$\{h_p(x)\}$ は殆ど至る所で減少列，としてよい．

1.5　Lebesgue の判定条件

いままでの考察を Riemann 積分可能性の判定に応用してみよう．Δ を B の分割とし，Δ にかんする下 Darboux 和 $\underline{D}(f;\Delta) = \sum m_k v(B_k)$ は階段関数

$$\underline{h}_\Delta(x) = \begin{cases} m_k, & x \in B_k^\circ \\ m, & \text{その他} \end{cases}$$

の積分である．同様に上 Darboux 和は階段関数

$$\overline{h}_\Delta(x) = \begin{cases} M_k, & x \in B_k^\circ \\ M, & \text{その他} \end{cases}$$

の積分である．いま分割の列 Δ_1, Δ_2,...,Δ_q,... で $d(\Delta_q) \to 0$ となるものを考える．さらに Δ_{q+1} は Δ_q の細分になっているものとする．このとき，殆ど至る所

$$\underline{h}_{\Delta_1}(x) \leq \underline{h}_{\Delta_2}(x) \leq \cdots, \quad \overline{h}_{\Delta_1}(x) \geq \overline{h}_{\Delta_2}(x) \geq \cdots$$

は明らかである．補題 1.4.1 の後の注意によれば，$\underline{h}_{\Delta_p}(x)$ を殆ど至る所で等しい，適当な階段関数でとりかえて，至る所で増加列，と仮定できる．$\overline{h}_{\Delta_p}(x)$ についても同様である．

定義 1.5.1

$$\underline{f}(x) = \lim_{q\to\infty} \underline{h}_{\Delta_q}(x), \quad \overline{f}(x) = \lim_{q\to\infty} \overline{h}_{\Delta_q}(x)$$

をそれぞれ，f の下方関数，上方関数と呼ぼう．

まず定義が，零集合を除いて，分割の列 $\{\Delta_q\}$ によらないことをみておこう．

$$f_\sim(x_0) = \liminf_{r\to 0, x\in B_r(x_0)} f(x), \quad f^\sim(x_0) = \limsup_{r\to 0, x\in B_r(x_0)} f(x)$$

とおこう，ここで $B_r(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < r\}$ である．$\Delta_1, \Delta_2,...,\Delta_q,...$ を分割列で Δ_{q+1} は Δ_q の細分になっているものとする．$\Delta_p = \{B_{pj}\}$ とするとき，e_p は B_{pj} の境界の和集合とし $e = \cup e_p$ とおく．$x_0 \in B \setminus e$ とする．定義から任意の $\epsilon > 0$ に対して $r > 0$ があって $x \in B_r(x_0)$ なら $f(x) > f_\sim(x_0) - \epsilon$ としてよい．また q が十分に大ならば分割 Δ_q を構成する小区間の一つ B_q で $x_0 \in B_q^\circ \subset B_r(x_0)$ なるものがある．したがって

$$\underline{h}_{\Delta_q}(x_0) = \inf_{x\in B_q} f(x) \geq f_\sim(x_0) - \epsilon$$

である．ゆえに $\underline{f}(x_0) = \lim_{q\to\infty} \underline{h}_{\Delta_q}(x_0) \geq f_\sim(x_0) - \epsilon$ となる．$r > 0$ をさらに小さくとると $B_r(x_0) \subset B_q$ とできる．よって下限の定義から，ある $x \in B_q$ があって $f(x) < f_\sim(x_0) + \epsilon$ とできる．したがって $\underline{h}_{\Delta_q}(x_0) = \inf_{x\in B_q} f(x) \leq f_\sim(x_0) + \epsilon$ となる．ゆえに $\underline{f}(x_0) = \lim_{q\to\infty} \underline{h}_{\Delta_q}(x_0) \leq f_\sim(x_0) + \epsilon$ を得る．$\epsilon >$ は任意であったから $\underline{f}(x_0) = f_\sim(x_0)$ となる．すなわち

$$\underline{f}(x) = f_\sim(x) \quad \text{a.e.}$$

$\overline{f}(x) = f^\sim(x)$, a.e. についても同様である．

定理 1.5.1 *$f(x)$ が Riemann 積分可能であるためには $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$, a.e. となることが必要十分である．*

注意：$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x)$, a.e. であるから定理は，$\underline{f}(x) = \overline{f}(x) = f(x)$. a.e. といってもよい．

証明：まず $f(x)$ を Riemann 積分可能としよう．Darboux の定理 1.1.1 と系 1.1.1 によれば

$$\lim_{q\to\infty} I(\underline{h}_{\Delta_q}) = \underline{\int}_B f(x)dx = \overline{\int}_B f(x)dx = \lim_{q\to\infty} I(\overline{h}_{\Delta_q})$$

が従う．したがって $\lim_{q\to\infty} I(\overline{h}_{\Delta_q} - \underline{h}_{\Delta_q}) = 0$. 他方 $\overline{h}_{\Delta_q} - \underline{h}_{\Delta_q}$ は殆ど至る所，減少列である．したがって Lemma 1.4.1 から

$$\lim_{q\to\infty} (\overline{h}_{\Delta_q} - \underline{h}_{\Delta_q}) = 0 \quad a.e.$$

ゆえに $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ a.e. となる．

逆に $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$, a.e. を仮定しよう．このとき

$$\lim_{q\to\infty}(\overline{h}_{\Delta_q} - \underline{h}_{\Delta_q}) = 0, \quad \text{a.e.}$$

であるから，Lemma 1.4.2 より $\lim_{q\to\infty} I(\overline{h}_{\Delta_q} - \underline{h}_{\Delta_q}) = 0$ が従う．ゆえに Darboux の定理より

$$\underline{\int}_B f(x)dx = \lim_{q\to\infty} I(\underline{h}_{\Delta_q}) = \lim_{q\to\infty} I(\overline{h}_{\Delta_q}) = \overline{\int}_B f(x)dx.$$

ゆえに系 1.1.1 より $f(x)$ は Riemann 積分可能である．(証終)

定理 1.5.2 (Lebesgue) $f(x)$ が Riemann 積分可能であるための必要十分条件は $f(x)$ の不連続点の集合が零集合となることである．

証明：最初に $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるための必要十分条件は $f_\sim(x_0) = f(x_0) = f^\sim(x_0)$ の成立することである．まずこれを確かめよう．いま連続とすると，任意の $\epsilon > 0$ に対して $r(\epsilon)$ がとれて $r < r(\epsilon)$，$x \in B_r(x_0)$ のとき $f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$ が成立する．従って

$$f(x_0) - \epsilon \le \inf_{x\in B_r(x_0)} f(x) \le f(x_0), \quad f(x_0) \le \sup_{x\in B_r(x_0)} f(x) \le f(x_0) + \epsilon$$

が従い，よって $f(x_0) - \epsilon \le f_\sim(x_0) \le f(x_0)$, $f(x_0) \le f^\sim(x_0) \le f(x_0) + \epsilon$ を得る．$\epsilon > 0$ は任意であるから $f_\sim(x_0) = f(x_0) = f^\sim(x_0)$.

逆に $f_\sim(x_0) = f^\sim(x_0) = f(x_0)$ としよう．任意の $\epsilon > 0$ に対して $r(\epsilon)$ がとれて，$r < r(\epsilon)$ のとき $x \in B_r(x_0)$ なら

$$f_\sim(x_0) - \epsilon < \inf_{y\in B_r(x_0)} f(y) \le f(x) \le \sup_{y\in B_r(x_0)} f(y) \le f^\sim(x_0) + \epsilon$$

が成立する．従って $f(x)$ は $x = x_0$ で連続である．

さて定理の証明に移る．$f(x)$ を Riemann 積分可能とすると，定理 1.5.1 より $f_\sim(x) = \underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x) = f^\sim(x)$, a.e. 従って $f(x)$ は殆ど至る所連続である．逆に $f(x)$ が殆ど至る所で連続とする．このとき，殆どいたるところ $f_\sim(x) = f^\sim(x)$. 従って $\underline{f}(x) = \overline{f}(x)$, a.e. ゆえに再び定理 1.5.1 より $f(x)$ は Riemann 積分可能である．(証終)

1.6　一般化

いままでの考察の一般化を考えるために，次のことに注意しよう．

補題 1.6.1 $f(x)$ が Riemann 積分可能であるための必要十分条件はつぎのような階段関数の列が存在することである：

$$k_1(x) \leq \cdots \leq k_q(x) \leq \cdots, \quad \ell_1(x) \geq \cdots \geq \ell_q(x) \geq \cdots$$
$$k_q(x) \leq f(x) \leq \ell_q(x)$$
$$\lim_{q\to\infty} k_q(x) = f(x) = \lim_{q\to\infty} \ell_q(x) \quad a.e..$$

さらにこのとき，

$$\int_B f(x)dx = \lim_{q\to\infty} I(k_q) = \lim_{q\to\infty} I(\ell_q)$$

である．

証明：$f(x)$ を Riemann 積分可能とする．このとき定理 1.5.1 およびその証明から $\underline{h}_{\Delta_q}(x) \leq f(x) \leq \overline{h}_{\Delta_q}(x)$ で，さらに

$$\lim_{q\to\infty} \underline{h}_{\Delta_q}(x) = \underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x) = \lim_{q\to\infty} \overline{h}_{\Delta_q}(x) \text{ a.e.}$$

であった．逆に定理の条件を満たす階段関数列が存在するとしよう．k_q, ℓ_q を定義する区間の境界のすべての和集合を Z とすると Z は零集合である．また仮定から，ある零集合 e があって，$x \notin e$ のとき $\lim_{q\to\infty} k_q(x) = f(x) = \lim_{q\to\infty} \ell_q(x)$ である． $x \notin Z \cup e$ で $f(x)$ が連続であることをみよう．任意の $\epsilon > 0$ に対して q を $\ell_q(x) - k_q(x) < \epsilon$ ととろう．このとき， $x \notin Z$ であるから，ある $\delta > 0$ があって $|y-x| < \delta$ ならば $\ell_q(y) - k_q(y) = \ell_q(x) - k_q(x) < \epsilon$ となって $f(x)$ は x で連続となる．故に定理 1.5.2 より $f(x)$ が Riemann 積分可能であることがわかる．

最後の主張を示そう．まず仮定から，$\lim_{q\to\infty} k_q(x) = f(x)$ a.e. であるから，任意の分割 Δ に対して $\underline{h}_\Delta(x) \leq \lim_{q\to\infty} k_q(x)$ a.e. である．従って $(\underline{h}_\Delta(x) - k_q(x))^+$ は非負の減少列であり，$\lim_{q\to\infty}(\underline{h}_\Delta(x) - k_q(x))^+ = 0$, a.e. である．したがって補題 1.4.2 から $\lim_{q\to\infty} I((\underline{h}_\Delta - k_q)^+) = 0$ である．従って $I(\underline{h}_\Delta) \leq \lim_{q\to\infty} I(k_q)$ である．故に

$$\underline{\int}_B f(x)dx \leq \lim_{q\to\infty} I(k_q).$$

同様にして，$\lim_{q\to\infty} I(\ell_q) \leq \overline{\int}_B f(x)dx$ が従う．$f(x)$ は Riemann 積分可能故

$$\lim_{q\to\infty} I(\ell_q) \leq \int_B f(x)dx \leq \lim_{q\to\infty} I(k_q).$$

従って結論を得る．(証終)

ここで Riemann 積分の概念を拡張することを考えてみよう．いま階段関数の増加列 $\{k_q\}$ があって $f(x) = \lim_{q\to\infty} k_q(x)$, a.e. でありかつ $\lim_{q\to\infty} I(k_q)$ が存在するとする．いま

$$I(f) = \lim_{q\to\infty} I(k_q)$$

とおくと，上の定理 1.6.1 より $f(x)$ が Riemann 積分可能なときには，Riemann 積分と一致する．問題はこの値が列 $\{k_q\}$ によらずに well-defined であるかどうかであるが，答えは肯定的である．このような考え方で，Riemann 積分を含む，積分の理論を築くことができる．ここで重要なことは，新しい理論を組み立てるときに，$\{k_q\}$ が階段関数である必要はなく，階段関数とその積分のもついくつかの一般的な性質が必要となるだけである．また，零集合の定義も，定理 1.3.1 の同値な定義を採用することによって，これらの関数が定義されている集合に位相が入っている必要はない．さらに，基本補題 1.4.1 および 1.4.2 から，このようにして組み立てられた積分論は，Riemann 積分にくらべ，関数列の極限操作との相性がよくなることが十分に予想される．

第2章　Lebesgue 積分

2.1　基本関数，基本積分，零集合

この章で，第一章で予告した積分概念の拡張を行う．一般論としては抽象集合 X とそこで定義された基本関数とその積分が与えられていればよいのでまずこれらについて述べる．有界な実数値関数の族 H が与えられていて次の性質を持つと仮定する．以下 $H = H(X)$ の関数を基本関数と呼ぶ．

- H は通常の加法と，実数の乗法とによって線形空間である．
- $h(x) \in H$ なら $|h(x)| \in H$ である．

以上の結果として $h^+(x) = \max\{h(x), 0\}$, $h^-(x) = \max\{0, -h(x)\}$ も H に含まれる．例えば $h^+ = (|h| + h)/2$ である．さらに $k(x)$, $h(x) \in H$ なら

$$\max\{h(x), k(x)\} + \min\{h(x), k(x)\} = h(x) + k(x),$$
$$\max\{h(x), k(x)\} - \min\{h(x), k(x)\} = |h(x) - k(x)|$$

より，$\max\{h(x), k(x)\}$, $\min\{h(x), k(x)\}$ も H に含まれる．

各 $h(x) \in H$ に h の積分といわれる実数 $I(h)$ が対応していて次の性質をもつと仮定する．

I. 任意の h, $k \in H$ と任意の α, $\beta \in \mathbf{R}$ に対して $I(\alpha H + \beta k) = \alpha I(h) + \beta I(k)$.

II. $h(x) \geq 0$ なら $I(h) \geq 0$.

III. $\{h_n\}$ が減少列で，各点 $x \in X$ で 0 に収束するなら $I(h_n) \to 0$.

$X = B$ を $\mathbf{R}^n$ の有界区間とし，$H(B)$ を B 上の階段関数の全体とするとき，この (X, H) は上記 I, II, III を満たす．とくに III を満たすことは補題 1.4.2 から従う．$X = \mathbf{R}^n$ のときも，$H(\mathbf{R}^n)$ として，(有界な) 有限個の区間で定数値をとり，残りの $\mathbf{R}^n$ の点においては 0 に等しい階段関数の全体をとれば，I, II, III が満たされる．

I と II から任意の $h(x) \in H$ に対して $-I(|h|) \leq I(h) \leq I(h^+) \leq I(|h|)$, $|I(h)| \leq I(|h|)$ が従う．

次に定理 1.3.2 に従って，零集合を定義しよう．

定義 2.1.1 任意の $\epsilon > 0$ に対して，非負の増加列 $\{h_p\} \subset H$ で $I(h_p) < \epsilon$, $\sup_p h_p(x) \geq 1$, $\forall x \in e$ なるものが存在するとき，e を零集合，あるいは測度 0 の集合という．性質 (P) が零集合を除き，X の至る所で成立するとき，(P) は殆ど至る所で成立する，という．

この定義に従って，可算個の零集合 $e_1,...,e_n,...$ の和集合が再び零集合であることをみておこう．実際，与えられた $\epsilon > 0$ に対して，関数 $0 \leq h_p^{(n)} \in H$ の増加列で $I(h_p^{(n)}) < \epsilon/2^n$, $\sup_p h_p^{(n)}(x) \geq 1$, $\forall x \in e_n$ なるものが存在する．このとき，基本関数 $h_p = \max\{h_p^{(1)}, ..., h_p^{(p)}\}$ は増加列であり，さらに $I(h_p) \leq \sum_{k=1}^{p} I(h_p^{(k)}) < \epsilon$ で，集合 $e = \cup e_n$ の上で $\sup_p h_p(x) \geq 1$ が成り立つ．

$X = B$, または $H = \mathbf{R}^n$ で $H = \{$ 階段関数の全体 $\}$ のときは，定理 1.3.2 によって，この零集合の定義は，定義 1.3.1 で与えた零集合の定義と一致する．

補題 2.1.1 減少列 $0 \leq h_p(x) \in H$ が殆ど至る所 0 に収束するなら $I(h_p) \to 0$ である．

証明：$M = \sup_{x \in X} h_1(x)$ とし，$h_p(x)$ は $X \setminus e$ の各点で 0 に収束するとする．e は零集合なので，任意の $\epsilon > 0$ に対して，増加列 $0 \leq k_p \in H$ が存在して $I(k_p) < \epsilon/M$, $\sup_p k_p(x) \geq 1$, $\forall x \in e$ となる．$\lim_{p \to \infty} I(h_p) \geq 0$, $\lim_{p \to \infty} I(k_p) \leq \epsilon/M$ が存在する．$(h_p - Mk_p)^+$ は減少列で，至る所 0 に収束する．従って III より，

$$\lim_{p \to \infty} I(h_p) - M \lim_{p \to \infty} I(k_p) \leq \lim_{p \to \infty} I((h_p - Mk_p)^+) = 0$$

が従う．故に $0 \leq \lim_{p \to \infty} I(h_p) \leq M \lim_{p \to \infty} I(k_p) \leq \epsilon$. ここで $\epsilon > 0$ は任意であるから結論を得る．(証終)

今 $h \in H$ は殆どいたるところ 0 としよう．このとき，減少列 $|h(x)|$, $|h(x)|$,... は殆どいたるところ 0 に収束するので，補題 2.1.1 より $I(|h|) = 0$ 従って $I(h) = 0$ である．従って $h(x)$, $k(x) \in H$ が殆ど至る所等しければ，$I(h) = I(k)$ である．この事実を利用すると，補題 2.1.1 の仮定において，$\{h_p\}$ は，殆ど至る所で減少列，としてよい．実際 $h'_2 = \min(h_1, h_2)$, $h'_3 = \min(h'_2, h_3)$ というように定義していくと，$h_p(x)$ と $h'_p(x)$ は殆ど至る所等しく，$I(h_p) = I(h'_p)$ であり，$\{h'_p\}$ は至る所減少列である．

2.2　クラス L^+

最初にクラス L^+ を導入しよう．

定義 2.2.1 基本関数の増加列 $h_n(x) \in H$ で $I(h_n)$ が有界，すなわち $I(h_n) \leq C$ で $\lim_{n \to \infty} h_n(x) = f(x)$, a.e. $(+\infty$ も含める) となるものが存在するときに $f(x) \in L^+$ という．

$g(x)$ が $f(x) \in H$ と殆ど至る所等しいならば $g(x) \in H$ であることに注意しよう．$f(x) \in H$ なら $f(x)$ は殆ど至る所，有限値であることを確かめておこう．$e = \{x \in X \mid f(x) = \infty\}$ とおこう．f を定義する $\{h_n\}$ は $h_n \geq 0$ と仮定してよい．なぜなら $g_n(x) = h_n(x) - h_1(x)$ を考えればよい．いま，任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとする．明らかに

$$e \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid h_n(x) > \frac{C}{\epsilon}\}$$

である．従ってすべての $x \in e$ に対して $\sup_n \epsilon h_n(x)/C \geq 1$ である．他方，$I(\epsilon h_n/C) = \epsilon I(h_n)/C \leq \epsilon$ より e は零集合である．

さて，$f(x) \in L^+$ に対してその積分 $I(f)$ を定義しよう．

定義 2.2.2 $f(x) \in L^+$ に対して，その積分を

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(h_n)$$

で定義する．この定義は，列 $\{h_n\}$ の選び方によらず *well defined* である．

まず $\{h_n(x)\}, \{k_n(x)\}$ を２つの H の増加列で $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$, a.e. $\lim_{n\to\infty} k_n(x) = g(x)$, a.e. かつ $f(x) \leq g(x)$, a.e. でしかも $I(h_n), I(k_n)$ は有界とする．このとき $\lim_{n\to\infty} I(h_n) \leq \lim_{n\infty} I(g_n)$ が成立することを示す．このことが示されれば，well-defined であることは明らかである．今 m を固定して，$h_m - k_n$, $n = 1, 2, ...$ を考えよう．これは減少列で

$$\lim_{n\to\infty} (h_m - k_n)(x) \leq h_m(x) - g(x) \leq f(x) - g(x) \leq 0, \quad \text{a.e.}$$

従って $(h_m - k_n)^+ \in H$ は非負の減少列で $\lim_{n\to\infty}(h_m - k_n)^+ = 0$, a.e. 故に，補題 2.1.1 より $\lim_{n\to\infty} I((h_m - k_n)^+) = 0$ である．ここで

$$\lim_{n\to\infty} I(h_m - k_n) = I(h_m) - \lim_{n\to\infty} I(k_n) \leq \lim_{n\to\infty} I((h_m - k_n)^+)) = 0$$

から，$I(h_m) \leq \lim_{n\to\infty} I(k_n)$ を得る．$m \to \infty$ として望む不等式が得られる．

この証明からわかるように，$f,\ g \in L^+$ で $f(x) \leq g(x)$, a.e. ならば $I(f) \leq I(g)$ である．ここでクラス L^+ における積分の性質を述べる．以後，記述を簡略化するために次の記法を使うことにする．

定義 2.2.3 ある零集合 e があって $x \in X \setminus e$ のとき $f_n(x)$ は増大列で $f(x)$ に収束するとき $f_n \nearrow f$ *a.e.* と書くことにする．

次の性質が成立することをみるのは簡単である．

(a) $f, g \in L^+$ なら $f + g \in L^+$ で $I(f + g) = I(f) + I(g)$.

