

# 実効的雙曲型作用素の初期値問題に関する $lv_{rii}$ の予想

西谷達雄

大阪大学

熊本大学, 2026/6/20

## 雙曲型作用素とは？ 初期値問題の適切性

$$\begin{cases} Pu = D_t^m u + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+j \leq m} a_{j,\alpha}(t, x) D_x^\alpha D_t^j u = 0, & t \geq 0, \\ D_t^j u(0, x) = u_j(x), & j = 0, \dots, m-1. \end{cases} \quad (1)$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$ ,  $D_{x_j} = -i\partial/\partial x_j$ .

$\exists \delta > 0$ ,  $\exists U$ , ( $x=0$  の近傍)  $\forall u_j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  に対し, (1) を満す  $u(t, x) \in C^m([0, \delta) \times U)$  が一意に存在するとき, 初期値問題 (1) は  $C^\infty$  適切という. 初期値問題が  $C^\infty$  適切となるのが雙曲型作用素であり, 直感的には情報を時間未来に伝達する作用素である.

### Theorem (Lax-Mizohata)

$p(t, x, \tau, \xi) = \tau^m + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|+j=m} a_{j,\alpha}(t, x) \xi^\alpha \tau^j$  を  $P$  の主シンボルとする. 初期値問題が適切ならば,  $\delta' > 0$ ,  $U'$  が存在して

$$p(t, x, \tau, \xi) = 0 \implies \tau (\text{特性根}) \in \mathbb{R}, \quad \forall (t, x) \in [0, \delta') \times U', \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

## Proposition

$p(0, 0, \tau, \xi) = 0$  が  $\xi = (1, 0, \dots, 0)$  で非実根を一つ持つとし,  $I$  を原点を含む  $\mathbb{R}$  の開区間とする. 初期値問題  $Pu = 0, D_t^j u(0, x) = 0, 0 \leq j \leq m-2, D_t^{m-1} u(0, x) = g(x_1)$  が原点の近傍で  $C^m$  解を持たないような  $g \in C^\infty(I)$  の集合は  $C^\infty(I)$  の中で稠密である.

注意:  $a_{j\alpha}(t, x)$  を実解析的とすると Cauchy-Kowalevsky の定理より,  $g(x_1)$  が実解析的なら  $C^m$  解 (実解析解) が存在する.

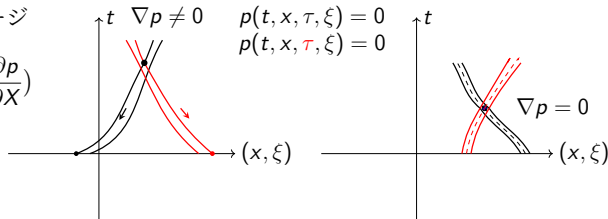
情報は Hamilton 方程式

$$\frac{d}{ds}(X, \Xi) = \left( \frac{\partial p}{\partial \Xi}, -\frac{\partial p}{\partial X} \right), \quad X = (t, x), \quad \Xi = (\tau, \xi)$$

の  $\{p(t, x, \tau, \xi) = 0\}$  (特性多様体) 内を通る解軌道に沿って伝わる.

Hamilton 流のイメージ

$$\frac{d}{ds}(X, \Xi) = \left( \frac{\partial p}{\partial \Xi}, -\frac{\partial p}{\partial X} \right)$$



- ▶  $p = 0, \nabla p = (\partial p / \partial X, \partial p / \partial \Xi) = 0$ なる点を  $p$  (または  $p = 0$ ) の危点と呼ぶ.  $p$  が  $\Xi$  について斉次なら  $\nabla p = 0 \implies p = 0$
- ▶ 危点が存在しなければ初期値問題は任意の低階項に対して  $C^\infty$  適切.
- ▶  $\gamma(s) = (X(s), \Xi(s))$  を Hamilton 方程式の解とすると  $dp(\gamma(s))/ds = 0$  i.e.  $p(\gamma(s)) = \text{定数}$ .
- ▶  $\nabla p(t, x, \tau, \xi) = 0$  なら  $\partial p(t, x, \tau, \xi) / \partial \tau = 0$  より  $(t, x, \tau, \xi)$  を危点とすると  $\tau$  は多重特性根. 逆は一般には正しくない.