(b) $f \in L^+$, $\alpha \geq 0$ なら $\alpha f \in L^+$ で $I(\alpha f) = \alpha I(f)$.

(c) $f, g \in L^+$ なら $\max(f,g), \min(f,g) \in L^+$ である．特に $f \in L^+$ のとき $f^+ = \max(f,0) \in L^+$ である．

ここで，$f \in L^+$ でも，一般には f^-, $|f|$ は必ずしも L^+ に属さないことに注意する．

定理 2.2.1 $f_n \in L^+$, $n = 1, 2, ...$, $f_n \nearrow f$ *a.e.* で $I(f_n) \leq C$ ならば，$f \in L^+$ で $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ である．

証明：各 $f_n \in L^+$ に対して，定義より $h_{nj} \in H$ で $h_{nj} \nearrow f_n$ a.e. $(j \to \infty)$ となるものがとれる．$h_n = \max(h_{1n}, ..., h_{nn}) \in H$ とおこう．明らかに $\{h_n\}$ は増加列で $h_n \leq \max(f_1, ..., f_n) = f_n$ a.e. である．従って $I(h_n) \leq I(f_n)$ である．このことから $I(h_n)$ の有界であることが従う．故に定義から

$$f^* = \lim_{n\to\infty} h_n \in L^+, \quad I(f^*) = \lim_{n\to\infty} I(h_n)$$

である．任意に k を固定して，$n \geq k$ とすると，$h_{kn} \leq h_n \leq f_n$ a.e. であるから，$f_k \leq f^* \leq f$ a.e. である．他方，$f_k \nearrow f$ a.e. であったから $f^* = f$ a.e. である．すなわち，$f \in L^+$．さらに，$I(h_n) \leq I(f_n) \leq I(f)$ および $I(h_n) \nearrow I(f^*) = I(f)$ であるから $I(f_n) \nearrow I(f)$ となる．(証終)

系 2.2.1 級数 $\sum_{k=1}^\infty g_k$, $g_k \in L^+$, $g \geq 0$ に対して，部分和の積分がすべて有界，すなわち

$$I(\sum_{k=1}^n g_k) \leq C, \quad n = 1, 2, ...$$

ならば，$f = \sum_{k=1}^\infty g_k$ は L^+ に属し，$I(f) = \sum_{k=1}^\infty I(g_k)$ である．

証明：定理 2.2.1 の証明において，$f_n = \sum_{k=1}^n g_k$ とおけばよい．(証終)

2.3 クラス L, Lebesgue 積分可能な関数

Lebesgue 積分可能な関数のクラスとその積分を定義しよう．

定義 2.3.1 L^+ の元の差で書けるものの全体を L で表す．すなわち $\phi \in L$ とは，$f, g \in L^+$ があって $\phi = f - g$ と書けることである．このとき，ϕ の X 上での Lebeqgue 積分を

$$\int_X \phi(x)dx = I(f) - I(g)$$

で定義する．この定義は勿論 ϕ の書き表し方にはよらず well defined である．

まず，クラス L の簡単な性質を確かめておこう．

(1) $\phi_i \in L$ ならば $\phi_1 + \phi_2 \in L$.

(2) $\alpha \in \mathbf{R}$, $\phi \in L$ ならば $\alpha\phi \in L$.

(3) $\phi \in L$ ならば $|\phi| \in L$, ϕ^+, $\phi^- \in L$.

(4) $\phi_i \in L$ ならば $\max(\phi_1, \phi_2)$, $\min(\phi_1, \phi_2) \in L$.

(1) は明らかである．(2) については，$\alpha < 0$ のとき $\alpha\phi = (-\alpha)g - (-\alpha)f$, $(-\alpha)g, (-\alpha)f \in L^+$ に注意すればよい．(3) については，まず $|\phi| = \max(f, g) - \min(f, g) \in L$ である．つぎに

$$\phi^+ = \frac{|\phi| + \phi}{2}, \quad \phi^- = \frac{|\phi| - \phi}{2}$$

に注意して，(1), (2) を適用しよう．最後に (4) については

$$\max(\phi, \psi) = \frac{|\phi - \psi| + (\phi + \psi)}{2}, \quad \min(\phi, \psi) = \frac{(\phi + \psi) - |\phi - \psi|}{2}$$

に注意すればよい．

次に，Lebesgue 積分の簡単な性質をみておこう．

(1) $\phi_i \in L$ ならば $\int_X (\phi_1(x) + \phi_2(x))dx = \int_X \phi_1(x)dx + \int_X \phi_2(x)dx$.

(2) $\alpha \in \mathbf{R}$, $\phi \in L$ なら $\int_X \alpha\phi(x)dx = \alpha \int_X \phi(x)dx$.

(3) $\phi \in L$, $\phi \geq 0$ なら $\int_X \phi(x)dx \geq 0$.

(4) $\phi \in L$ なら $|\int_X \phi(x)dx| \leq \int_X |\phi(x)|dx$.

(4) だけ確かめておこう．$\phi = f - g$, $f, g \in L^+$ とすると，$I(f) \leq I(\max(f, g))$, $I(g) \geq I(\min(f, g))$ であるから

$$|\int_X \phi(x)dx| \leq |I(f) - I(g)| \leq I(\max(f, g)) - I(\min(f, g)) = \int_X |\phi(x)|dx.$$

補題 2.3.1 $\phi \in L$ とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して f, $g \in L^+$, $g \geq 0$ かつ $I(g) < \epsilon$ なる f, g で $\phi = f - g$ となるものが存在する．

証明：まず，定義から $\phi = f - g$, $f, g \in L^+$ と書ける．さらに定義から $h_n \nearrow g$ a.e. $I(g) = \lim_{n\to\infty} I(h_n)$ なる列 $h_n \in H$ がある．

$$\phi = f - g = (f - h_n) - (g - h_n) = f_n - g_n$$

と書くと $f_n = f - h_n = f + (-h_n) \in L^+ + H \subset L^+$ である．同様にして $g_n \in L^+$ である．他方，$g_n = g - h_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} I(g_n) = 0$ であるから主張は明らかである．(証終)

上の補題で，$\phi \geq 0$ のときには $f \geq 0$ ととれることに注意しよう．実際，上の証明で $f_n = f - h_n \geq f - g = \phi \geq 0$ である．

2.4　Beppo Levi の定理

ここでは次の Beppo Levi の定理を証明しよう．

定理 2.4.1 (Beppo Levi) $0 \leq \phi_k \in L$ が

$$\sum_{k=1}^{n} \int_X \phi_k(x)dx \leq C, \quad n = 1, 2, ...$$

を満たすとする．このとき $\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)$ は (殆ど至る所有限値で) 可積分関数で (すなわち L に属し)

$$\int_X \phi(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \phi_k(x)dx$$

である．

証明：$\phi_k \geq 0$ であるから，補題 2.3.1 とその後の注意から，$\phi_k = f_k - g_k$, f_k, $g_k \in L^+$, $f_k \geq 0$, $g_k \geq 0$ かつ

$$\int_X g_k(x)dx \leq \frac{1}{2^k}$$

となる g_k, f_k が存在する．一方，系 2.2.1 から $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \in L^+$ で

$$\int_X g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X g_k(x)dx$$

である．次に $f_k \geq 0$ を考えると

$$\int_X \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx = \int_X \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x)dx + \int_X \sum_{k=1}^{n} g_k(x)dx < C + 1$$

であるから再び系 2.2.1 より $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \in L^+$ で

$$\int_X f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k(x)dx$$

となる．以上のことから

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f - g \in L$$

で

$$\int_X \phi(x)dx = \int_X f(x)dx - \int_X g(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_X g_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \phi_k(x)dx. \quad \text{(証終)}$$

系 **2.4.1** $\psi_n \in L$ が単調増加列で

$$\int_X \psi_n(x)dx \le C, \quad n = 1, 2, ...$$

ならば，$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi \in L$ で

$$\int_X \psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n(x)dx$$

が成立する．

証明： $\phi_k(x) = \psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)$, $k = 2, 3, ..$ とおくと，$0 \le \phi_k(x) \in L$ で $\sum_{k=2}^n \phi_k(x) = \psi_n(x) - \psi_1(x)$ であるから，$\sum_{k=2}^\infty \phi_k(x)$ に定理 1.4.1 を適用すればよい．(証終)

$\psi_n \in L$ が単調減少列で

$$\int_X \psi_n(x)dx \ge C, \quad n = 1, 2, ...$$

が成立していれば，系 2.4.1 と同じ結論が成立することに注意しておこう．

系 **2.4.2** $0 \le \phi(x) \in L$ が

$$\int_X \phi(x)dx = 0$$

を満たしているなら，$\phi(x) = 0$ *a.e.* である．

証明：$\phi_n(x) = n\phi(x)$ とおく．$\phi_n(x) \in L$ は単調増加列である．系 2.4.1 から $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ は殆ど至る所有限でかつ L に属す．$\phi(x) > 0$ なら $\phi_n(x) \to \infty$ $(n \to \infty)$ であるから，$\{x \in X \mid \phi(x) > 0\}$ は零集合である．故に結論が従う．(証終)

系 **2.4.3** $e \subset X$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$0 \le \phi_n^{(\epsilon)} \in L$ なる単調増加列で

$$\int_X \phi_n^{(\epsilon)}(x)dx < \epsilon, \quad \sup_n \phi_n^{(\epsilon)}(x) \ge 1, \ \ \forall x \in e$$

を満たすものが存在すれば，e は零集合である．

証明：$\lim_{n\to\infty} \phi_n^{(\epsilon)}(x) = \phi^{(\epsilon)}(x)$ とおくと，系 2.4.1 より $\phi^{(\epsilon)} \in L$，$\phi^{(\epsilon)}(x) \ge 1, \forall x \in e$ でさらに

$$\int_X \phi^{(\epsilon)}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n^{(\epsilon)}(x)dx \le \epsilon$$

である．ここで $\epsilon = 1, 1/2, 1/3, ...$ と選び，

$$\psi_1 = \phi^{(1)}, \psi_2 = \min(\phi^{(1)}, \phi^{(1/2)}), ..., \psi_n = \min(\phi^{(1)}, ..., \phi^{(1/n)})$$

とおくと $\psi_n \geq 0$ は減少列で、かつ $x \in e$ に対して $\psi_n(x) \geq 1$ である．系 2.4.1 の後で述べた注意によると，$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \in L$ であって

$$\int_X \psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \phi^{(1/n)}(x)dx$$

が成立している．故に $\int_X \psi(x)dx = 0$ となって，系 2.4.2 の証明より，e が零集合であることが従う．(証終)

2.5　Lebesgue の定理

序で，Riemann 積分と，関数列の極限操作との間における相性があまりよくないことを述べたが，Lebesgue 積分においても，この相性には必然的な限界があることをまずみておこう．例として $X = [0,1] \subset \mathbf{R}$ とし，

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

を考えよう．$x \neq 0$ なら，明らかに $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ である．$f_n(x)$ の不連続点は一点のみであり，定理 1.5.2 より Riemann 積分可能である．従って，Lebesgue 積分可能でその積分値は一致する．さて $\int_X f_n(x)dx = n^{\alpha-1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx = \begin{cases} 0 & (\alpha < 1) \\ 1 & (\alpha = 1) \\ +\infty & (\alpha > 1) \end{cases}$$

となる．他方 $\int_X [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = 0$ であるから，$\alpha \geq 1$ のときには，積分と極限との順序を交換することはできない．$\alpha < 1$ のときには順序交換は正しい．このとき $\Phi(x)$ を $1/(n+1) < x \leq 1/n$ では値 n^α をとる関数と定義すると，$\phi_1(x) = f_1(x)$, $\phi_j(x) = (f_j(x) - f_{j-1}(x))^+$, $j = 2, 3, ...$ とおくとき $f_n(x) \leq \Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \phi_j(x)$ で

$$\sum_{j=1}^n \int_X \phi_j(x)dx \leq \sum_{n=1}^\infty n^\alpha \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{\alpha-1}}{n+1} < +\infty$$

であるから，$\phi_j(x) \in H$ を考慮すると，定義より，$\Phi(x) \in L^+$ である．

もう一つ，他の例を挙げておく．$X = [0,\pi] \subset \mathbf{R}$ とし

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx, & 0 \leq x \leq \pi/n \\ 0, & \pi/n < x \leq \pi \end{cases}$$

とすると，任意の $x \in [0,\pi] = X$ に対して $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ であるが

$$\int_X f_n(x)dx = \int_0^{\pi/n} (-\cos nx)'dx = 2$$

となって，積分と極限の順序交換は正しくない．

さて，次の Lebesgue の定理を証明しよう．

定理 2.5.1 $\Phi(x) \in L$ とする．$\phi_n(x) \in L$ かつ $\phi_n(x) \to \phi(x)$ *a.e.* でさらに

$$|\phi_n(x)| \leq \Phi(x) \quad a.e.$$

ならば $\phi(x) \in L$ で，さらに

$$\int_X \phi_n(x)dx \to \int_X \phi(x)dx$$

である．

証明：　まず

$$L(\Phi) = \{\phi \in L \mid -\Phi \leq \phi \leq \Phi, a.e.\}$$

とおこう．このとき，明らかに

$$-\int_X \Phi(x)dx \leq \int_X \phi(x)dx \leq \int_X \Phi(x)dx$$

が成立する．また $L(\Phi)$ は単調な関数列の極限移行に関して閉じている，実際，$\phi_n \nearrow \phi$ a.e. $\phi_n \in L(\Phi)$ とすると，上に注意したことから $\int_X \phi_n(x)dx \leq \int_X \Phi(x)dx = C$ であるから，系 2.4.1 より $\phi \in L$ である．$-\Phi(x) \leq \phi(x) \leq \Phi(x)$ a.e. は明らかである．従って $\phi \in L(\Phi)$ である．$\phi_n \searrow \phi$ a.e. のときも同様である．さらに，$\phi_n \in L(\Phi)$ のとき $\sup\{\phi_1(x), ..., \phi_n(x), ...\} \in L(\Phi)$, $\inf\{\phi_1(x), ..., \phi_n(x), ...\} \in L(\Phi)$ である．なぜなら，

$$f_n(x) = \max\{\phi_1(x), ..., \phi_n(x)\} \in L(\Phi)$$

は明らかであり，$f_n(x) \nearrow \sup\{\phi_1(x), ..., \phi_n(x), ...\}$ であるから．下限についても同様である．さて Lebesgue の定理の証明に移ろう．$\phi_n \in L(\Phi), \phi_n \to \phi$ a.e. であった．上にみたように，$\psi_n = \sup\{\phi_n(x), \phi_{n+1}(x), ...\} \in L(\Phi)$ で，また $\chi_n(x) = \inf\{\phi_n(x), \phi_{n+1}(x), ...\} \in L(\Phi)$ でもある．ところで

$$\psi_n(x) \geq \lim_{p\to\infty} \phi_{n+p}(x) = \phi(x),\ \chi_n(x) \leq \lim_{p\to\infty} \phi_{n+p}(x) = \phi(x)$$

であり，$\{\psi_n\}, \{\chi_n\}$ はそれぞれ，単調減少列，単調増加列であるから，$\psi_n \searrow \phi$, $\chi_n \nearrow \phi$ であり，従って $\phi \in L(\Phi)$ である．特に $\phi \in L$ である．次に

$$\int_X \psi_n(x)dx \to \int_X \phi(x)dx,\ \int_X \chi_n(x)dx \to \int_X \phi(x)dx$$

であるが，$\int_X \chi_n(x)dx \leq \int_X \phi_n(x)dx \leq \int_X \psi_n(x)dx$ であるから，結論が従う．(証終)

Lebesgue の定理を級数の形で述べておこう．

定理 2.5.2 $u_n(x) \in L$ で $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ は殆ど至る所収束し，かつ

$$|\sum_{i=1}^{n} u_i(x)| \leq \Phi(x) \in L,\ n = 1, 2, ...$$

とするとき，$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \in L$ で

$$\int_X u(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n(x)dx$$

が成立する．

系 2.5.1 $u_i \in L$ で $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |u_n(x)|dx < +\infty$ ならば，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ は殆ど至る所収束し，和は L に属し

$$\int_X (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X u_n(x)dx$$

である．

証明：　仮定より $\int_X \sum_{i=1}^{n} |u_i(x)|dx \leq C$ であるから，Beppo Levi の定理 2.4.1 によると，$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i(x)|$ は殆ど至るところ収束し，$\Phi(x) \in L$ である．$|\sum_{i=1}^{n} u_i(x)| \leq \Phi(x)$ であるから，Lebesgue の定理 2.5.1 より結論が従う．(証終)

Lebesgue の定理が必ずしも万能ではない例を挙げておこう．

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\alpha}, & (\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

と定義すると，明らかに $f_n(x) \in H([0,1])$ で $f_n(x) \to 0$ a.e. である．さて

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n^{\alpha-1}}{n+1}$$

であるから，$\alpha < 2$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx = 0$$

である．他方 $1 \leq \alpha < 2$ のとき $|f_n(x)| \leq \Phi(x)$, $n = 1, 2, ...$ を満たす $\Phi(x)$ が存在するとすると，そのような最小の $\Phi(x)$ は

$$\Phi(x) = n^{\alpha}, \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \ \ n = 1, 2, ...$$

を満たさなければならない．いま $\Phi(x) \in L$ と仮定してみよう．

$$\phi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} j^{\alpha} \chi_j(x)$$

ただし，$\chi_j(x)$ は集合 $(1/(j+1), 1/j]$ の特性関数，とおくと，$\phi_n(x) \in H([0,1])$ で，$\phi_n(x) \to \Phi(x)$ a.e. でしかも $|\phi_n(x)| \leq \Phi(x)$ である．従って Lebesgue の定理 2.5.1 より

$$\int_0^1 \phi_n(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^{\alpha}}{j(j+1)} \to \int_0^1 \Phi(x)dx$$

が成立するはずであるが $\alpha \geq 1$ ならば $\int_0^1 \Phi(x)dx = +\infty$ となって $\Phi(x) \in L$ に反する．

次に，必ずしも，積分の極限が極限関数の積分とは一致しないが，極限関数の積分が評価できる場合がある．

補題 **2.5.1** $\Phi(x) \in L$ とする．いま $\phi_n(x) \in L$, $\phi_n(x) \to \phi(x)$ *a.e.* かつ

$$|\phi(x)| \leq \Phi(x) \ \ a.e.$$

とすると，$\phi(x) \in L$ で，かつ

$$\Big|\int_X \phi(x)dx\Big| \leq \int_X \Phi(x)dx$$

である．

証明：$\psi_n = \max\{\min[\phi_n(x), \Phi(x)], -\Phi(x)\}$ とおくと，明らかに $|\psi_n(x)| \leq \Phi(x)$ かつ $\psi_n(x) \in L$ であり，さらに $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \phi(x)$ a.e. である．従って Lebesgue の定理 2.5.1 によると，$\phi(x) \in L$ で

$$-\int_X \Phi(x)dx \leq \int_X \psi_n(x)dx \leq \int_X \Phi(x)dx$$

であるから，$\int_X \psi_n(x)dx \to \int_X \phi(x)dx$ より結論が従う．(証終)

補題 **2.5.2** (Fatou) $0 \leq \phi_n(x) \in L$, $\phi_n(x) \to \phi(x)$ *a.e.* でさらに

$$\int_X \phi_n(x)dx \leq C$$

とする．このとき，$\phi(x) \in L$ でさらに

$$0 \leq \int_X \phi(x)dx \leq C$$

である．

証明：$\chi_n(x) = \inf\{\phi_n(x), \phi_{n+1}(x), ...\}$ とおこう．まず $\chi_n(x) \in L$ である．実際 $\psi_p(x) = \min\{\phi_n(x), ..., \phi_{n+p}(x)\}$ とおくとき $\psi_p \searrow \chi_n$ a.e. $(p \to \infty)$ 故，系 2.4.1 の後の注意によると $\chi_n(x) \in L$ が分かる．このとき，$\chi_n(x) \nearrow \phi(x)$ でさらに

$$\int_X \chi_n(x)dx \leq \int_X \phi_n(x)dx \leq C$$

であるから，系 2.4.1 より $\phi(x) \in L$ で $\int_X \chi_n(x)dx \to \int_X \phi(x)dx$ であるから結論をうる．(証終)

補題 2.5.3 $\phi_n(x) \in L$, $\phi_n(x) \to \phi(x)$ *a.e.* でさらに

$$\int_X |\phi_n(x)|dx \leq C, \quad n = 1, 2, ...$$

とする．このとき $\phi(x) \in L$ でさらに

$$\int_X |\phi(x)|dx \leq C$$

である．

証明:仮定から，$|\phi_n(x)| \to |\phi(x)|$ a.e. 故，Fatou の補題 2.5.2 より，$|\phi(x)| \in L$ で積分の評価を得る．また，補題 2.5.1 より $\phi(x) \in L$ が従う．(証終)

注意：定義から，$\phi \in L$ なら $|\phi| \in L$ であるが，逆は正しくない．

Fatou の補題の精密化を述べよう．

補題 2.5.4 $0 \leq f_n(x) \in L$ かつ

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx < +\infty$$

であるとする．このとき $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in L$ (従って殆ど至る所有限値で) で

$$\int_X f(x)dx = \int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n(x))dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx$$

である．

証明： $g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), ...\}$ とおくと，$0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq \cdots$ で $0 \leq g_n(x) \leq f_n(x)$ また $g_n(x) \to f(x)$ である．補題 2.5.2 の証明から $g_n(x) \in L$ である．

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)dx = \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx = C$$

であるから系 2.4.1 によると $f(x) \in L$ で，さらに

$$\int_X f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)dx \leq C$$

が成立する．(証終)

2.6　L の完備性

序で述べたように，Lebesgue 積分可能な関数の全体は，距離 $\int_X |f(x) - g(x)|dx$ に関して完備となる．このことを証明する．まず，線形ノルム空間の定義を思い出しておこう．E を線形空間とする．このとき，写像 $\|\cdot\| : E \to \mathbf{R}^+$ で次の条件を満足するものを E のノルムという：

(1) $\phi \neq 0$ なら $\|\phi\| > 0$ また $\|0\| = 0$.

(2) $\phi \in E$, $\alpha \in \mathbf{R}$ なら $\|\alpha\phi\| = |\alpha|\|\phi\|$.

(3) $\phi, \psi \in E$ なら $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$.

さて

$$\|\phi\| = \int_X |\phi(x)|dx$$

と定義しよう．このとき $\|\cdot\|$ は L 上のノルムになる[1]

定理 2.6.1 (Riesz – Fisher) L は完備である．すなわち $\|\cdot\|$ に関する Cauchy 列 $\phi_1,\phi_2,...$ は L に極限をもつ．

証明：$\{\phi_n\}$ のある部分列 $\{\phi_{n_k}\}$ がとれて，極限 $\phi \in L$ をもつことを示せば十分である．なぜなら，

$$\|\phi - \phi_n\| \leq \|\phi - \phi_{n_k}\| + \|\phi_{n_k} - \phi_n\|$$

であるが，右辺第 2 項は，$\{\phi_n\}$ が Cauchy 列であることにより，いくらでも小さくできる．

さて $n_1 < n_2 \cdots$ を，$n > n_k$ ならば

$$\|\phi_n - \phi_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, ...)$$

を満たすようにとろう．

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)|$$

に Beppo Levi の定理 2.4.1 を適用すると $\sum_{k=1}^{\infty} |\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)|$ は殆ど至る所で収束する．従って

$$\phi_{n_1} + \sum_{k=1}^{N}((\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)) = \phi_{n_{N+1}}(x)$$

も殆ど至る所ある $\phi(x)$ に収束する．$\phi_{n_p}(x) - \phi_{n_k}(x) \to \phi(x) - \phi_{n_k}(x)$ a.e. $(p \to \infty)$ であって

$$\int_X |\phi_{n_p}(x) - \phi_{n_k}(x)|dx = \|\phi_{n_p} - \phi_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

であるから，補題 2.5.3 によれば $\phi(x) - \phi_{n_k}(x) \in L$ が従い，ゆえに $\phi(x) \in L$ である．さらに（再び補題 2.5.3）

$$\|\phi - \phi_{n_k}\| = \int_X |\phi(x) - \phi_{n_k}(x)|dx \leq \frac{1}{2^k}$$

であるから $\|\phi - \phi_{n_k}\| \to 0$ $(k \to \infty)$ が従う．(証終)

[1] $\|\phi\|$ がノルムであるためには $\|\phi\| = 0$ と $\phi = 0$ in $(L, \|\cdot\|)$ が同値でなければならない．すなわち，殆ど至る所 0 に等しい関数は 0 とみなす．同様に殆ど至る所等しい関数は $(L, \|\cdot\|)$ においては同一視する．

補題 2.6.1 H は L で稠密である．

証明：任意の $f \in L^+$ が H の適当な列 $\{h_n\}$ の極限 ($\|\cdot\|$ に関する) であることを示せば十分である．ところで L^+ の定義から

$$\int_X h_n(x)dx \leq C, \quad n = 1, 2, ...$$

なる H の単調増加列 $\{h_n\}$ で $h_n \nearrow f$, a.e. $\int_X h_n(x)dx \to \int_X f(x)dx$ なるものが存在する．このとき

$$\|f - h_n\| = \int_X |f(x) - h_n(x)|dx = \int_X (f(x) - h_n(x))dx \to 0$$

となって，結論は明らかである．(証終)

2.7 Fubini の定理

集合 X とこの上で与えられた可積分関数の空間 $L(X)$ と $\phi \in L(X)$ に対して積分 $\int_X f(x)dx$ があり，同様に，可積分関数の空間 $L(Y)$ と $\psi \in L(Y)$ に対する積分 $\int_Y \psi(y)dy$ をもつ集合 Y があるとする．$W = X \times Y$ とおく．W の上にも可積分関数の空間 $L(W)$ があるものとする．ここで， W 上の基本関数の族 $H(W)$ は，2.1 節で仮定した I, II, III 以外に，次の性質を持つものと仮定する．

任意の $h(x, y) \in H(W)$ に対し，

1) 殆ど至る所の y に対して，$h(x, y)$ は x の関数として可積分．

2) その積分 $\int_X h(x, y)dx$ は y の可積分関数である．

3) 次の等式が成立する．

$$\int_W h(x, y)dxdy = \int_Y dy \int_X h(x, y)dx.$$

X, Y をそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の区間とし，X, Y, $X \times Y$ 上の基本関数としては階段関数をとったときにはこれらの性質が満たされていることを注意しておこう．

以上の仮定の下で次の定理を証明しよう．

定理 2.7.1 (Fubini) $\phi(x, y) \in L(W)$ とする．このとき

(1) 殆ど至る所の $y \in Y$ に対して，$\phi(x, y)$ は x の関数として x の可積分関数，すなわち $\phi(x, y) \in L(X)$.

(2) その積分に対して次が成立する．

$$\int_X \phi(x,y)dx \in L(Y).$$

(3) 次の等式が成立する．

$$\int_Y dy \int_X \phi(x,y)dx = \int_W \phi(x,y)dxdy.$$

証明：$E = \{\phi \in L(W) \mid \phi$ に対して Fubini の定理が成立する $\}$ とおき $E = L(W)$ を示す．長いのでいくつかの段階に分ける．

(I) 仮定より E は $H(W)$ を含む．また E が線形集合，すなわち $\phi_i \in E$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$ ならば $\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 \in E$ となることは容易にわかる．

(II) $\phi_n \in E$ が至る所単調列であってさらに

$$\Big|\int_W \phi_n(x,y)dxdy\Big| \le C,\ n = 1, 2, ...$$

ならば $\phi(x,y) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x,y) \in E$ である．このことを示そう．どちらでも同じなので，$\{\phi_n\}$ を増加列としよう．E の定義から，Y の零集合 e があって $y \in Y \setminus e$ のときすべての n に対して $\phi_n(x,y) \in L(X)$ としてよい．

$$g_n(y) = \int_X \phi_n(x,y)dx$$

とおく．このとき $g_n(y)$ は増加列で，E の定義より

$$\int_Y g_n(y)dy = \int_Y dy \int_X \phi_n(x,y)dx = \int_W \phi_n(x,y)dxdy \le C$$

故，系 2.4.1 によると $g(y) = \lim_{n\to\infty} g_n(y)$ は $g(y) \in L(Y)$ である．再び，系 2.4.1 より

$$\int_Y g_n(y)dy \to \int_Y g(y)dy,\ \ \int_W \phi_n(x,y)dxdy \to \int_W \phi(x,y)dxdy$$

であるから $\int_Y g(y)dy = \int_W \phi(x,y)dxdy$ が従う．系 2.4.1 から $g(y)$ は殆ど至る所有限値であることに注意しよう．故に Y の零集合 $\tilde{e}$ があって，$y \in Y \setminus \tilde{e}$ のとき，$g_n(y)$ は有限の $g(y)$ に収束する．従ってこのとき x の関数列 $\phi_n(x,y)$ は増加列で

$$\int_X \phi_n(x,y)dx = g_n(y) \le C,\ n = 1, 2, ...$$

が成立する．従って系 2.4.1 より $y \notin \tilde{e}$ のとき $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x,y) = \phi(x,y) \in L(X)$ でしかも

$$g(y) = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x,y)dx = \int_X \phi(x,y)dx$$

である．従って

$$\int_Y dy \int_X \phi(x,y)dxdy = \int_W \phi(x,y)dxdy.$$

(III) W の零集合 Z の上のみで 0 と異なる関数 $f(x,y)$ は E に属することを示そう．Z は零集合なので，非負の増加列 $\{h_n^{(m)}(x,y)\} \subset H(W)$ で

$$\int_W h_n^{(m)}(x,y)dxdy < \frac{1}{m},\ \sup_n h_n^{(m)}(x,y) \geq 1,\ (x,y) \in Z$$

を満たすものがとれる．ここで $h_n^{(m+1)}(x,y) \leq h_n^{(m)}(x,y)$ と仮定できる．なぜなら，$h_n^{(m+1)}(x,y)$ のかわりに

$$\tilde{h}_n^{(m+1)}(x,y) = \min\{h_n^{(m+1)}(x,y), h_n^{(m)}(x,y)\}$$

をとればよい．さて $\lim_{n\to\infty} h_n^{(m)}(x,y) = h^{(m)}(x,y)$ が存在するが (II) より $h^{(m)}(x,y) \in E$ である．また $h^{(m)}(x,y) \geq 0$ は至る所減少列である[2]．従って再び (II) から $h(x,y) = \lim_{m\to\infty} h^{(m)}(x,y)$ も E に属する．従ってほとんどいたるところの y について $h(x,y) \in L(X)$, $\int_X h(x,y)dx \in L(Y)$ で

$$\int_Y dy \int_X h(x,y)dx = \int_W h(x,y)dxdy$$

が成り立つ．ところで $\int_W h^{(m)}(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_W h_n^{(m)}(x,y)dxdy \leq 1/m$ から

$$\int_W h(x,y)dxdy = \lim_{m\to\infty} \int_W h^{(m)}(x,y)dxdy = 0$$

となって殆ど至る所の y について $\int_X h(x,y)dx = 0$．したがってこのような y を固定するとき，殆ど至る所の x について $h(x,y) = 0$ となる． 他方 Z 上では $h^{(m)}(x,y) \geq 1$ 故 $h(x,y) \geq 1$ が Z 上で成立する．

いま $f(x,y)$ は Z 上で 0 と 1 の間の値をとるとしよう．従って $h(x,y) \geq f(x,y)$ である．上の考察から Y の零集合 e があって $y \notin e$ のとき殆ど至る所の x について $f(x,y) = 0$ である．従って $\int_X f(x,y)dx = 0, y \notin e$．ゆえに

$$\int_Y dy \int_X f(x,y)dx = 0 = \int_W f(x,y)dxdy$$

が成立する．すなわち $f(x,y) \in E$．つぎに 非負の $f(x,y)$ が Z の上のみで 0 でない任意の関数とするとき, $\chi(x,y)$ を Z の特性関数，すなわち

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in Z \\ 0, & (x,y) \notin Z \end{cases}$$

とすると

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} n \min\left\{\chi(x,y), \frac{f(x,y)}{n}\right\}$$

[2] この証明では関数の値として $+\infty$ も許して考えている

であることに注意しよう．上の考察から $n\min\{\chi(x,y), f(x,y)/n\} \in E$ であり，n について至る所増加列であるから[3] (II) より $f(x,y) \in E$ が従う．一般の場合は

$$f(x,y) = \frac{|f(x,y)| + f(x,y)}{2} - \frac{|f(x,y)| - f(x,y)}{2}$$

と分解してみればよい．

(IV) つぎに $L^+(W) \subset E$ を確かめよう．$f(x,y) \in L^+(W)$ としよう．定義から $h_n(x,y) \in H(W)$, $h_n(x,y) \nearrow f(x,y)$, a.e. $\int_X h_n(x,y)dxdy \le C$ なる列で

$$\int_W h_n(x,y)dxdy \to \int_W f(x,y)dxdy$$

となるものが存在する．以前と同様にして， $h'_1(x,y) = h_1(x,y)$, $h'_2(x,y) = \max\{h'_1(x,y), h_2(x,y)\}$,..., $h'_p(x,y) = \max\{h'_{p-1}(x,y), h_p(x,y)\}$,... と定義していくと，$h'_p(x,y) = h_p(x,y)$, a.e. でしかも $h'_p(x,y)$ は至る所増加列である．$f'(x,y) = \lim_{n\to\infty} h'_n(x,y)$ とおくと (II) によって $f'(x,y) \in E$．また $f'(x,y) - f(x,y) = g(x,y)$ とおくと $g(x,y)$ は殆ど至る所 0 であるから (III) により $g(x,y) \in E$ である．ゆえに $f(x,y) = f'(x,y) + g(x,y) \in E$ である．

(V) 定義より，任意の $\phi(x,y) \in L(W)$ は $L^+(W)$ の 2 つの関数の差であるから定理が示された．(証終)

今，Z を W の零集合とし，$\chi(x,y)$ を Z の特性関数としよう．証明のステップ (III) から分かるように $\int_X \chi(x,y)dx = 0$ a.e. となる．従ってほとんど至る所の y に対して，Z の切り口

$$Z_y = \{x \in X \mid \chi(x,y) > 0\} = \{x \in X \mid \exists y, (x,y) \in Z\}$$

は X の零集合である．

応用上は，累次積分

$$\int_Y dy \int_X \phi(x,y)dx$$

の存在することから，W における関数 $\phi(x,y)$ の積分可能性がしたがうかどうか，という問題は重要である．この主張は一般には正しくないが，関数を非負の“可測関数”に限れば正しい．可測関数については第 3 章で解説するが，ここで定義を述べておく．

定義 2.7.1 $\phi(x)$ が X 上の可測関数であるとは，$\phi(x)$ は殆ど至る所有限値であり，かつ基本関数の列 $\phi_n(x) \in H(X)$ があって $\phi_n(x) \to \phi(x)$ *a.e.* となっているときをいう．

補題 2.7.1 $\phi(x)$ を可測関数とする．今 $\Phi(x) \in L(X)$ があって $|\phi(x)| \le \Phi(x)$ とすると $\phi(x) \in L(X)$ である．

[3] その積分値は 0 である

証明： 定義より，$h_n(x) \in H(X)$ があって $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, a.e. である．従って補題 2.5.1 より明らか．(証終)

定理 2.7.2 $0 \leq \phi(x,y)$ を W 上の可測関数で，殆ど至るところの y に対して $\phi(x,y) \in L(X)$ で $\int_X \phi(x,y)dx \in L(Y)$，すなわち

$$\int_Y dy \int_X \phi(x,y)dx$$

が存在するとする．このとき $\phi(x,y) \in L(W)$ で

$$\int_W \phi(x,y)dxdy = \int_Y dy \int_X \phi(x,y)dx$$

である．

証明：可測関数の定義より，$h_n(x,y) \in H(W)$ があって $\lim_{n\to\infty} h_n(x,y) = \phi(x,y)$, a.e. である．$\phi(x,y) \geq 0$ より $h_n(x,y) \geq 0$ と仮定してよい．$\phi_n(x,y) = \min\{\phi(x,y), \max\{h_1(x,y),...,h_n(x,y)\}\}$ とおくと $\phi_n(x,y)$ は可測関数である．実際，殆ど至る所

$$\phi_n(x,y) = \lim_{m\to\infty} \min\{h_m(x,y), \max\{h_1(x,y),...,h_n(x,y)\}\}$$

である． $0 \leq \phi_n(x,y) \leq \max\{h_1(x,y),...,h_n(x,y)\} \in L(W)$ であるから補題 2.7.1 より $\phi_n(x,y) \in L(W)$ である．従って Fubini の定理 2.7.1 より

$$\int_W \phi_n(x,y)dxdy = \int_Y dy \int_X \phi_n(x,y)dx$$

である．一方，$\phi_n(x,y) \leq \phi(x,y)$ であるから殆ど至る所の y に対して $\int_X \phi_n(x,y)dx \leq \int_X \phi(x,y)dx$，従って

$$\int_Y dy \int_X \phi_n(x,y)dx \leq \int_Y dy \int_X \phi(x,y)dx, \quad n = 1, 2, ...$$

である．$\phi_n(x,y)$ は増加列であり，殆ど至る所 $\phi(x,y)$ に収束するから系 2.4.1 から $\phi(x,y) \in L(W)$ が従う．最後の主張は Fubini の定理 2.7.1 から従う．(証終)

次の例では，被積分関数は可積分ではない．

例 **2.7.1**

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{\pi}{4}.$$

2.8 Lebesgue 積分の応用

応用に際しては複素数値関数を扱うことも多いので，複素数値関数に対する可積分性についての注意から始める．$f(x)$ を複素数値関数とし，$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ と書こう．$f_i(x)$ は実数値関数である．このとき，$f_1(x), f_2(x)$ がともに可積分 (可測) であるとき $f(x)$ を可積分 (可測) であるという．$f(x)$ が可測関数のとき，$f(x)$ が可積分であることと $|f(x)|$ が可積分であることは同値である．実際 $|f(x)| \geq |f_1(x)|, |f_2(x)|$ から $|f(x)|$ が可積分ならば補題 2.7.1 より $f_i(x)$ が可積分であることが従う．逆に $f_i(x)$ が可積分ならば $|f_1(x)| + |f_2(x)| \geq |f(x)|$ より，$|f(x)|$ が可測関数であることに注意すると，再び補題 2.7.1 から $|f(x)|$ が可積分であることが従う．

定理 **2.8.1** (連続性) 次を仮定する．

(1) $t \in [a, b]$ を任意に固定すると，$f(t, x)$ は X 上可積分である．

(2) 殆ど至るところの $x \in X$ に対して，$f(t, x)$ は t の連続関数である．

(3) ある $\Phi(x) \in L(X)$ があって $|f(t, x)| \leq \Phi(x)$, $x \in X$, $t \in [a, b]$.