## 危点が存在する場合；背景

多重特性根を持つ雙曲型方程式の研究 (1950 年代～)

簡単な例： $Pu = \partial_t^2 u = 0$ ,  $u(0, x) = \phi(x)$ ,  $\partial_t u(0, x) = \psi(x) \implies u(t, x) = \phi(x) + t\psi(x)$  (主シンボル  $p = -\tau^2$ ).

$Pu = \partial_t^2 u + i\partial_x u = 0$ ,  $u(0, x) = \phi(x)$ ,  $\partial_t u(0, x) = 0$  は一般の  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  については解けない.  $\hat{u}(t, \xi)$ :  $x$  に関する Fourier 変換.

解は  $\hat{u}(t, \xi) = (e^{\sqrt{\xi}t} + e^{-\sqrt{\xi}t})\hat{\phi}(\xi)/2$  ( $\xi > 0$ )

$\implies \hat{\phi}(\xi)/2 = e^{-\sqrt{\xi}t}(1 + e^{-2\sqrt{\xi}t})^{-1}\hat{u}(t, \xi) \implies |\hat{\phi}(\xi)| \lesssim e^{-\sqrt{\xi}t}$

初期値問題が適切となるために低階の満たすべき条件 (Levi 条件) の探索が続く.

↓ Ivrii の 1972 年の速報論文

## $lv_{rII}$ の学位論文

任意の低階項に対して初期値問題が  $C^\infty$  適切である  $\implies p$  のすべての危点 (すなわち  $p = 0$ ,  $\nabla p = 0$  となる点) において, ハミルトン写像 (基本行列) が 0 でない実の固有値の対を持つ (証明:  $lv_{rII}$  and Petkov, 1974). さらに, 主シンボルが各危点の近傍で滑らかな 2 つの実シンボルの積に書けるとき  $\implies$  十分条件でもある (証明: 1975).

- ▶ ハミルトン写像: 危点でのハミルトン方程式の線形化で, そこでの方程式の局所的・微視的な振る舞いを (ほぼ) 支配.
- ▶ 「任意の低階に対して初期値問題が  $C^\infty$  適切であるためには  $p = 0$  の各危点でハミルトン写像が 0 でない実の固有値の対をもつことが必要十分である」と予想 (1975). この予想が, 実効的雙曲型作用素 (effectively hyperbolic operator) という用語の由来.

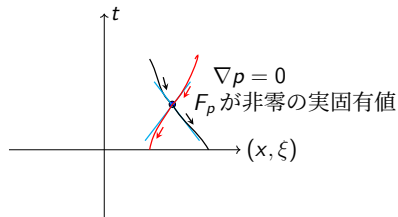
## 実効的雙曲型作用素の定義

$\rho = (\bar{X}, \bar{\Xi})$  を  $p(\rho) = 0, \nabla p(\rho) = 0$  とする.

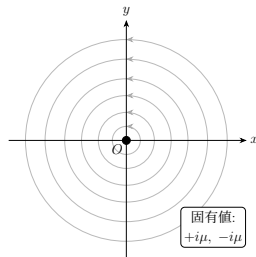
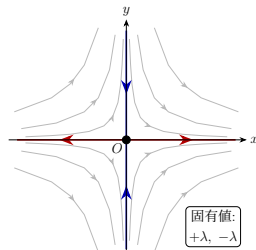
$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial p / \partial \Xi \\ -\partial p / \partial X \end{bmatrix} = \nabla^\sigma p \xrightarrow{\rho \text{ で線形化}} \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix} = 2F_\rho(\rho) \begin{bmatrix} X \\ \Xi \end{bmatrix}$$

$$F_\rho(\rho) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \partial^2 p(\rho) / \partial X \partial \Xi & \partial^2 p(\rho) / \partial \Xi \partial \Xi \\ -\partial^2 p(\rho) / \partial X \partial X & -\partial^2 p(\rho) / \partial \Xi \partial X \end{bmatrix} \text{ (Hamilton 行列).}$$

定義 :  $p = 0$  の危点  $\rho = (\bar{X}, \bar{\Xi})$  が実効的雙曲型 (effectively hyperbolic) とは, ハミルトン写像  $F_\rho(\rho)$  が一組の非零の実固有値  $\pm\lambda, (\lambda \neq 0)$  を持つこと. 作用素  $P$  が実効的雙曲型とは,  $p$  のすべての危点を実効的雙曲型であること.