このとき
$$F(t) = \int_X f(t, x)dx$$
は $[a, b]$ 上で連続である．

証明： $t_0 \in [a, b]$ を任意の点とし，$\{t_m\}$ を t_0 に収束する任意の点列としよう．$f_n(x) = f(t_n, x)$ とおくと仮定より
$$|f_n(x)| \leq \Phi(x), \quad f_n(x) \to f(t_0, x), \text{a.e.}$$
であるから Lebesgue の定理 2.5.1 より
$$F(t_n) = \int_X f_n(x)dx \to F(t_0) = \int_X f(t_0, x)dx$$
となって結論を得る．(証終)

定理 **2.8.2** (微分可能性) 次を仮定する．

(1) $t \in [a, b]$ を任意に固定すると，$f(t, x)$ は X 上可積分．

(2) 殆ど至る所の $x \in X$ に対して $f(t, x)$ は t の C^1 級関数．

(3) $\Phi(x) \in L(X)$ があって $|f_t(t, x)| \leq \Phi(x)$, $x \in X$, $t \in [a, b]$.

このとき $F(t) = \int_X f(t, x)dx$ は $[a, b]$ 上で C^1 級で
$$F'(t) = \int_X f_t(t, x)dx$$
である．

証明：まず，殆ど至る所の x で

$$\frac{f(t,x)-f(s,x)}{t-s} \to f_t(t,x), \quad t \to s$$

であるから，仮定 (1), (3) を考慮すると，補題 2.5.1 より $f_t(t,x)$ は X 上可積分であることに注意しよう．さて $t_0 \in [a,b]$ を任意の点とし，$\{t_n\}$ を t_0 に収束するかってな点列とする．殆ど至る所の x に対して

$$\begin{aligned} &|f(t_n,x)-f(t_0,x)-(t_n-t_0)f_t(t_0,x)| \\ &\qquad = \Big|\int_{t_0}^{t_n} (f_t(s,x)-f_t(t_0,x))ds\Big| \\ &\leq \Big|\int_{t_0}^{t_n} |f_t(s,x)-f_t(t_0,x)|ds\Big| \leq 2|t_n-t_0|\Phi(x) \end{aligned}$$

であるから

$$\Big|\frac{f(t_n,x)-f(t_0,x)}{t_n-t_0} - f_t(t_0,x)\Big| \leq 2\Phi(x), \quad a.e.$$

が従う．ゆえに Lebesgue の定理 2.5.1 から

$$\frac{1}{t_n-t_0}\Big[\int_X f(t_n,x)dx - \int_X f(t_0,x)dx\Big] \to \int_X f_t(t_0,x)dx$$

これより

$$F'(t_0) = \int_X f_t(t_0,x)dx$$

を得る．$F'(t)$ の連続性は定理 2.8.1 から従う．(証終)

定理 2.8.3 (正則性) D を複素平面上の領域とし，次を仮定する．

(1) 任意の $\zeta \in D$ を固定するごとに $f(\zeta,x)$ は X で可積分．

(2) 殆ど至る所の $x \in X$ に対して $f(\zeta,x)$ は $\zeta \in D$ の正則関数．

(3) D 内の任意のコンパクト集合 K に対して，ある $\Phi(x) \in L(X)$ があって $|f(\zeta,x)| \leq \Phi(x)$, $x \in X$, $\zeta \in K$ が成立する．

このとき $F(\zeta) = \int_X f(\zeta,x)dx$ は D で正則で

$$F'(\zeta) = \int_X f_\zeta(\zeta,x)dx.$$

証明：$\zeta = \xi + i\eta$ 書き，$\zeta_0 \in D$ とする．$\{|\zeta-\zeta_0| \leq \delta\} \subset D$ と $\delta > 0$ をとろう．このとき，仮定から $\Phi(x) \in L(X)$ が見つかって $|f(\zeta,x)| \leq \Phi(x)$, $|\zeta-\zeta_0| \leq \delta$ である．他方 Cauchy の積分公式から殆ど至る所の x に対して

$$f_\zeta(\zeta,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\zeta_0|=\delta} \frac{f(z,x)}{(z-\zeta)^2}dz$$

が従い，故に $|\zeta-\zeta_0| \le \delta/2$ のとき

$$|f_\zeta(\zeta,x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z-\zeta_0|=\delta}\frac{4\Phi(x)}{\delta^2}|dz| = 4\Phi(x)/\delta$$

である．従って，定理 2.8.2 より

$$\frac{\partial}{\partial\xi}F(\xi+i\eta) = \int_X f_\zeta(\xi+i\eta,x)dx,$$
$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\eta}F(\xi+i\eta) = \int_X f_\zeta(\xi+i\eta,x)dx$$

が $|\zeta-\zeta_0| < \delta/2$ で成立する．従って Cauchy-Riemann の関係式が成立し，$F(\zeta)$ は $|\zeta-\zeta_0| < \delta/2$ で正則である．(証終)

第3章　可測関数と測度論

3.1　可測関数

定義 3.1.1 $f(x)$ が X 上可測であるとは，$f(x)$ はほとんど至る所有限値をとる関数で，基本関数 $\phi_n(x) \in H(X)$ の殆ど至る所の極限となっているときをいう：

$$\phi_n(x) \to f(x) \quad a.e.\ X.$$

この定義から，零集合の上でのみ可測関数と異なる関数は再び可測関数である．可測関数の簡単な性質をみておく．

(1) f, g が可測なら $\alpha f + \beta g$ も可測

(2) f が可測なら $|f|$, f^+, f^- も可測

(3) f, g が可測なら $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ も可測

(4) $f \in L(X)$ は可測関数である．

(1) は明らか．次に $\phi_n \in H(X)$ なら $|\phi_n| \in H(X)$ に注意すると $|f|$ が可測も明らか．f^+, f^- については

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

(3) については

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

に注意すればよい．(4) については，まず $f \in L^+(X)$ は定義より，$\phi_n \in H(X)$ の単調増加列の至る所の極限であるから可測関数である．$f \in L(X)$ は定義より $f = \phi - \psi$, ϕ, $\psi \in L^+(X)$ と表されるから明らかである．

補題 3.1.1 $f_n \in L(X)$ を増加列とし

$$f_n(x) \to f(x) \quad a.e.\ (\text{有限な値に})$$

とすると $f(x)$ は可測である．

証明：(第一段) 最初に $L(X)$ を $L^+(X)$ におきかえた場合を示す．$f_n \in L(X)^+$ とする．定義から $h_{nk} \in H(X)$ で $h_{nk} \nearrow f_n$, $k \to \infty$ となる列がある．$h_n = \max(h_{1n}, ..., h_{nn}) \in H(X)$ とおくと h_n は増加列である．故に $n \to \infty$ のとき殆ど至る所有限な関数に収束する ($f_n \leq f$ であるから)．それを f^* と書くことにする．定義より f^* は可測である．さて $n \geq k$ のとき

$$h_{kn} \leq h_n \leq f_n$$

であるから $n \to \infty$ として $f_k \leq f^* \leq f$ を得る．他方 $f_k \nearrow f$ であったから $f = f^*$ a.e. となり，f^* も可測である．ここで次のことにも注意しておこう．すなわち $g_n \in L^+(X)$, $g_n \geq 0$ とする．このとき $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ がほとんど至る所収束すれば，和は可測である．

(第二段) $f_n \in L(X)$ とする．$\phi_0 = f_1$, $\phi_1 = f_2 - f_1$,...,$\phi_n = f_{n+1} - f_n$, $n = 0, 1, ...$ とおくと $f = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n$, $\phi_n \geq 0$ である．補題 2.3.1 から

$$\phi_n = g_n - g_n', \ \ g_n, g_n' \geq 0, \ \ \int_X g_n'(x)dx \leq \frac{1}{2^n}, \ \ g_n, g_n' \in L^+(X)$$

と書ける．系 2.2.1 から $\sum_{n=0}^{\infty} g_n' \in L^+(X)$ である．$g_n = \phi_n + g_n'$ で $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n = f$ であったから $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ は殆ど至る所収束する．和を g とおくと $g_n \in L^+(X)$ であったから g は可測である．従って

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n - \sum_{n=0}^{\infty} g_n'$$

は可測である．(証終)

補題 3.1.2 $\phi(x)$ を可測とする．いま $\phi_0(x) \in L(X)$ があって

$$|\phi(x)| \leq \phi_0(x), \quad a.e.$$

ならば $\phi(X) \in L(X)$ である．また $f(x)$ が可測でかつ $f(x) \geq 0$ ならば $\phi_n \in L(X)$ の増加列があって

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = f(x), \quad a.e.$$

が成立する．

証明：まず定義から $h_n(x) \in H(X)$ があって $\lim_{n \to \infty} h_n(x) = \phi(x)$ a.e. である．

$$\phi_n(x) = \max\{\min[h_n(x), \phi_0(x)], -\phi_0(x)\}$$

とおくと，$\phi_n \in L(X)$ で，$|\phi_n(x)| \leq \phi_0(x)$ かつ $\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = \phi(x)$ a.e. であるから Lebesque の定理 2.5.1 より $\phi \in L(X)$ が従う．

次に $f(x) = \lim_{n \to \infty} h_n(x) \geq 0$ としよう．h_n のかわりに $\max\{h_n(x), 0\}$ を考えれば $h_n \geq 0$ と仮定しよい．

$$\phi_n(x) = \min\{f(x), \max(h_1(x), ..., h_n(x))\}$$

とおこう．ϕ_n は可測でかつ $\phi_n(x) \geq 0$ で $\phi_n(x) \leq \max\{h_1, ..., h_n\} \in L(X)$ であるから上で証明したことより $\phi_n \in L(X)$ である．ϕ_n は明らかに増加列で f に収束するので結論が従う．(証終)

定理 3.1.1 $f_n(x)$ は X 上可測とし，

$$f_n(x) \to f(x) \quad a.e. \text{ (有限)}$$

とするとき $f(x)$ は可測である．

証明：$f_n = f_n^+ - f_n^-$ と書くと，$f_n^+ \geq 0, f_n^- \geq 0$ は可測で，$\lim_{n\to\infty} f_n^+ = f^+$, $\lim_{n\to\infty} f_n^- = f^-$ であるから $f(x) \geq 0, f_n \geq 0$ と仮定してよい．f_n は定義より $h_p^{(n)} \in H(X)$ の極限である：$\lim_{p\to\infty} h_p^{(n)} = f_n$．$\max(h_p^{(n)}, 0)$ を考えることによって $h_p^{(n)} \geq 0$ と仮定してよい．さて $C_p^{(n)} > 0$ を $\sum_{n,p=1}^{\infty} C_p^{(n)} < +\infty$ ととって固定し

$$\phi_0(x) = \sum_{n,p=1}^{\infty} C_p^{(n)} \frac{h_p^{(n)}(x)}{\int_X h_p^{(n)}(x)dx + 1}$$

とおくと Beppo Levi の定理 2.4.1 によって $\phi_0(x)$ は殆ど至る所有限で $\phi_0 \in L(X)$ である．さらに $f(x) > 0$ ならば $\phi_0(x) > 0$ である．実際 $\phi_0(x) = 0$ とすると $h_p^{(n)}(x) = 0, \forall n, p$ であって，従って $f_n(x) = 0, \forall n$ となり，$f(x) = 0$ である．この ϕ_0 を使って

$$g_n = \min\{f(x), n\phi_0(x)\}$$

とおこう．$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ である．さらに $g_n(x)$ は増加列である．従って $g_n \in L(X)$ を示せば十分である．$g_n(x) = \lim_{m\to\infty} \min\{f_m(x), n\phi_0(x)\}$ であって

$$0 \leq \min\{f_m(x), n\phi_0(x)\} \leq n\phi_0(x)$$

故 $\min\{f_m(x), n\phi_0(x)\} \in L(X)$ でかつその積分値は $n\int_X \phi_0(x)dx$ を超えないから Lebesque の定理 2.5.1 により $g_n \in L(X)$ である．(証終)

系 3.1.1 $f_1(x)$, $f_2(x)$,... を可測とする．このとき

$$\sup_n f_n(x), \quad \inf_n f_n(x), \quad \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad \liminf_{n\infty} f(x)$$

は，もし殆ど至る所有限ならば，可測である．

証明：

$$\begin{aligned}
\sup_n f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \max\{f_1(x), ..., f_n(x)\}, \\
\inf_n f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \min\{f_1(x), ..., f_n(x)\}, \\
\limsup_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), ...\}, \\
\liminf_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), ...\}
\end{aligned}$$

であることから分かる．(証終)

3.2　可測集合

定義 3.2.1 $E \subset X$ が可測集合であるとは，E の特性関数 $\chi_E(x)$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

が可測関数であるときをいう．E が可測で χ_E が可積分のとき

$$\mu(E) = \int_X \chi_E(x)dx$$

を E の測度という．E が可測で χ_E が可積分でないときは $\mu(E) = \infty$ と定義する．

ここで定義によれば，E が零集合ならば E は可測で $\mu(E) = 0$ である．さらに，零集合 E のいかなる部分集合 F に対しても $\chi_F(x) = 0$, a.e. であるから F も可測で $\mu(F) = 0$ である．まず定義から従う可測集合の簡単な性質をみておく．

補題 3.2.1 $E, F \subset X$ を可測集合とする．このとき，$E \cap F, E \cup F, E \setminus F$ (ただし $F \subset E$ とする) も可測である．

証明：等式 $\chi_{E\cap F} = \min\{\chi_E, \chi_F\}$, $\chi_{E\cup F} = \max\{\chi_E, \chi_F\}$, $\chi_{E\setminus F} = \chi_E - \chi_F$ から明らかである．(証終)

補題 3.2.2 $E, F \subset X$ は可測で測度有限とする．このとき

(1) $E \subset F \Longrightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$,

(2) $\mu(E \cap F) \leq \min\{\mu(E), \mu(F)\}$,

(3) $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) \quad if \ \ E \cap F = \emptyset$,

(4) $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(F) \quad if \ \ F \subset E.$

証明:(3) だけ確かめておく．$\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F - \chi_{E\cap F}$ に注意すると $E \cap F = \emptyset$ のとき $\chi_{E\cup F} = \chi_E + \chi_F$ である．(証終)

次の定理は基本的である．

定理 3.2.1 $E_1, E_2,...,E_n,...$ を可測集合列とするとき

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

も可測集合である．さらに，どの二つも重なり合わなければ

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

である (一方が有限なら他方も有限で等しい)．

証明：最初に E の可測性を確かめよう．χ_{E_n} を χ_n と書くことにする．このとき $\chi_E = \sup_n\{\chi_1, ..., \chi_n, ...\}$ であるから系 3.1.1 より χ_E の可測関数であり，従って E は可測集合である．

次に，すべての n について $\chi_n \leq \chi_E$ に注意すると，$\mu(E_n) = +\infty$ なる E_n があれば χ_E は非可積分となって $\mu(E) = +\infty$ である．$\mu(E) < \infty$ ならば $\mu(E_n) < +\infty$ であることも明らかである．故にすべての n に対して χ_n が可積分であるときを考えればよい．すなわち

$$\mu(E_n) = \int_X \chi_n(x)dx < +\infty$$

である．まず $\chi_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x)$ である．実際，$x \in E$ のときある n があって $\chi_n(x) = 1$ であり，仮定から，その他の n に対しては $\chi_n(x) = 0$ である．さて $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_n(x)dx$ が収束すれば，Beppo Levi の定理 2.4.1 より χ_E は可積分で

$$\int_X \chi_E(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_n(x)dx$$

が成立し，主張が従う．他方 χ_E が可積分ならば，すべての N に対して

$$\sum_{n=1}^{N} \int_X \chi_n(x)dx \leq \int_X \chi_E(x)dx$$

より再び Beppo Levi の定理より $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_n(x)dx$ も収束し上の等式が成立する．(証終)

系 **3.2.1** $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$　が可測ならば

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

が成立する (一方が有限なら他方も有限でかつ等しい)

証明：　$E = \cup_{n=1}^{\infty}(E_{n+1} \setminus E_n) \cup E_1$ であるから，定理 3.2.1 を適用すると

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_{n+1} \setminus E_n) + \mu(E_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

従って示された．(証終)

定理 **3.2.2** E_1, E_2,... を可測集合列とするとき

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

も可測である．さらに $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ で，かつある m に対して $\mu(E_m) < +\infty$ ならば

$$\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

である．

証明：$\chi_F(x) = \lim_{n\to\infty} \chi_{E_1\cap E_2\cdots\cap E_n}(x)$ であるから定理 3.1.1 より $\chi_F(x)$ は可測である．次に

$$E_m = \Big(\bigcup_{n=m}^{\infty}(E_n \setminus E_{n+1})\Big) \cup \Big(\bigcap_{p=m}^{\infty} E_p\Big)$$

が交わりのない可測集合の合併であることに注意すると補題 3.2.1 と定理 3.2.1 より

$$\begin{aligned}\mu(E_m) &= \sum_{n=m}^{\infty}\mu(E_n \setminus E_{n+1}) + \mu(\bigcap_{p=m}^{\infty} E_p)\\ &= \mu(E_m) - \lim_{n\to\infty}\mu(E_n) + \mu(\bigcap_{p=m}^{\infty} E_p).\end{aligned}$$

従って

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = \mu(\bigcap_{p=m}^{\infty} E_p) = \mu(\bigcap_{p=1}^{\infty} E_p)$$

となって結論を得る．(証終)

このあとでは，基本関数の族 $H(X)$ に対して次の２つの条件も成り立っていると仮定する．

- $h(x) \in H(X)$ なら $\min\{h(x), 1\} \in H(X)$
- 非負な $h_n(x) \in H(X)$ の列で $\int_X h_n(x)dx > 0, \sup_n h_n(x) > 0\ \forall x \in X$ なるものが存在する．

最初の仮定から直ちに $\phi(x)$ が可測なら $\min\{\phi(x), 1\}$ も可測であることが従う．

$X = \mathbf{R}^n$, $H(\mathbf{R}^n) = \{$ 階段関数 $\}$ のときは明らかに上の条件は成立している．

さてこのとき，$\phi_0(x) > 0, \forall x \in X$ を満たす $\phi_0(x) \in L(X)$ が存在することに注意する．実際

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{h_n(x)}{\int_X h_n(x)dx}$$

とおけば，右辺は Beppo Levi の定理により収束し，可積分関数を表す．また $\phi_0(x) > 0, \forall x \in X$ である．さてこの $\phi_0(x)$ を使うと

$$1 = \lim_{n\to\infty}\min\{1, n\phi_0(x)\}$$

であるから，定理 3.1.1 により $f(x) \equiv 1$ は可測である．これによって，$f(x)$ が特性関数である集合 X 自身が可測であることが従う．またこのことから，

$E \subset X$ が可測集合のときその補集合 $X \setminus E$ も可測集合である．さらに $f(x) \equiv c$ も可測関数であるから c を任意定数，ϕ を可測関数とするとき

$$\min\{\phi, c\}, \quad \max\{\phi, c\}$$

も可測関数である．さらに $a \leq b$ とするとき $\max\{\min\{\phi, b\}, a\}$ も可測関数である．

さて，$X = \mathbf{R}^n$, $H = \{$ 階段関数 $\}$ のときを考えよう．

定理 3.2.3 $\mathbf{R}^n$ の任意の開集合は可測である．従って閉集合も可測である．

証明：$O \subset \mathbf{R}^n$ を開集合とする．中心が有理点，すなわちその座標がすべて有理数で，さらに対角線の長さが正の有理数である立方体で O に含まれるものをすべてとり，それらを番号付けて，I_p, $p = 1, 2, ...$ と書くことにする．このとき $O = \cup_{p=1}^{\infty} I_p$ である．一方 $\chi_{I_p} \in H(\mathbf{R}^n)$ 故 I_p は可測であるから，定理 3.2.1 より O は可測である．(証終)

最後に可測集合をつかった可測関数の特徴づけを与えておこう．

定理 3.2.4 $\phi(x)$ は *a.e.* に有限とする．このとき

$$\phi(x) \text{ は可測関数} \Longleftrightarrow E(\phi, c) = \{x \in X \mid \phi(x) > c\} \text{ は可測集合．}$$

証明：$\phi(x)$ を可測とする．

$$\phi_{\epsilon,c}(x) = \frac{\min\{\phi(x), c + \epsilon\} - \min\{\phi(x), c\}}{\epsilon}$$

とおくと $\phi(x) \leq c$ なら $\phi_{\epsilon,c}(x) = 0$ また $\phi(x) \geq c + \epsilon$ なら $\phi_{\epsilon,c}(x) = 1$ である．$\epsilon \downarrow 0$ とすると

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \phi_{\epsilon,c}(x) = \chi_{E(\phi,c)}(x)$$

となって定理 3.1.1 より $\chi_{E(\phi,c)}(x)$ は可測，すなわち $E(\phi, c)$ は可測集合である．

次に $E(\phi, c)$ を可測集合とする．$\{x \in X \mid c < \phi(x) \leq d\} = E(\phi, c) \setminus E(\phi, d)$ も可測である．さて

$$E_{k,n} = \{x \in X \mid \frac{k}{n} < \phi(x) \leq \frac{k+1}{n}\}, \ \ n \in \mathbf{N}, \ \ k \in \mathbf{Z}$$

とすると $\chi_{E_{k,n}}(x)$ は可測関数である．このとき

$$\phi_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{n} \chi_{E_{k,n}}(x)$$

は a.e. に有限な可測関数となる．$|\phi(x) - \phi_n(x)| \leq 1/n$, a.e. であるから $\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x)$, a.e. となって $\phi(x)$ は可測関数となる．

amssymb

3.3 可測集合上での積分

定義 3.3.1 $E \subset X$ を可測集合とし，$\phi(x)$ を X 上の関数とする．このとき $\phi(x)$ が E 上可積分 (可測) であるとは，$\phi(x)\chi_E(x)$ が X 上可積分 (可測) であるときをいう．$\phi(x)$ が E 上可積分のとき，$\phi(x)$ の E 上の積分を

$$\int_E \phi(x)dx = \int_X \phi(x)\chi_E(x)dx$$

で定義する．$\phi(x)$ は E 上のみで定義されていればよい．実際，$\tilde{\phi}(x)$ を $\phi(x)$ の X 上への適当な拡張としてこの $\tilde{\phi}(x)$ を用いればよい．このとき定義は拡張の仕方によらない．

定義から明らかなように，ϕ が E 上可積分なら勿論 E 上可測である．また，$E, F \subset X$ を可測集合とし, $F \subset E$ とするとき，$\phi(x)$ が E 上可測 (可積分) なら F 上でも可測 (可積分) である．実際

$$\begin{aligned}(\chi_F\phi)^{\pm}(x) = \chi_F\phi^{\pm} &= \lim_{n\to\infty} \min\{n\chi_F(x), \chi_E(x)\phi^{\pm}(x)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \min\{n\chi_F(x), (\chi_E\phi)^{\pm}(x)\}\end{aligned}$$

から $\chi_F\phi = (\chi_F\phi)^+ - (\chi_F\phi)^-$ は可測である．また，$|\chi_F(x)\phi(x)| \le |\chi_E(x)\phi(x)|$ であるから補題 3.1.2 より $\chi_F(x)\phi(x)$ は可積分となる．

補題 3.3.1 以下が成立する．

(1) $E \subset X$ を可測集合とし，ϕ は E 上可積分で，$|\phi(x)| \le M$ が E 上成立するとする．このとき

$$\int_E |\phi(x)|dx \le M\mu(E)$$

である．

(2) $E_1, E_2, \ldots$ は可測かつ $E_i \cap E_j = \emptyset$ とする．今 $\phi(x)$ が $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ 上可積分 (可測) なら，$\phi(x)$ は各 E_n 上可積分 (可測) である．$\phi(x)$ が E 上可積分のとき

$$\int_E \phi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \phi(x)dx \quad (\text{収束して})$$

である．

(3) E_k $(k = 1, 2, \ldots)$ は可測とし，$\phi(x)$ は各 E_k 上可測とすると，$\phi(x)$ は $E = \cup_{k=1}^{\infty}$ 上可測である．さらに $E_i \cap E_j = \emptyset$, $(i \ne j)$ で $0 \le \phi(x)$ は E_k 上可積分かつ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} \phi(x)dx$$

が収束するならば，$\phi(x)$ は E 上可積分である．

(4) $\phi(x)$ は X 上可積分とする．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって $\mu(E) < \delta$ のとき

$$\int_E |\phi(x)|dx \leq \epsilon$$

が成立する．

証明：(1) $|\chi_E(x)\phi(x)| = \chi_E(x)|\phi(x)|$ は可積分故，

$$\int_E |\phi(x)|dx = \int_X \chi_E(x)|\phi(x)|dx \leq M \int_X \chi_E(x)dx = M\mu(E).$$

(2) まず，E, E_n は可測であり，$E_n \subset E$ であるから，$\phi(x)$ が E 上可積分 (可測) であれば $\phi(x)$ は E_n 上可積分 (可測) である．仮定より $\chi_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)$ であから，$\chi_E(x)\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)\phi(x)$ であることに注意しよう．

$$\begin{aligned}
|\sum_{n=1}^{m} \chi_{E_n}(x)\phi(x)| &\leq \sum_{n=1}^{m} |\chi_{E_n}(x)\phi(x)| \\
&= \sum_{n=1}^{m} \chi_{E_n}(x)|\phi(x)| \leq \chi_E(x)|\phi(x)|
\end{aligned}$$

従って定理 2.5.2 より結論を得る．

(3) まず $F_k = E_k \setminus (\cup_{j=1}^{k-1}(E_j \cap E_k)) = E_k \setminus ((\cup_{j=1}^{k-1} E_j) \cap E_k)$ とおくと

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \quad F_i \cap F_j = \emptyset, \ \ i \neq j$$

である．一方 $F_k \subset E_k$ で F_k は可測だから $\phi(x)$ は F_k 上可測である．従って

$$\chi_E(x)\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{F_k}(x)\phi(x)$$

として，$\chi_E(x)\phi(x)$ は可測関数の極限として可測関数である．つぎに $0 \leq \phi(x)$ は E_k 上可積分とする．仮定から

$$\int_X \sum_{n=1}^{m} \chi_{E_n}(x)\phi(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \phi(x)dx = C$$

であるから，$\chi_E(x)\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x)\phi(x)$ に注意すると Beppo Levi の定理 2.4.1 より $\chi_E(x)\phi(x)$ の可積分性が従う．

(4) 補題 2.3.1 より $|\phi(x)| = f - g$, f, $g \in L^+(X)$, f, $g \geq 0$, $\int_X g(x)dx < \epsilon/4$ となる f, g が存在する．この f に対して $\int_X (f(x) - h(x))dx < \epsilon/4$ なる $h \in H(X)$ が存在する．このとき $h(x)$ は非負で有界と仮定できる．なぜなら定義から $h_n(x) \in H(X)$ の増大列で $\int_X h_n(x)dx \to \int_X f(x)dx$ となるものがあるが，$\tilde{h}_n(x) = \min\{\max\{h_n(x), 0\}, n\}$ とおくと $\tilde{h}_n(x) \in H(X)$ で

$0 \le \tilde{h}_n(x) \le f(x)$ かつ $\tilde{h}_n(x) \to f(x)$, a.e. であるから Lebesgue の定理より $\int_X (f(x) - \tilde{h}_n(x))dx \to 0$, $n \to \infty$ である．従ってこの $h(x)$ に対して

$$\int_X ||\phi(x)| - h(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}$$

である．$h(x) \le M$ なる M をとると，$\delta = \epsilon/2M$ として

$$\begin{aligned}\int_E |\phi(x)|dx = \int_X \chi_E |\phi| dx \le \int_X \chi_E(x) ||\phi(x)| - h(x)|dx \\ + \int_E h(x)dx \le \frac{\epsilon}{2} + M\mu(E) < \epsilon\end{aligned}$$

となる．(証終)

(3) に対して次の同値な言い換え $(3)'$ も有用である．

$(3)'$ $E_1 \subset E_2 \subset \cdots$ を可測集合とし，$\phi(x) \ge 0$ は各 E_k 上で可積分で

$$\int_{E_n} \phi(x)dx \le C, \quad n = 1, 2, ...$$

とする．このとき $\phi(x)$ は $E = \cup_{n=1}^\infty E_n$ 上可積分で

$$\int_E \phi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi(x)dx$$

が成立する．

amssymb

3.4 Lebesgue による Lebesgue 積分

簡単のために $X = [a, b]$ として $\mathbf{R}$ で考える．

定義 3.4.1 $E \subset X$ に対して

$$\bar{m}(E) = \inf\{\sum_{n=1}^\infty |I_n|; E \subset \bigcup_{n=1}^\infty I_n, I_n : \text{区間}\}$$

で E の外測度 $\bar{m}(E)$ を定義する．

この定義における区間列 $\{I_n\}$ は開区間列でも閉区間列でも同じである．また $E^c = X \setminus E$ とおくとき

$$\bar{m}(E) + \bar{m}(E^c) \ge b - c$$

である．実際，$\{I_n\}, \{J_n\}$ を $\cup_{n=1}^\infty I_n \supset E, \cup_{n=1}^\infty J_n \supset E^c$ で

$$\sum_{n=1}^\infty |I_n| < \bar{m}(E) + \frac{\epsilon}{2}, \ \sum_{n=1}^\infty |J_n| < \bar{m}(E^c) + \frac{\epsilon}{2}$$

となるものとする．$\{I_n\}$,$\{J_n\}$ は開区間列としよう．

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\Big) \supset [a,b]$$

であるから，Heine-Borel の定理 1.3.1 によると有限個で覆える．すなわち I_{n_j}, $j=1,...,p$, J_{n_k}, $k=1,...,q$ で覆えるとしてよい．このとき

$$b-a \le \sum_{j=1}^{p} |I_{n_j}| + \sum_{k=1}^{q} |J_{n_k}| < \bar{m}(E) + \bar{m}(E^c) + \epsilon.$$

である．$\epsilon > 0$ は任意であるから結論を得る．

Lebesgue による可測集合の定義を与えよう．

定義 3.4.2 $E \subset X$ が

$$\bar{m}(E) + \bar{m}(E^c) = b - a$$

を満たすとき， E を L-可測といい，その L-測度を $m(E) = \bar{m}(E)$ で定義する．

$(E^c)^c = E$ であるから，この定義から明らかなように E が L-可測なら E^c も L-可測である．ところで，$\bar{m}(E) = 0$ ならば $\bar{m}(E^c) \le b - a$ は自明故，上に注意したことから $\bar{m}(E^c) = b - a$ となり，E は L-可測で $m(E) = 0$ である．これは定義 1.3.1

$$E \text{ が零集合} \Longleftrightarrow \bar{m}(E) = 0$$

と一致する．

次に可測関数の定義を与える．

定義 3.4.3 $f(x)$ を X 上の関数とする．任意の $a < b$ に対して集合

$$\{x \in X \mid a < f(x) \le b\}$$

が L-可測のとき $f(x)$ を L-可測関数という．

可積分性の定義は次のように与えられる．

定義 3.4.4 $0 \le f(x)$ を L-可測関数とする．このとき $f(x)$ が L-可積分であるとは，ある $\delta > 0$ と $\mathbf{R}_+$ の分割

$$0 = \ell_0 < \ell_1 < \cdots \to +\infty,\ \ \ell_n - \ell_{n-1} \le \delta$$

があって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n) < +\infty$$

の成立することをいう．ただし，$E_n = \{x \in X \mid \ell_{n-1} < f(x) \le \ell_n\}$ である．

さて，Lebesgue による積分の定義をつぎの補題で与えよう．

補題 3.4.1 $0 \leq f(x)$ を L-可積分とする．このとき

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n)$$

は分割によらない一定値に収束する．この極限値で L-積分値を定義する．

$$L-\int_X f(x)dx = \lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n).$$

この補題の証明は後でおこなうことにしてまず L-可測とこれまでの可測性の同値性から確かめよう．

補題 3.4.1 次が成立する．

$$E \subset X \text{ が } L - \text{可測} \Longleftrightarrow E \text{ が可測}$$

でさらにこのとき $\mu(E) = m(E)$.

証明のために次の補題を準備しよう．

補題 3.4.2 任意の $\epsilon > 0$ に対して $g(x)$, $h(x) \in L(X)$ で

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \int_X [h(x) - g(x)]dx \leq \epsilon$$

を満たすものがあれば，$f(x) \in L(X)$ である．

証明：$\epsilon = 2^{-n}$ ととって $g_n(x) \leq h_n(x)$ を選ぶと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X [h_n(x) - g_n(x)]dx \leq 1$$

ゆえ Beppo Levi の定理から $\sum_{n=1}^{\infty}[h_n(x) - g_n(x)]$ は a.e. に収束する．従って $h_n(x) - g_n(x) \to 0$ a.e. である．ゆえに $g_n(x) \to f(x)$, $g_n(x) \to f(x)$, a.e. で $f(x)$ は可測である．また $g_1(x) \leq f(x) \leq h_1(x)$ から

$$|f(x)| \leq h_1^+(x) + g_1^-(x) \in L(X)$$

であるから，補題 3.1.2 より $f(x) \in L(X)$ である．(証終)

命題 3.4.1 の証明：$E \subset X$ を L-可測とする．従って任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\bigcup I_n^{(1)} \supset E, \quad \sum |I_n^{(1)}| < m(E) + \frac{\epsilon}{2},$$
$$\bigcup I_n^{(2)} \supset E^c, \quad \sum |I_n^{(2)}| < m(E^c) + \frac{\epsilon}{2}$$

なる区間列 $\{I_n^{(i)}\}$, $i=1,2$ がとれる．$\sigma_i(x)=\sum_n \chi_{I_n^{(i)}}(x)$ とおく．このとき $\sum_n \int_X \chi_{I_n^{(i)}}(x)dx=\sum_n |I_n^{(i)}|$ であるから，Beppo Levi の定理によると，$\sum_n \chi_{I_n^{(i)}}(x)$ は殆ど至る所収束し，和は可積分でかつ

$$\int_X \sigma_i(x)dx=\sum_n |I_n^{(i)}|$$

である．さて $\sigma_1(x)\geq \chi_E(x)$, $\sigma_2(x)\geq 1-\chi_E(x)=\chi_{E^c}(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_X [\sigma_1(x)-(1-\sigma_2(x))]dx &= \sum_n |I_n^{(1)}|+\sum_n |I_n^{(2)}|-(b-a)\\ &\leq m(E)+m(E^c)+\epsilon-(b-a)=\epsilon\end{aligned}$$

が従う．ここで $g(x)=1-\sigma_2(x)$, $h(x)=\sigma_1(x)$, $f(x)=\chi_E(x)$ として補題 3.4.2 を適用すると $\chi_E(x)$ は可積分，従って可測である．さらに $\int_X (1-\sigma_2(x))dx\leq \int_X \chi_E(x)dx\leq \int_X \sigma_1(x)dx$ であるから

$$b-a-\sum_n |I_n^{(2)}|\leq \int_X \chi_E(x)dx\leq \sum_n |I_n^{(1)}|$$

である．$m(E^c)=b-a-m(E)$ であるから

$$m(E)-\frac{\epsilon}{2}\leq \int_X \chi_E(x)dx\leq m(E)+\frac{\epsilon}{2}$$

を得る．$\epsilon>0$ は任意であったから，$m(E)=\mu(E)$ となる．

逆に，$\chi_E(x)$ を可測として，従って今の場合可積分として ($|\chi_E(x)|\leq 1\in L(X)$ である)，E が L-可測であることを確かめよう．さて仮定より $\phi_n\to\chi_E$ a.e. なる $\phi_n(x)\in H(X)$ がとれる．

$$\tilde{\phi}_n(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \phi_n(x)>1/2\\ 0 & \text{if}\quad \phi_n(x)\leq 1/2\end{cases}$$