- ▶  $p$  の特性根がすべて実のとき  $F_p(\rho)$  ( $\rho$  は  $p$  の危点) の 0 以外の固有値は (存在すれば)  $\pm\lambda$ ,  $\pm i\mu_j$  ( $\lambda, \mu_j > 0$ ) であり, これらは単純固有値である.
- ▶ 緑色の接線方向は実固有値に対応する固有ベクトルの方向.



## 初期値問題に関する Ivrii の予想

初期値問題に関する Ivrii の予想 (1975) : 任意の低階項に対する Cauchy 問題が  $C^\infty$  適切であるための必要十分条件は, 特性根がすべて実で, かつ  $p = 0$  のすべての危点において, そのハミルトン写像が非零の実固有値 (の対) を持つことである.

雙曲性は単なる代数的条件ではなく, Hamilton 流の力学的性質として理解されるべきである.

## 実効的雙曲性が十分でもあること

### Theorem

(2) を仮定. 任意の  $p = 0$  の危点  $(0, 0, \tau, \xi)$ ,  $|(\tau, \xi)| \neq 0$  は実効的雙曲型とする. このとき任意の低階 (係数は原点の近傍で  $C^\infty$ ) に対し,  $\delta > 0$ ,  $U$  ( $x = 0$  の近傍) があって, 任意の  $u_j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  に対し (1) をみたく  $u(t, x) \in C^\infty([0, \delta) \times U)$  が存在する. また  $u(t, x) \in C^m([0, \delta) \times U)$  が  $Pu = 0$ ,  $\partial_t^j u(0, x) = 0$ ,  $0 \leq j \leq m - 1$  を  $[0, \delta) \times U$  で満たすなら, 原点の近傍  $V$  があって  $V \cap \{t \geq 0\}$  で  $u = 0$ .

注意: 危点が存在しなければ  $P$  は主要型で (狭義雙曲型か Tricomi 型) で初期値問題は任意の低階項に対して  $C^\infty$  適切で regularity loss はない (Hörmander の教科書 XXIII 章に詳しい取り扱い).

## 最初の大きな進展：2重特性根の場合 (1980年代)

## Lemma

$p(t, x, \tau, \xi) = 0$  の根は  $\forall (t, x) \in V((\bar{t}, \bar{x}) \text{ の近傍}), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$  に対して実とする.  $\bar{\tau}$  が  $p(\bar{t}, \bar{x}, \tau, \bar{\xi}) = 0$  の多重特性根なら  $\nabla p(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = 0$ .  
 $\bar{\tau}$  が重複度3以上の特性根なら  $\nabla^2 p(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = O(\implies F_p = 0)$ .

$\exists \delta_i > 0, \exists U (x = 0 \text{ の近傍})$  s.t.  $\forall (t, x) \in (-\delta_1, \delta_2) \times U, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$  で  $p(t, x, \tau, \xi) = 0 (\xi \neq 0)$  の特性根は実  $\implies ([0, \delta_2) \times U) \times \mathbb{R}^n$  上の危点の実効的雙曲型ならそれは2重特性根.  $\implies$  2階の作用素に帰着. この場合は1980年代までに、予想は肯定的に解決.

注意:  $P = D_t^2 - ((t-x)^2 + x^3)D_x^2$  は上記実根条件を満たさない

- ▶ Ivrii 自身が用いた「発展作用素の作用素冪を用いる方法」を  
発展させたアプローチ (Iwasaki)
- ▶ 擬微分作用素の重み付きエネルギー法 (Nishitani)
- ▶ 特異性の伝播を用いる方法 (有限次元を除いた可解性の  
み)(Melrose)

## 2 階実効的雙曲型作用素の例

$$P = D_t^2 - a(t, x)D_x^2, \quad a(t, x) \geq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

$P$  が実効的雙曲型  $\iff a(t, x) = 0$  なら  $\partial_t^2 a(t, x) \neq 0$ .

(a):  $n \geq 2$  とし  $q_i, r_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) を正数として

$$P = D_t^2 - (\sum_{i=1}^{n-1} q_i (x_{i-1} - x_i)^2 D_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} r_i D_i^2) \quad (x_0 = t).$$

$P$  が実効的雙曲型  $\iff r_i$  が  $\sum_{i=1}^{n-1} r_i^{-1} > 1$ .