とおくと $\tilde{\phi}_n(x)\to\chi_E(x)$, a.e. であるから，この $\tilde{\phi}_n$ を改めて ϕ_n と書くことにし，最初から $\phi_n(x)$ は有限個の区間の合併 Σ_n の特性関数であるとしてよい．$g_n(x)=\sup\{\phi_n(x),\phi_{n+1}(x),...\}$ とおくと $g_n(x)\searrow\chi_E(x)$ で $g_n(x)$ は $\Sigma^{(n)}=\cup_{k=n}^{\infty}\Sigma_k$ の特性関数である．$\Sigma^{(n)}=\cup_p I_p^{(n)}$, $(I_p^{(n)})^\circ\cap(I_q^{(n)})^\circ=\emptyset$ とできることは容易に分かる．従って，ある零集合 e を除いて $\{I_p^{(n)}\}$ は E を覆う．ここで $I_p^{(n)}$ は区間である．さて定理 1.3.2 によると L-零集合と零集合は一致するから，任意の $\epsilon>0$ に対して $\{J_q\}$ がとれて

$$\Big(\cup_q J_q\Big)\cup\Big(\cup_p I_p^{(n)}\Big)\supset E,\quad \sum_q |J_q|<\epsilon$$

とできる．また $g_n(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\chi_{I_p^{(n)}}(x)$ で $g_n(x)$ は可積分であるから Lebesgue の定理より $\int_X g_n(x)dx=\sum_{p=1}^{\infty}|I_p^{(n)}|$ が従う．従って

$$\bar{m}(E)\leq\sum_{p=1}^{\infty}|I_p^{(n)}|+\epsilon=\int_X g_n(x)dx+\epsilon$$

である．$n \to \infty$ とすると Lebesgue の定理より $\int_X g_n(x)dx \to \int_X \chi_E(x)dx$ であるから $\bar{m}(E) \le \int_X \chi_E(x)dx + \epsilon$ を得る．$\epsilon > 0$ は任意であったから

$$\bar{m}(E) \le \int_X \chi_E(x)dx$$

が従う．$\chi_{E^c}(x)$ に対して同様の議論を繰り返すと

$$\bar{m}(E^c) \le \int_X \chi_{E^c}(x)dx = \int_X [1 - \chi_E(x)]dx = b - a - \int_X \chi_E(x)dx$$

となって $\bar{m}(E) + \bar{m}(E^c) \le b - a$. 従って E は L-可測である．(証終)

補題 3.4.2 次が成立する．

$$f(x) \text{ が } L - \text{可測} \Longleftrightarrow f(x) \text{ が可測．}$$

証明：$f(x)$ を可測とする．このとき定理 3.2.4 より $E(f,c) = \{x \in X \mid f(x) > c\}$ は可測．さて $E(f,a)^c = \{x \in X \mid f(x) \le a\}$ であるから $\{x \in X \mid c < f(x) \le a\} = E(f,c) \cap E(f,a)^c$ も可測である．したがって $f(x)$ は L-可測である．

次に $f(x)$ を L-可測とする．このとき

$$\{x \in X \mid f(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid c < f(x) \le c + n\}$$

から $\{x \in X \mid f(x) > c\}$ も可測ゆえ，ふたたび定理 3.2.4 より $f(x)$ は可測である．(証終)

ここで補題 3.4.1 の証明を与えよう．そのためにまず次の補題を示す．

補題 3.4.3 $0 \le f(x)$ を L-可測とする．$0 = \ell_0 < \ell_1 < \ell_2 < \cdots \to +\infty$ と $0 = \ell'_0 < \ell'_1 < \ell'_2 < \cdots \to +\infty$ を $\mathbf{R}_+$ の 2 つの分割とし，$\ell_n - \ell_{n-1} \le \delta$, $\ell'_n - \ell'_{n-1} \le \delta$ で $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n) < +\infty$ とする．ただし $E_n = \{x \in X \mid \ell_{n-1} < f(x) \le \ell_n\}$ である．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty} \ell'_n m(E'_n)$ も収束し，さらに

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \ell'_n m(E'_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n)\right| \le \delta(b-a)$$

が成立する．ただし $E'_n = \{x \in X \mid \ell'_{n-1} < f(x) \le \ell'_n\}$ である．

証明：まず $\sum_{n=1}^{\infty} \ell'_{n-1}\chi_{E'_n}(x) \le f(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \chi_{E_n}(x)$ である．仮定から $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \ell_n \chi_{E_n}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n) < +\infty$ であるから，Beppo Levi の定理によって $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \chi_{E_n}(x)$ は殆ど至る所収束し，和は可積分である．故に補題 3.1.2 より $f(x)$ は可積分である．さらに Lebesgue の定理から $\sum_{n=1}^{\infty} \ell'_{n-1}\chi_{E'_n}(x)$ は可積分で

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} \ell'_{n-1}\chi_{E'_n}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \ell'_{n-1}\chi_{E'_n}(x)dx = \sum_{n-1}^{\infty} \ell'_{n-1} m(E'_n)$$

である．ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell'_n m(E'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell'_{n-1} m(E'_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\ell'_n - \ell'_{n-1}) m(E'_n)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell'_{n-1} m(E'_n) + \delta \sum_{n=1}^{\infty} m(E'_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell'_{n=1} m(E'_n) + \delta(b-a)$$

従って $\sum_{n=1}^{\infty} \ell'_n m(E'_n)$ は収束し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell'_n m(E'_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n) + \delta(b-a)$$

が成立する．$\{\ell'_n\}$ と $\{\ell_n\}$ を入れ替えて議論すると $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell'_n m(E'_n)+$ $\delta(b-a)$ が従い結論を得る．(証終)

この証明から

$$\sup_{\{\ell'_n\}, \ell'_n - \ell'_{n-1} < \delta} \sum_{n=1}^{\infty} \ell'_{n-1} m(E'_n) = \inf_{\{\ell_n\}, \ell_n - \ell_{n-1} < \delta} \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n)$$

であることが容易に分かる．またこの補題より $\{\ell_n^{(k)}\}$, $k = 1, 2, ...$ を分割の列で $\ell_n^{(k)} - \ell_{n-1}^{(k)} \leq \delta_k$, $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$ なるものとすると $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n^{(k)} m(E_n^{(k)})$ は Cauchy 列となって収束する．ここで

$$L - \int_X f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n^{(k)} m(E_n^{(k)})$$

とおくと，補題 3.4.3 より補題 3.4.1 は明らかである．

最後に

補題 3.4.3 次が成立する．

$$f(x) \text{ は } L - \text{可積分} \Longleftrightarrow f(x) \text{ は可積分}$$

さらにこのとき

$$L - \int_X f(x)dx = \int_X f(x)dx$$

証明：$f(x)$ が L-可積分なら $f(x)$ が可積分であることは補題 3.4.3 の証明の中で示した．次に $f(x)$ を可積分とすると

$$f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \chi_{E_n}(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (f(x)+\delta)\chi_{E_n}(x) \leq f(x) + \delta$$

となって補題 2.5.1 によれば $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n) < +\infty$ となる．従って $f(x)$ は L-可積分である．さらに Lebesgue の定理によると

$$\int_X f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n m(E_n) \leq \int_X f(x)dx + \delta(b-a)$$

が従う．$\delta \to 0$ として，積分値が一致することが分かる．(証終)

3.5　空間 $L_p(X)$

ここでは再び抽象的な集合 X 上で考える．

定義 3.5.1 $f(x) \in L_p(X)$ とは $f(x)$ が X 上可測で

$$\int_X |f(x)|^p dx < \infty$$

を満たすこととする．

ここで $f(x)$ が X で可測ならば $|f(x)|^p$ も X で可測であることに注意しよう．実際

$$\{x \in X \mid |f(x)|^p > c\} = \{x \in X \mid |f(x)| > c^{1/p}\}$$

であるから定理 3.2.4 により $|f(x)|^p$ も可測となる．

補題 3.5.1 $L_p(X)$ は $\mathbf{R}$ 上の線形空間となる．

証明：$\alpha \in \mathbf{R}$, $f(x) \in L_p(X)$ なら $\alpha f(x) \in L_p(X)$ は明らかである．次に $f(x), g(x) \in L_p(X)$ とすると $f(x) + g(x)|^p$ が可測であることは明らかである．さらに

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq \{2\sup\{|f(x)|, |g(x)|\}\}^p \\ &= 2^p \sup\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \end{aligned}$$

であるから $|f(x)+g(x)|^p \in L(X)$ となって結論を得る．(証終)

$p \geq 1$ のとき $L_p(X)$ に次のノルムを導入しよう．

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

このとき次が成立する．

定理 3.5.1 $L_p(X)$ はノルム $\|\cdot\|_p$ に関して完備な線形空間である．

まず $\|\cdot\|_p$ がノルムであることを確かめよう．s$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$ は明らかである．三角不等式の証明のために次の補題を示そう．

補題 3.5.2 $\eta = \omega(\xi)$ を狭義単調増加連続関数で $\omega(0) = 0$ とする．$\xi = \mu(\eta)$ をその逆関数とする．このとき，$x \geq 0$, $y \geq 0$ に対して

$$xy \leq \int_0^x \omega(\xi)d\xi + \int_0^y \mu(\eta)d\eta$$

が成立する．

証明は (ξ,η) 平面に $\xi=\mu(\eta)$, $\eta=\omega(\xi)$ のグラフを描いてみれば明らかである．

補題 3.5.3 (Hölder の不等式) $f(x)\in L_p(X)$, $g(x)\in L_q(X)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $p>1$ とする．このとき $f(x)g(x)\in L(X)$ でかつ

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \le \|f\|_p\|g\|_q$$

が成立する．

証明：補題 3.5.2 で $\omega(\xi)=\xi^{p-1}$ $(p>1)$, $\mu(\eta)=\eta^{\frac{1}{p-1}}$ とすると

$$xy \le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

が従う．ただし $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ である．従って

$$|f(x)||g(x)| \le \frac{1}{p}|f(x)|^p+\frac{1}{q}|g(x)|^q$$

である．今 $\|f\|_p=1$, $\|g\|_q=1$ とすると

$$\int_X |f(x)g(x)|dx \le \frac{1}{p}\int_X |f(x)|^p dx+\frac{1}{q}\int_X |g(x)|^q dx = 1$$

となって主張が成立する．一般に $f\in L_p$, $g\in L_q$ を $\|f\|_p\neq 0$, $\|g\|_q\neq 0$ とすると $\tilde{f}=f/\|f\|_p$, $\tilde{g}=g/\|g\|_q$ とおいていま示した不等式を利用すると

$$\int_X |\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)|dx = \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_X |f(x)g(x)|dx \le 1$$

から結論が従う．$\|f\|_p=0$ または $\|g\|_q=0$ のときには不等式は明らかである．(証終)

補題 3.5.4 (Minkowski の不等式) $f(x)$, $g(x)\in L_p(X)$, $(p>1)$ とするとき

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p$$

が成立する．

証明：f, $g\in L_p(X)$ とする．まず

$$|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p = |f|(|f|+|g|)^{p-1}+|g|(|f|+|g|)^{p-1}$$

と書く．$(|f|+|g|)^{p-1}=(|f|+|g|)^{p/q}$ であるから $(|f|+|g|)^{p-1}\in L_q(X)$ となり Hölder の不等式によると $(p-1)q=p$ であるから

$$\begin{aligned}\int_X (|f|+|g|)^p dx &\le \int_X |f|(|f|+|g|)^{p-1}dx+\int_X |g|(|f|+|g|)^{p-1}dx\\ &\le \|f\|_p\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q+\|g\|_p\|(|f|+|g|)^{p-1}\|_q\\ &= (\|f\|_p+\|g\|_p)\Big\{\int_X (|f|+|g|)^p dx\Big\}^{1/q}\end{aligned}$$

が従う．故に

$$\Big\{\int_X (|f|+|g|)^p dx\Big\}^{1-\frac{1}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

を得る．$1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$ に注意すれば結論が従う．(証終)

定理 3.5.1 の証明：　補題 3.5.4 より $\|\cdot\|$ がノルムであることが分かる．従って完備性を証明すればよい．$\phi_1, ..., \phi_n, ...$ を $L_p(X)$ の Cauchy 列とする．このときある部分列 $\{\phi_{n_k}\}$ と $\phi \in L_p(X)$ が存在して

$$\phi_{n_k} \to \phi \quad \text{in} \;\; L_p(X)$$

を示せば十分である．さて $\{\phi_n\}$ が Cauchy 列であることから $n_1 < n_2 < \cdots$ がとれて

$$n > n_k \Longrightarrow \|\phi_n - \phi_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, ...$$

とできる．とくに $\|\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}\|_p \le 1/2^k$ である．さて Minkowski の不等式によると

$$\begin{aligned}\Big\{\int_X \big(\sum_{k=1}^N |\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}|\big)^p dx\Big\}^{1/p} &= \|\sum_{k=1}^N |\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}|\|_p \\ &\le \sum_{k=1}^N \|\phi_{n_{k+1}} - \phi_{n_k}\|_p < 1\end{aligned}$$

が成立する．いま $\Phi_N(x) = (\sum_{k=1}^N |\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)|)^p$ とおくと $\Phi_N(x)$ は増加列であってさらに $\int_X \Phi_N(x)dx \le C$ が N によらず成立するから Beppo Levi の定理によって $\Phi_N(x)$ は殆ど至る所ある $\Phi(x) \in L(X)$ に収束する．従って殆ど至る所

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N |\phi_{n_{k+1}}(x) - \phi_{n_k}(x)|$$

が存在する．ゆえに $\lim_{k\to\infty} \phi_{n_k}(x)$ が殆ど至る所存在する．この極限を $\phi(x)$ とおこう．$m > k$ のとき

$$\int_X |\phi_{n_m}(x) - \phi_{n_k}(x)|^p dx \le \big(\frac{1}{2^k}\big)^p$$

であるから，$\lim_{m\to\infty} |\phi_{n_m}(x) - \phi_{n_k}(x)|^p = |\phi(x) - \phi_{n_k}(x)|^p$, a.e. に注意すると Fatou の補題 2.5.2 より $|\phi(x) - \phi_{n_k}(x)|^p \in L(X)$ で

$$\int_X |\phi(x) - \phi_{n_k}(x)|^p dx \le \Big(\frac{1}{2^k}\Big)^p$$

が従う．すなわち，$\phi(x) - \phi_{n_k}(x) \in L_p(X)$ 従って $\phi(x) \in L_p(X)$ で $\|\phi - \phi_{n_k}\|_p \le 1/2^k$ となり結論が従う．(証終)

補題 3.5.5 $H(X)$ は $L_p(X)$ で稠密である．

証明：まず $H(X) \subset L_p(X)$ であることを確かめよう．$h(x) \in H(X)$ とする．定義から $h(x)$ は有界であるから $|h(x)| \le M$ とし，$E = \{x \in X \mid |h(x)| > 1\}$ とおくと E は可測集合で

$$|h(x)|^p \le \begin{cases} M^p, & E \text{ の上で} \\ |h(x)|, & E \quad \text{の外で} \end{cases}$$

が成立する．すなわち

$$|h(x)|^p \le M^p \chi_E(x) + |h(x)|\chi_{X\setminus E}(x) \le M^p \chi_E(x) + |h(x)|$$

で右辺は可積分であるから $|h(x)|^p$ も可積分となって $H(X) \subset L_p(X)$ である．$f(x) \in L_p(X)$ とすると $f^+(x), f^-(x) \in L_p(X)$ であるから，最初から $f(x) \ge 0$ と仮定してよい．$E_n = \{x \in X \mid 1/n < f(x) \le n\}, n = 1, 2, ...$ とおき

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E_n \\ 0 & x \notin E_n \end{cases}$$

と定義すると，$f_n \nearrow f$ 従って $(f - f_n)^p \searrow 0$ である．

$$\int_X (f(x) - f_n(x))^p dx \le \int_X f(x)^p dx$$

であるから Beppo Levi の定理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f(x) - f_n(x))^p dx = \int_X \lim_{n\to\infty} (f(x) - f_n(x))^p dx = 0.$$

さて任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して $\|f - f_n\|_p < \epsilon/2$ となる n を固定しよう．$\chi_{E_n}(x) = \chi_{E_n}(x)^p \le n^p f(x)^p$ であるから $\mu(E_n) < +\infty$ である．このとき Hölder の不等式より

$$\int_X f_n(x)dx = \int_X \chi_{E_n}(x)f(x)dx \le \Big(\int_X (\chi_{E_n})^q dx\Big)^{1/q} \|f\|_p$$

が従い，$f_n \in L(X)$ となる．補題 2.6.1 より $H(X)$ は $L(X)$ で稠密であるから $h_k \in H(X)$ で $h_k \to f_n$ in $L(X)$ となる $\{h_k\}$ が存在する．$h_k^+ \to f^+ = f$ であるから $h_k \ge 0$ と仮定してよい．今 $\tilde{h}_k = \min(h_k(x), n) \in H(X)$ とおくと

$$|\tilde{h}_k(x) - f_n(x)| \le |h_k(x) - f_n(x)|$$

であるから $\tilde{h}_k \to f_n$ in $L(X)$ である．ここで

$$\|f_n - \tilde{h}_k\|_p = \Big(\int_X |f_n(x) - \tilde{h}_k(x)|^p dx\Big)^{1/p}$$
$$= \Big(\int_X |f_n(x) - \tilde{h}_k(x)||f_n(x) - \tilde{h}_k(x)|^{p-1} dx\Big)^{1/p}$$
$$\le n^{\frac{p-1}{p}} (\int_X |f_n(x) - \tilde{h}_k(x)|dx\Big)^{1/p} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

であるから $\|f_n - \tilde{h}_k\|_p < \epsilon/2$ となるように k を選ぶと $\|f - \tilde{h}_k\| \le \|f - f_n\|_p + \|f_n - \tilde{h}_k\|_p < \epsilon$ となって結論が従う．(証終)

第4章　導関数と不定積分

4.1　単調関数に関する Lebesgue の定理

補題 4.1.1 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の単調関数とする．このとき $f(x)$ の不連続点は第一種の不連続点である．即ち，各不連続点 x で $f(x+0)$, $f(x-0)$ が存在する．また不連続点の個数は高々可算個である．

証明：$f(x)$ を単調増加としよう．まず $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ より $f(x)$ は有界である．いま $\bar{x}$ を $f(x)$ の不連続点とする．

$$\alpha = \sup\{f(x) \mid x < \bar{x}\},\ \beta = \inf\{f(x) \mid \bar{x} < x\}$$

とおこう．任意の $\epsilon > 0$ に対して $\alpha - \epsilon < f(y)$ なる $y < \bar{x}$ がある．このとき

$$y < x < \bar{x} \Longrightarrow \alpha - \epsilon < f(y) \leq f(x) \leq \alpha$$

であるから $\lim_{x \nearrow \bar{x}} f(x) = \alpha$ が従う．$\lim_{x \searrow \bar{x}} f(x) = \beta$ についても同様である．

次に

$$G_n = \{x \mid f(x+0) - f(x-0) > \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