(b):  $P$  は滑らかな実数値関数を係数にもつ 1 階の微分作用素の積

$$P = (D_t - \sum_{j=1}^n b_{1j}(t, x)D_j)(D_t - \sum_{j=1}^n b_{2j}(t, x)D_j).$$

$P$  が実効的雙曲型  $\iff p_i(x, \xi) = \tau - \sum_{j=1}^n b_{ij}(t, x)\xi_j$  とおくとき  
 $p_1(\rho) = p_2(\rho) = 0$  なら  $\{p_1, p_2\}(\rho) = \langle \nabla p_2, \nabla^\sigma p_1 \rangle \neq 0$ .

## 最終的な解決：3重特性根の場合

### Lemma

$\forall (t, x, \xi) \in ([0, \delta'] \times U') \times \mathbb{R}^n$  に対し  $p(t, x, \tau, \xi) = 0$  の特性根はすべて実とする.  $\bar{\tau}$  が  $p(\bar{t}, \bar{x}, \tau, \bar{\xi}) = 0$ ,  $(\bar{t}, \bar{x}) \in ([0, \delta'] \times U')$  の重複度 4 以上の特性根なら  $\nabla^2 p(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi}) = 0$  ( $\implies F_p = 0$ ).

Lemma より危点を実効的雙曲型なら 2重または 3重特性根である. 高々 3重特性根を持つ実効的雙曲型作用素の場合に  $C^\infty$  適切性を示す  $\implies$  Ivrii の予想の完全解決

- ▶ 本質的に 3階の作用素に帰着される.
- ▶ 危点  $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\tau}, \bar{\xi})$  が実効的雙曲型でかつ  $\bar{\tau}$  が 3重特性根なら  $\bar{t} = 0$  で, さらに  $t < 0$  で必ず非実の特性根を持つ.
- ▶ regularity loss があるので超局所的エネルギー評価を通常の単位分解で寄せ集めることはできない (2重特性根の場合も同様).

## 3階の実効的雙曲型作用素

$$P = D_t^3 + \sum_{j=1}^3 a_j(t, x, D) \langle D \rangle^j D_t^{3-j}, \quad \langle D \rangle = \sqrt{1 + |D|^2}.$$

初期面を変えない座標変換で  $a_1(t, x, D) = 0$  と仮定できる.

$$\text{主シンボル: } p(t, x, \tau, \xi) = \tau^3 - a(t, x, \xi) \langle \xi \rangle^2 \tau + b(t, x, \xi) \langle \xi \rangle^3$$

$$\text{仮定 } \begin{cases} \Delta = 4a(t, x, \xi)^3 - 27b(t, x, \xi)^2 \geq 0, & (t, x, \xi) \in [0, T) \times U \times \mathbb{R}^n \\ \text{任意の危点 } (0, 0, \tau, \xi), |(\tau, \xi)| \neq 0 \text{ で } F_p \text{ は非零の実固有値.} \end{cases}$$

以下  $(0, 0, \tau, \xi)$  は危点で  $\tau$  は3重特性根とする  $\implies \tau = 0$ .

危点  $(0, 0, 0, \bar{\xi})$  が実効的雙曲型  $\iff \partial_t a(0, 0, 0, \bar{\xi}) \neq 0 \implies$

$$a = e(t, x, \xi)(t + \alpha(x, \xi)), \quad e > 0, \alpha \geq 0.$$

### 3 階の実効的雙曲型作用素の例

$a = e(t, x, \xi)(t + \alpha(x, \xi))$ ,  $e > 0$ ,  $\alpha \geq 0$  で

$\Delta = 4a^3 - 27b^2 \geq 0$ ,  $t \geq 0 \implies$  実効的雙曲型作用素.

例:  $p = (\tau^2 - t|\xi|^2)\tau = (\text{Tricomi 作用素}) \times \tau$ ,  $\Delta(p) = 4t^3$ ,

例:  $\tilde{p} = \tau^3 - (t + \alpha^2(x))\xi^2\tau + (t^m/2 - t)\alpha(x)\xi^3$ ,  $\alpha(0) = 0$

ここで  $\Delta(\tilde{p}) = (t - 2\alpha^2)^2(4t + \alpha^2) + 27t^{m+1}\alpha^2(1 - t^{m-1}/4)$ ,

$\Delta(\tilde{p}) > 0$  for  $0 < t \leq 1$  ( $\implies 0 < t \leq 1$  で狭義雙曲型).