とおくとあきらかに不連続点の全体は $\cup_{n=1}^{\infty} G_n$ に含まれる．一方 G_n に含まれる点の個数 $k(n)$ は

$$k(n)\frac{1}{n} \leq f(b) - f(a)$$

を満たすから高々有限個である．従って主張を得る．(証終)

定理 4.1.1 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の単調関数とする．このとき $f(x)$ は殆ど至る所有限な微分係数をもつ．

証明のためにまずつぎの補題を示そう．

補題 4.1.2 $E \subset [a,b]$ が零集合であるためには次の条件をみたす区間列 $\{I_n\}$ のとれることが必要十分である．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \infty$

(2) $\forall x \in E$ に対して無限個の $\{I_{n_p}\}$ で $x \in (I_{n_P})^\circ$ なるものがとれる．

証終：このような $\{I_n\}$ がみつかったとしよう．$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\infty$ であるから，任意の $\epsilon>0$ に対して $\sum_{n=N}^{\infty}|I_n|<\epsilon$ となるように N を定める．このとき仮定から任意の $x\in E$ に対して x を含む I_k, $k\geq N$ があるから $E\subset\cup_{n=N}^{\infty}I_n$ となり，したがって $\mu(E)=0$ である．

逆に $\mu(E)=0$ とする．各 $n\in\mathbf{N}$ に対して

$$E\subset\bigcup_{p=1}^{\infty}I_p^{(n)},\quad \sum_{p=1}^{\infty}|I_p^{(n)}|<\frac{1}{2^p}$$

なる $\{I_p^{(n)}\}$ が存在する．いま $J_p^{(n)}$ を $I_p^{(n)}$ を含む開区間でかつ $\sum_{p=1}^{\infty}|J_p^{(n)}|<1/2^{p-1}$ を満たすものとする．このとき

$$\{J_p^{(n)}\}_{n=1,p=1}^{\infty}$$

は明らかに条件を満たす．(証終)

補題 4.1.3 $g(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする．

$$E=\{x\in(a,b)\mid g(\xi)>g(x), x<\exists\xi\in[a,b]\}$$

とおく．$E=\cup_\lambda(a_\lambda,b_\lambda)$ と連結成分の合併に書くとき $g(a_\lambda)\leq g(b_\lambda)$ である．さらに $a_\lambda\neq a$ ならば $g(a_\lambda)=g(b_\lambda)$ である．

証明の前に，$\mathbf{R}$ の有界開集合 E は高々可算個の disjoint な開区間の合併として表されることを注意しよう．実際 O_λ を連結成分の一つとし，$a_\lambda=\inf\{x\mid x\in O_\lambda\}$, $b_\lambda=\sup\{x\mid x\in O_\lambda\}$ とおくと $O_\lambda=(a_\lambda,b_\lambda)$ である．次に $\Lambda_n=\{\lambda\in\Lambda\mid b_\lambda-a_\lambda>1/n\}$ とおくと $\Lambda\subset\cup_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$ で Λ_n の要素の個数は高々有限個であるから Λ は高々可算集合である．

証明：E が開集合であることは明らか．$\forall x\in(a_\lambda,b_\lambda)\Longrightarrow g(x)\leq g(b_\lambda)$ を示せば $g(a_\lambda)\leq g(b_\lambda)$ が従う．いま $x_0\in(a_\lambda,b_\lambda)$ で $g(x_0)>g(b_\lambda)$ なる x_0 が存在すると仮定しよう．$g(x^*)=\max_{x\in[x_0,b_\lambda]}g(x)$ とすると

$$g(x^*)\geq g(x_0)>g(b_\lambda)$$

であるから $x^*\neq b_\lambda$ で従って $x^*\in E$ となる．故に $g(\xi)>g(x^*)$ なる $\xi>x^*$ がある．ところが $\xi\in[x_0,b_\lambda]$ なら g が x^* で最大であることに反し，$\xi\in(b_\lambda,b]$ ならば $b_\lambda\in E$ となって矛盾する．従って主張が示された．最後に $a_\lambda\neq a$ とするとき，$g(a_\lambda)<g(b_\lambda)$ と仮定すると $a_\lambda\in E$ となって矛盾するから，$g(a_\lambda)=g(b_\lambda)$ である．(証終)

定理 4.1.1 の証明：まず $f(x)$ が単調増加な連続関数の場合に証明しよう．

$$\Lambda_+^f(x)=\lim_{\delta\downarrow0}\sup_{0<h\leq\delta}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \lambda_+^f(x)=\lim_{\delta\downarrow0}\inf_{0<h\leq\delta}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\Lambda_-^f(x)=\lim_{\eta\uparrow0}\sup_{\eta\leq h<0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \lambda_-^f(x)=\lim_{\eta\uparrow0}\inf_{\eta\leq h<0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

とおこう.

$$e_1 = \{x \in [a,b] \mid \Lambda_+^f(x) = +\infty\},\ e_2 = \{x \in [a,b] \mid \Lambda_+^f(x) \le \lambda_-^f(x)\}$$

とおくとき，$\mu(e_1) = 0$, $\mu([a,b] \setminus e_2) = 0$ を示せばよい．実際

$$e_3 = \{x \in [a,b] \mid \Lambda_-^f(x) \le \lambda_+^f(x)\}$$

とおくとき $\mu([a,b]\setminus e_3) = 0$ である．なぜなら $h(x) = -f(-x)$ とおくと $h(x)$ は $[-b,-a]$ 上単調増加連続関数であるから，$\tilde{e}_2 = \{x \in [-b,-a] \mid \Lambda_+^h(x) \le \lambda_-^h(x)\}$ とすると $\mu([-b,-a]\setminus \tilde{e}_2) = 0$ であるが，定義から $\Lambda_-^f(x) = \Lambda_+^h(-x)$, $\lambda_+^f(x) = \lambda_-^h(-x)$ であるから $e_3 = -\tilde{e}_2$ となり $\mu([a,b] \setminus e_3) = 0$ が従う．$e = e_1 \cup ([a,b] \setminus e_2) \cup ([a,b] \setminus e_3)$ とおくと $\mu(e) = 0$ でかつ $x \in [a,b] \setminus e$ ならば

$$\Lambda_+^f(x) \le \lambda_-^f(x) \le \Lambda_-^f(x) \le \lambda_+^f(x) \le \Lambda_+^f(x) < +\infty$$

となって $\Lambda_+^f(x) = \lambda_-^f(x) = \Lambda_-^f(x) = \lambda_+^f(x)$ となり，$f(x)$ は x で微分可能であるから結論を得る．

さて $e_1 = \cap_c\{x \in [a,b] \mid \Lambda_+^f(x) > c\} = \cap_c E_c$ と書ける．$x \in E_c$ ならば $\Lambda_+^f(x) > c$ 故，ある $\xi > x$ があって

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > c$$

すなわち $f(\xi) - c\xi > f(x) - cx$ が成立する．$f(x) - cx$ に補題 4.1.3 を適用すると，集合 E が得られ，この E に対し $E_c \subset E$ である．さて補題 4.1.3 より

$$E = \bigcup_\lambda (a_\lambda, b_\lambda),\quad f(b_\lambda) - cb_\lambda \ge f(a_\lambda) - ca_\lambda$$

である．従って $c\sum_\lambda (b_\lambda - a_\lambda) \le \sum_\lambda [f(b_\lambda) - f(a_\lambda)] \le f(b) - f(a)$ となる．区間列 $\{(a_\lambda, b_\lambda)\}$ は e_1 を覆っているから，$c \to \infty$ として $\mu(e_1) = 0$ が従う．

次に e_2 を考察する．$E_{\alpha,\beta} = \{x \in (a,b) \mid \lambda_-^f(x) < \alpha < \beta < \Lambda_+^f(x)\}$ とおくと

$$e_2 = [a,b] \setminus \Big(\bigcup_{\alpha<\beta,\alpha,\beta\in\mathbf{Q}} E_{\alpha,\beta} \Big)$$

である．従って任意の $\alpha < \beta$ に対して $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ を示せば十分である．$h(x) = f(-x)$ とおくと $h(x)$ は $[-b,-a]$ 上の連続関数であって $\lambda_-^f(x) = -\Lambda_+^h(-x)$ であるから

$$-\{x \mid \Lambda_+^h(x) > -\alpha\} \supset \{x \mid \lambda_-^f(x) < \alpha\}$$

である．$h(x) + \alpha x$ に対して補題 4.1.3 を適用すると，集合 E が得られ，この E は

$$-E \supset \{x \mid \lambda_-^f(x) < \alpha\},\ -E = \Sigma_1 = \cup_\lambda (a_\lambda, b_\lambda)$$

を満たす．各 (a_λ, b_λ) の中で $\{x \mid \beta < \Lambda_+^f(x)\}$ を考える．$f(x) - \beta x$ に対して再び補題 4.1.3 を適用すると集合 E_λ を得る．明らかに $E_{\alpha,\beta} \subset \cup_\lambda E_\lambda$ である．$\Sigma_2 = \cup_\lambda E_\lambda$ とおこう．また

$$E_\lambda = \cup_\mu (a_{\lambda\mu}, b_{\lambda\mu})$$

と書ける．さて $h(-b_\lambda) + \alpha(-b_\lambda) \leq h(-a_\lambda) + \alpha(-a_\lambda)$ 故，$f(b_\lambda) - f(a_\lambda) \leq \alpha(b_\lambda - a_\lambda)$ が成立する．また $\beta(b_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}) \leq f(b_{\lambda\mu}) - f(a_{\lambda\mu})$ であるから

$$\beta \sum_\mu (b_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}) \leq f(b_\lambda) - f(a_\lambda) \leq \alpha(b_\lambda - a_\lambda)$$

この不等式を λ について加えると

$$\beta|\Sigma_2| \leq \sum_\lambda (f(b_\lambda) - f(a_\lambda)) \leq \alpha|\Sigma_1|$$

が成立する．すなわち $|\Sigma_2| \leq (\alpha/\beta)|\Sigma_1|$ を得る．以下この議論を繰り返すことによって可算個の開区間列からなる集合の列 Σ_1, Σ_2,...,Σ_n,... で

$$E_{\alpha,\beta} \subset \Sigma_n,\ \ |\Sigma_{n+1}| \leq \frac{\alpha}{\beta}|\Sigma_n|$$

なるものが得られる．$n \to \infty$ として $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ が従う．

$f(x)$ が連続でないときは補題 4.1.3 を次のように拡張する．

補題 4.1.4 $f(x)\ :\ [a,b]\ \to\ \mathbf{R}$ は第一種の不連続点しかもたないとする．$F(x) = \max\{f(x+0), f(x), f(x-0)\}$ とおく．

$$E = \{x \in (a,b) \mid F(x) < f(\xi),\ x < \exists\xi \in [a,b]\}$$

とすると E は開集合で $E = \sum_\lambda (a_\lambda, b_\lambda)$ と連結成分の合併で書くとき $F(b_\lambda) \geq f(a_\lambda + 0)$ である．

証明：E が開集合であることをみるのは容易である．任意の $x \in (a_\lambda, b_\lambda)$ に対して $f(x) \leq F(b_\lambda)$ であることを示そう．いま $\exists x_0 \in (a_\lambda, b_\lambda)$, $f(x_0) > F(b_\lambda)$ と仮定しよう．$x^* = \sup\{y \in (a_\lambda, b_\lambda) \mid f(y) \geq f(x_0)\}$ とおくと $x^* = b_\lambda$ である．実際 $x^* \neq b_\lambda$ とすると定義から $x^* < \xi^*$, $F(x^*) < f(\xi^*)$ なる ξ^* がある．$\xi^* \neq b_\lambda$ は明らかである．$\xi^* \in (x^*, b_\lambda)$ とすると

$$f(\xi^*) > F(x^*) = \max\{f(x^*), f(x^*+0), f(x^*-0)\}$$

から $f(\xi^*) > f(x_0)$ となって x^* の定義に反する．$\xi^* > b_\lambda$ とすると $f(\xi^*) > F(x^*) \geq f(x_0) > F(b_\lambda)$ となって $b_\lambda \notin E$ に反する．従って $x^* = b_\lambda$ である．ところがこれは $f(b_\lambda - 0) \geq f(x_0) > F(b_\lambda) \geq f(b_\lambda - 0)$ に矛盾する．以上のことから $\forall x \in (a_\lambda, b_\lambda)$ に対して $f(x) \leq F(b_\lambda)$ となり結論が従う．(証終)

$f(x)$ が必ずしも連続でない単調増加関数のときに定理 4.1.1 を証明するには，$f(x)$ のかわりに $\tilde{f}(x) = f(x+0)$ を考え，補題 4.1.3 のかわりに補題 4.1.4 を適用すればよい．実際 $\tilde{f}(x)$ は高々可算個の点を除いて $f(x)$ に一致し，補題 4.1.4 より，$\tilde{f}(x)$ に対しては補題 4.1.3 の主張がそのまま成り立つ．

最後に単調関数級数に関する Fubini の定理を示そう．

定理 4.1.2 $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ を $[a, b]$ 上の単調関数の列とし

$$S(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

は任意の $x \in [a, b]$ に対して収束するとする．このとき

$$S'(x) = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x) + \cdots$$

が殆ど至る所成立する (右辺の級数が殆ど至る所収束して)．

証明：各 $f_i(x)$ を非減少として証明しよう．非増加の場合も同様である．まず Lebesgue の定理 4.1.1 より $f_i(x)$ は殆ど至る所微分可能である．また明らかに $S(x)$ も非減少関数である．$g_i(x) = f_i(x) - f_i(a)$ とおくと $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) = G(x) = S(x) - S(a)$ であり $g_i(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, $g_i(a) = 0$ である．また $g_i(x)$, $G(x)$ は非減少である．

$$G_n(x) = g_1(x) + \cdots + g_n(x)$$

とおくと $G(x) - G_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} g_i(x)$ で $g_i(x)$ が非減少関数であることから $G(x) - G_n(x)$ も非減少関数である．従って Lebesgue の定理 4.1.1 より殆ど至る所微分可能でしかも $G'(x) - G_n'(x) \geq 0$，すなわち

$$G_n'(x) \leq G'(x) \quad a.e.$$

である．他方 $G_n(x) - G_{n-1}(x) = g_n(x)$ は非減少関数であるから再び定理 4.1.1 より $G_{n-1}'(x) \leq G_n'(x)$, a.e. が成立する．すなわち $\{G_n'(x)\}$ は殆ど至る所上に有界な単調増加列である．従って

$$g_1'(x) + \cdots + g_n'(x) + \cdots$$

は殆ど至る所収束する．$f_i'(x) = g_i'(x)$ であったから $f_1'(x) + \cdots + f_n'(x) \cdots$ も殆ど至る所収束する．

さて $G_n(b) \to G(b)$, $n \to \infty$ であるから $\{G_n(b)\}$ の部分列 $\{G_{np}(b)\}$ を $G(b) - G_{np}(b) < 2^{-p}$ となるように選ぼう．$G(x) - G_n(x)$ は非減少関数であったから

$$G(x) - G_{np}(x) \leq G(b) - G_{np}(b) \leq \frac{1}{2^p}, \quad \forall x \in [a, b]$$

従って $\sum_p (G(x)-G_{np}(x))$ は任意の $x\in[a,b]$ に対して収束する．従って，今証明したことを利用すると $\sum_p (G'(x)-G'_{np}(x))$ が殆ど至る所収束することがわかる．従って特に殆ど至る所 $G'(x)-G'_{np}(x)\to 0$, $p\to\infty$ である．$\{G'_n(x)\}$ は $n\to\infty$ のとき殆ど至る所収束することはすでに示しているので $G'_n(x)\to G'(x)$, $n\to\infty$ が殆ど至る所成立する．$G'(x)=S'(x)$ であるから結論を得る．(証終)

4.2　有界変動関数

定義 4.2.1 $f(x)$ を $[a,b]\subset\mathbf{R}$ 上の関数とする．$f(x)$ が $[a,b]$ 上有界変動であるとは，正数 M が存在して，$[a,b]$ の任意の分割 Δ

$$\Delta : a=x_0\le x_1\le\cdots\le x_n=b$$

に対して

$$V(f;\Delta)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le M$$

の成立することをいう．このとき

$$\sup_{\Delta}\sum_i |f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sup_{\Delta}V(f;\Delta)=T_f(a,b)$$

を f の $[a,b]$ における総変動量という．

補題 4.2.1 $f(x)$ を $[a,b]$ 上有界変動とする．$a<c<b$ とするとき

$$T_f(a,c)+T_f(c,b)=T_f(a,b)$$

が成立する．

証明：任意の $\epsilon>0$ に対して，$[a,b]$ のある分割 Δ があって

$$V(f;\Delta)>T_f(a,b)-\epsilon$$

とできる．c が分点でなければ c を分点に加えてそれを改めて Δ で表すと，一般に分点を増やすとき $V(f;\Delta)$ は非減少であるから上の不等式はそのまま成立する．$\Delta : a=x_0\le x_1\le\cdots\le c=x_n\le x_{n+1}\le\cdots\le x_m=b$ とするとき明らかに

$$\begin{aligned}T_f(a,c)+T_f(c,b)&\ge\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=n+1}^{m}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&=V(f;\Delta)>T_f(a,b)-\epsilon\end{aligned}$$

が成立する．$\epsilon>0$ は任意であったから $T_f(a,c)+T_f(c,b)\ge T_f(a,b)$ が従う．逆向きの不等式も同様にして証明される．(証終)

定理 4.2.1 有界変動関数は２つの非減少関数の差として表される．逆に，２つの非減少関数の差で表される関数は有界変動である．

証明：$x \in [a,b]$ に対して $T(x) = T_f(a,x)$ とおこう．いま

$$f(x) = T(x) - (T(x) - f(x))$$

とおくとこれが非減少関数の差を与える．実際補題 4.2.1 を区間 $[a,x]$ で適用すると $a \leq y \leq x$ として

$$T(x) = T(y) + T_f(y,x) \geq T(y)$$

となり $T(x)$ が非減少であることが分かる．$T(x) - f(x)$ が非減少であることをみるには

$$T(x) - f(x) = T(y) - f(y) + T_f(y,x) - (f(x) - f(y))$$

と書いて $T_f(y,x) \geq |f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y)$ に注意すればよい．逆は明らかである．(証終)

この定理においてもちろん他の分解も可能である．たとえば

$$P(x) = \frac{1}{2}(T(x) + f(x)) - \frac{1}{2}f(a), \quad N(x) = \frac{1}{2}(T(x) - f(x)) + \frac{1}{2}f(a)$$

とおくと $f(x) = P(x) - N(x)$ であり $P(x), N(x)$ は非減少関数である．$P(x)$, $N(x)$ は $f(x)$ の $[a,x]$ における正の変動量および負の変動量とよばれる．実際正，負の変動量は以下のように定義されるものと一致する．$\Delta : a = x_0 < x_1, \cdots < x_n = b$ を $[a,b]$ の任意の分割とするとき

$$V^+(f;\Delta) = \sum_{i; f(x_i) - f(x_{i-1}) > 0} (f(x_i) - f(x_{i-1})),$$
$$V^-(f;\Delta) = -\sum_{i; f(x_i) - f(x_{i-1}) < 0} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

とおくとき

$$P = \sup_{\Delta} V^+(f;\Delta), \quad N = \sup_{\Delta} V^-(f;\Delta)$$

が $f(x)$ の $[a,b]$ における正，負の変動量を与える．このとき次の関係式が成り立つ．

$$V = P + N, \quad f(b) - f(a) = P - N.$$

この２式から P，N を求めれば再び上に述べた分解が得られる．

定理 4.2.2 有界変動関数は殆ど至る所有限確定な微分係数を有す．

証明：定理 4.2.1 と Lebesgue の定理 4.1.1 から明らかである．(証終)

定理 4.2.3 $f(x)$ を $[a,b]$ 上有界変動とする．$T(x) = T_f(a,x)$ とおくとき，殆ど至る所

$$T'(x) = |f'(x)|$$

が成立する．

証明：$T = T(b)$ は $f(x)$ の $[a,b]$ 上の総変動量である．

$$\Delta_n : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{p_n}^{(n)} = b$$

を $[a,b]$ の分割の列であって $V(f;\Delta_n) > T(b) - 2^{-n}$ を満たすものとする．さて関数 $f_n(x)$ を以下のように定義しよう．まず $f_n(a) = 0$ とする．各 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上では $\pm(f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})) \geq 0$ に応じて $\pm f(x) + c$ とする．ここで c は定数で分割点において $f_n(x)$ が連続になるように選ぶ．特に $f_n(x_i^{(n)}) \geq f_n(x_{i-1}^{(n)})$ である．このとき

$$V(f;\Delta_n) = \sum_{i=1}^{p_n} (f_n(x_i^{(n)}) - f_n(x_{i-1}^{(n)})) = f_n(b) - f_n(a) = f_n(b)$$

である．

次に $T(x) - f_n(x)$ が非減少であることを示そう．$x < \xi$ として $[x,\xi]$ 内にある分点を $x \leq x_i^{(n)} < \cdots < x_j^{(n)} \leq \xi$ とする．このとき

$$\begin{aligned} T(\xi) - T(x) = T_f(x,\xi) &\geq |f(\xi) - f(x_j^{(n)})| + \cdots + |f(x_i^{(n)}) - f(x)| \\ &= |f(\xi) - f(x_j^{(n)})| + f_n(x_j^{(n)}) - f_n(x_{j-1}^{(n)}) + \cdots \\ &\quad + f_n(x_{i+1}^{(n)}) - f_n(x_i^{(n)}) + |f(x_i^{(n)}) - f(x)| \end{aligned}$$

が成り立つ．$|f(\xi) - f(x_i^{(n)})| \geq f_n(\xi) - f_n(x_i^{(n)})$, $|f(x_i^{(n)}) - f(x)| \geq f_n(x_i^{(n)}) - f_n(x)$ であるから $T(\xi) - T(x) \geq f_n(\xi) - f_n(x)$，すなわち $T(x) - f_n(x)$ は非減少である．$T(x) - f_n(x) \leq T(b) - f_n(b) \leq 2^{-n}$ であるから $\sum_{n=1}^{\infty}(T(x) - f_n(x))$ は任意の $x \in [a,b]$ で収束する．Fubini の定理 4.1.2 より $\sum_{n=1}^{\infty}(T'(x) - f_n'(x))$ は殆ど至る所収束する．従って特に殆ど至る所で $T'(x) - f_n'(x) \to 0$, $n \to \infty$ である．ところで $f'(x) = \pm f_n(x)$ a.e. であるから $T'(x) \geq 0$ に注意すると $T'(x) = |f'(x)|$ a.e. である．(証終)

定理 4.2.4 $f(x)$ を $[a,b]$ 上有界変動とする．$T(x) = T_f(a,x)$ とおく．このとき任意の x に対して

$$T(x) - T(x-0) = |f(x) - f(x-0)|,$$
$$T(x+0) - T(x) = |f(x+0) - f(x)|$$

である．従って $T(x)$ と $f(x)$ の連続点，不連続点は一致する．

証明：$f_n(x)$ は定理 4.2.3 の証明で定義したものとする．$\eta < x$ として

$$
\begin{aligned}
&|T(x) - T(\eta) - f_n(x) + f_n(\eta)| \\
&\le |T(x) - f_n(x)| + |T(\eta) - f_n(\eta)| \le 2^{-n+1}
\end{aligned}
$$

であるから $\eta \uparrow x$ として $|T(x) - T(x-0) - (f_n(x) - f_n(x-0))| \le 2^{-n+1}$ を得る．従って $n \to \infty$ のとき $f_n(x) - f_n(x-0) \to T(x) - T(x-0)$ である．ところで $f_n(x) - f_n(x-0) = \pm(f(x) - f(x-0))$ であるから $T(x) - T(x-0) \ge 0$ に注意すると $T(x) - T(x-0) = |f(x) - f(x-0)|$ が従う．$T(x+0) - T(x)$ についても同様である．(証終)

4.3　不定積分の微分と総変動量

$f(x)$ を $[a,b]$ 上の可積分関数とし

$$
F(x) = \int_a^x f(t)dx
$$

を考える．まず $F(x)$ は $[a,b]$ 上有界変動である．実際 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, $f^\pm(x) \ge 0$ と分解すると

$$
F(x) = \int_a^x f^+(t)dt - \int_a^x f^-(t)dt
$$

と非減少関数の差に書ける．従って有界変動である．

定理 4.3.1 $f(x) \in L(a,b)$ とする．このとき

$$
F(x) = \int_a^x f(t)dt
$$

は有界変動で，$[a,b]$ 上の総変動量は

$$
T_F(a,b) = \int_a^b |f'(t)|dt
$$

で与えられる．

証明：$F(x)$ が有界変動であることは既に確かめた．階段関数 $\epsilon(x)$ で (x_{k-1}, x_k) 上での値が ϵ_k であるようなものを考える ($|\epsilon_k| \le 1$)．このとき

$$
\int_a^b \epsilon(x)f(x)dx = \sum_k \epsilon_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \sum_k \epsilon_k (F(x_k) - F(x_{k-1}))
$$

であるから，明らかに

$$
\int_a^b \epsilon(x)f(x)dx \le \sum_k |F(x_k) - F(x_{k-1})| \le T_F(a,b).
$$

他方，$\pm(F(x_k)-F(x_{k-1}))\geq 0$ に応じて $\epsilon_k=\pm 1$ と選ぶことによって

$$T_F(a,b)=\sup\int_a^b \epsilon(x)f(x)dx\leq\int_a^b |f(x)|dx$$

が従う．ここで上限は $|\epsilon(x)|\leq 1$ を満たすすべて階段関数 $\epsilon(x)$ についてとるものとする．さて $\phi_n(x)\in H(a,b)$ を，$\phi_n(x)\to f(x)$, a.e. なる列とする．いま

$$e_n(x)=\begin{cases} 1, \quad n\phi_n(x)>1 \\ n\phi_n(x), \quad |n\phi_n(x)|\leq 1 \\ -1, \quad n\phi_n(x)<-1 \end{cases}$$

と定義すると $\epsilon_n(x)\in H(a,b)$ であって殆ど至る所 $\epsilon_n(x)f(x)\to|f(x)|$ である．実際 $\phi_n(x)\to f(x)>0(<0)$ なら n が十分大なら $e_n(x)=1(-1)$ であるから明らかである．他方 $|\epsilon_n(x)|\leq 1$ 故 $|\epsilon_n(x)f(x)|\leq|f(x)|$ で Lebesgue の定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \epsilon_n(x)f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

である．したがって結論が従う．(証終)

定理 4.3.2 $f(x)\in L(a.b)$ とする．このとき

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

とおくと，殆ど至る所

$$F'(x)=f(x)$$

が成立する．

証明：定義から $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$, $f_i(x)\in L^+(a,b)$ と書ける．

$$F(x)=\int_a^x f_1(t)dt-\int_a^x f_2(t)dt$$

であるから $f(x)\in L^+(a,b)$ に対して証明すればよい．従って $\phi_n(x)\in H(a,b)$ で $\phi_n\nearrow f(x)$ なる列がとれる．

$$\Phi_n(x)=\int_a^x \phi_n(t)dt$$

とおくと，有限個の点を除いて $\Phi_n'(x)=\phi_n(x)$ である．区間 $[a,x]$ で Beppo Levi の定理を適用すると，任意の点 $x\in[a,b]$ で $\Phi_n(x)\to F(x)$ であることが分かる．従って

$$\Phi_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_{k+1}(x)-\Phi_k(x))=F(x)$$

である．$\phi_k(x) \le \phi_{k+1}(x)$, a.e. であるから

$$\Phi_{k+1}(x) - \Phi_k(x) = \int_a^x (\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t))dt$$

は非減少関数である．したがって Fubini の定理から，殆ど至る所

$$\Phi_1'(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\Phi_{k+1}'(x) - \Phi_k'(x)) = F'(x)$$

が成立する．すなわち $\phi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)) = F'(x)$ である．したがって主張を得る．(証終)

定理 4.3.3 $\phi(x)$ を $[a,b]$ で非減少連続関数とする．このとき $\phi'(x)$ は $[a,b]$ で可積分であり

$$\int_a^b \phi'(x)dx \le \phi(b) - \phi(a)$$

が成立する．

証明：$h > 0$ として $\Phi_h(x)$ を

$$\Phi_h(x) = \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$$

とおくと $\Phi_h(x)$ は連続，従って可積分であり，また $\Phi_h(x) \ge 0$ である ($b < x$ では $\phi(x) = \phi(b)$ で $x < a$ では $\phi(x) = \phi(a)$ で拡張しておく)．ここで $\Phi_h(x) \to \phi'(x)$, a.e. であり

$$\int_a^b \Phi_h(x)dx = \frac{1}{h}\int_b^{b+h} \phi(x)dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \phi(x)dx \to \phi(b) - \phi(a)$$

であるから Fatou の補題から $\phi'(x) \in L(a,b)$ でさらに定理の主張が従う．(証終)

系 4.3.1 $\phi(x)$ を $[a,b]$ で連続かつ有界変動とする．このとき

$$\phi(x) = \theta(x) + \int_a^x \phi'(s)ds$$

とかける．ここで $\theta(x)$ は連続かつ有界変動で

$$\theta'(x) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [a,b]$$

である．

証明：$\theta(x)$ を

$$\theta(x) = \phi(x) - \int_a^x \phi'(x)dx$$

とおくと，定理 4.3.3 より $\phi'(x)$ は $[a,b]$ で可積分であるから定理 4.3.2 より殆どいたるところ $\theta'(x) = \phi'(x) - \phi'(x) = 0$. また定理 4.3.1 より $\theta(x)$ は連続かつ有界変動となる．(証終)

4.4　絶対連続関数

定義 4.4.1 $\psi(x) \in C^0([a,b])$ が絶対連続とは，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって

$$\sum |I_n| < \delta$$

を満たす互いに重なり合わない任意の高々可算個の区間 $\{I_n\}$, $I_n = [x_n, x'_n]$ に対して

$$|\psi(x_n) - \psi(x'_n)| < \epsilon$$

の成立することをいう．

補題 4.4.1 $F(x)$ を $[a,b]$ 上非減少，絶対連続で殆ど至る所 $F'(x) = 0$ が成立しているとする．このとき $F(x)$ は $[a,b]$ 上定数である．

この証明のためにまず次の補題を示そう．

補題 4.4.2 $F(x)$ を $[a,b]$ 上非減少，絶対連続とする．このとき零集合 $E \subset [a,b]$ に対して $F(E)$ も零集合である．

証明：任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとする．$\delta > 0$ を絶対連続 $F(x)$ の定義に表れるものとする．さて E は零集合であるから区間列 $\{I_n\}$ があって

$$\bigcup_n I_n \supset E, \quad \sum_n |I_n| < \delta$$

とできる．このとき I_n は閉区間で互いに重ならないとしてよい．すなわち $I_p^\circ \cap I_q^\circ = \emptyset$. さて $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ とすると $F(I_n) = [F(\alpha_n), F(\beta_n)]$ であり $J_n = F(I_n)$ とおくと

$$\bigcup_n J_n \supset F(E), \quad \sum_n |J_n| = \sum_n |F(\beta_n) - F(\alpha_n)| \leq \epsilon$$

であるから $F(E)$ も零集合である．(証終)

補題 4.4.1 の証明：E を

$$e = \{x \in (a,b) \mid F'(x) \text{ が存在しない, または } F'(x) \neq 0\}$$

とおこう．仮定から $\mu(e) = 0$ である．補題 4.4.2 より $\mu(F(e)) = 0$ である．$E = (a,b) \setminus e$ とおいて $\mu(F(E)) = 0$ を示そう．これが示されたとすると

$$(F(b), F(a)) \subset F(E) \cup F(e)$$

から $\mu((F(b), F(a))) = 0$ が従い，故に $F(b) = F(a)$ を得る．

任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとする．$\forall x \in E$ に対して $F'(x) = 0$ であるから $x < \xi$, $F(\xi) - F(x) < \epsilon(\xi - x)$ なる ξ が存在する．そこで $g_\epsilon(x) = \epsilon x - F(x)$

とおいて，補題 4.1.3 を適用すると $E_\epsilon = \cup_\lambda (a_\lambda, b_\lambda)$ が存在して $E \subset E_\epsilon$, $g_\epsilon(a_\lambda) \le g_\epsilon(b_\lambda)$ が成立している．従って

$$F(E) \subset F(E_\epsilon) \subset \bigcup_n [F(a_\lambda), F(b_\lambda)]$$

である．ところが $\sum_\lambda (F(b_\lambda) - F(a_\lambda)) \le \epsilon \sum (b_\lambda - a_\lambda) \le \epsilon(b-a)$ であるから，$\epsilon > 0$ が任意であることより $\mu(F(E)) = 0$ を得る．(証終)

定理 4.4.1 $F(x)$ を $[a,b]$ 上の関数で，ある $f(x) \in L(a,b)$ があって

$$F(x) = c + \int_a^x f(s)ds$$

と書けるためには，$F(x)$ が $[a,b]$ 上絶対連続であることが必要十分である．

証明：まず $F(x)$ が $f(x) \in L(a,b)$ の不定積分としてかかれているならば絶対連続であることを示そう．$F(x) = \int_a^x f(s)ds$ であるとする．いま $|f(s)| \le C$, $s \in [a,b]$ ならば

$$|F(x) - F(y)| \le \Big| \int_y^x |f(s)|ds \Big| \le C|y-x|$$

故，$F(x)$ は絶対連続である．一般の $f(x) \in L(a,b)$ に対して

$$f_n(x) = \begin{cases} n & f(x) > n \\ f(x) & |f(x)| \le n \\ -n & f(x) < -n \end{cases}$$

とおくと $|f_n(x)| \le |f(x)|$ で $f_n(x) \to f(x)$ a.e. である．$f(x) = f_n(x) + [f(x) - f_n(x)] = g(x) + h(x)$ とおく．$|f(x) - f_n(x)| \to 0$ a.e. および $|f(x) - f_n(x)| \le 2|f(x)|$ であるから Lebesgue の定理より

$$\int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \to 0 \quad n \to \infty$$

が従う．すなわち任意に与えられた $\epsilon > 0$ に対して n を十分大にとると

$$\int_a^b |h(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}$$

とできる．他方 $|g(x)| \le n$ であるから

$$\sum |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| = \sum \Big| \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)dx \Big| \le \sum \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(x)|dx$$
$$\le \sum \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |g(x)|dx + \sum \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |h(x)|dx \le \sum n(\beta_k - \alpha_k) + \frac{\epsilon}{2}$$

となる．従って $\sum (\beta_k - \alpha_k) < \epsilon/2n$ ならば $\sum |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \epsilon$ がなりたつ．

つぎに $F(x)$ が絶対連続ならばある $f(x) \in L(a,b)$ の不定積分になっていることを示そう．まず $F(x)$ は有界変動であることを確かめる．定義から，$\epsilon > 0$ を与えると $\delta > 0$ が決まる．$(b-a)/N < \delta$ と N をとって (a,b) を N 等分し，その分点を $\{y_k\}$ としよう．(a,b) の分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

を任意にとる．$V_F(a,b)$ は分割を細かくすれば一般に増えるから，最初から $x_k - x_{k-1} < \delta/2$ としてよい．$y_j \in (x_{k-1}, x_k)$ となる k は高々 N 個であり，他の区間 (x_{k-1}, x_k) はある $[y_{p-1}, y_p]$ に含まれる．

$$\sum_{k,(x_{k-1} x_k) \subset [y_{p-1}, y_p]} |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq \epsilon$$

に注意すると

$$\sum_k |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq \epsilon(2N+1)$$

となって $F(x)$ は有界変動である．いま $T(x) = V_F(a,x)$ とおくと，$T(x)$ は絶対連続である．実際 $\sum (x_k - x_{k-1}) < \delta$, $(x_{k-1} < x_k)$ に対して $\sum |T(x_k) - T(x_{k-1})| = \sum (T(x_k) - T(x_{k-1}) = \sum V_F(x_{k-1}, x_k)$ であるから，(x_{k-1}, x_k) の分割 $\Delta_k = \{x_p^{(k)}\}$ を

$$V_F(x_{k-1}, x_k) \leq \sum_p |F(x_p^{(k)}) - F(x_{p-1}^{(k)}| + \frac{\epsilon}{2^k}$$

となるように選んで，k について和をとると

$$\sum_k V_F(x_{k-1}, x_k) \leq \sum_k \sum_p |F(x_p^{(k)}) - F(x_{p-1}^{(k)})| + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

となる．実際 $\sum_k \sum_p (x_p^{(k)} - x_{p-1}^{(k)}) = \sum_k (x_k - x_{k-1}) < \delta$ 注意すればよい．故に $T(x)$ は絶対連続である．$F(x) = T(x) - (T(x) - F(x))$ と書くと $T(x)$, $T(x) - F(x)$ はともに非減少，絶対連続であるから，最初から $F(x)$ は非減少絶対連続としてよい．従って定理 4.3.3 より $F'(x)$ は $[a,b]$ で可積分で

$$\int_\alpha^\beta F'(x)dx \leq F(\beta) - F(\alpha)$$

が成立する．さて $G(x) = \int_a^x F'(s)ds$ とおこう．$G(x) - F(x)$ が定数であることを示せば十分である．$G(\beta) - G(\alpha) \leq F(\beta) - F(\alpha)$ から $F(x) - G(x)$ は非減少でかつ絶対連続である．故に補題 4.4.1 より $F(x) - G(x)$ は定数である．(証終)

定理 4.4.2 $\phi(x)$ を $[a,b]$ で連続かつ有界変動とする．このとき $\phi(x)$ は次のように分解される：

$$\phi(x) = \theta(x) + g(x)$$

ここで $g(x)$ は $g(a)=0$ なる $[a,b]$ 上の絶対連続関数，$\theta(x)$ は $[a,b]$ で連続で有界変動かつほとんどいたるところ $\theta'(x)=0$．またこの分解は一意的である．

証明：分解できることは系 4.3.1 で示した．いま 2 つの分解があったとしよう．

$$\phi(x)=\theta_1(x)+g_1(x)=\theta_2(x)+g_2(x).$$

このとき $\theta(x)=\theta_1(x)-\theta_2(x)=g_2(x)-g_1(x)$ は絶対連続で $\theta'(x)=0$, a.e. で $\theta(a)=0$ であるから補題 4.4.1 より $\theta(x)=0$ である．(証終)