$t = 2\alpha^2(x)$  のとき

$$\Delta(\tilde{p}) = 27 \cdot 2^{m+1} \alpha^{2(m+2)} (1 - 2^{m-3} \alpha^{2(m-1)}) = 27 \cdot t^{m+2} (1 - t^{m-1}/4)/2$$

いかなる  $l$  についても  $\Delta(\tilde{p}) \geq Ct^l$  とはできない.

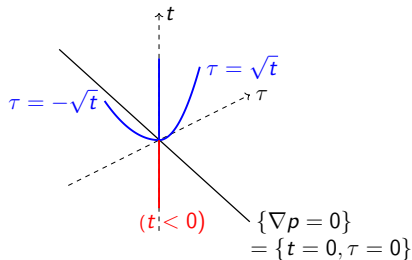
$p = (\tau^2 - t\xi^2)\tau$  のときの

Hamilton 方程式

$\frac{d}{ds}(X, \Xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \Xi}, -\frac{\partial p}{\partial X}\right)$  の軌道

$p = 0$  の特性根  $\tau = 0$ ,  $\tau = \pm\sqrt{t}|\xi|$

$$F_p(0, 0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 証明のアイデア (対称化行列の対角化)

$$P = D_t^3 - (a(t, x, D) + e\langle D \rangle^{-1})\langle D \rangle^2 D_t + b(t, x, D)\langle D \rangle^3 + e\langle D \rangle D_t + \text{低階}$$

$$a(t, x, D) + e\langle D \rangle^{-1} \rightarrow a(t, x, D) \text{ と書く } \rightarrow a = e(t + \alpha + \langle \xi \rangle^{-1}).$$

$$U = {}^t(\langle D \rangle^2 u, \langle D \rangle D_t u, D_t^2 u) \text{ とおくと}$$

$$Pu = f \implies D_t U = A(t, x, D)\langle D \rangle U + B(t, x, D)U + F$$

$$A(t, x, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & a & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t, x, \xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 + e & b_0 \end{bmatrix}$$

$$S(t, x, \xi) = \begin{bmatrix} a^2 & 3b & -a \\ 3b & 2a & 0 \\ -a & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\Leftarrow p \text{ と } q = \partial p / \partial \tau \text{ の Bézout 行列})$$

$$(p(\tau)q(\zeta) - p(\zeta)q(\tau)) / (\tau - \zeta) = \sum_{i,j=1}^3 s_{ij} \tau^{i-1} \zeta^{j-1}, \quad S = (s_{ij})$$

$S$  は正定値対称行列 ( $\det S = \Delta(p)$ ,  $|\xi| \rightarrow \infty$  で退化) で  $SA$  は対称  
対称化行列  $S$  をさらに対角化する.

$T^{-1}ST = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ,  $T$ : 直交行列 ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ).

$T = \text{op}(T)$  とかき  $V = T^{-1}U$  とおくと

$$D_t V = \tilde{A}(t, x, D) \langle D \rangle V + \tilde{B}(t, x, D) V,$$

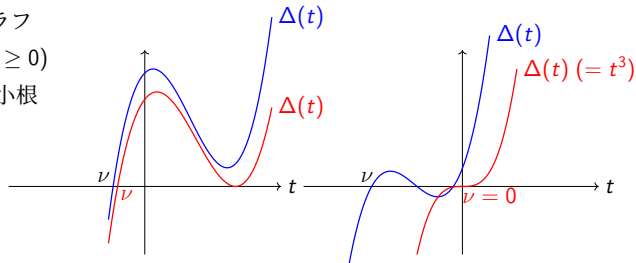
$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}A[\langle D \rangle, T] + T^{-1}BT - T^{-1}D_t T$$

$\Lambda$  は  $\tilde{A}$  の対称化行列, すなわち  $\Lambda \tilde{A}$  は対称行列.

$$\Delta/a \lesssim \lambda_1 \lesssim a^2, \quad \lambda_2 \simeq a, \quad \lambda_3 \simeq 1, \quad (t \geq 0) \quad (\star)$$

$a = e(t + \alpha + \langle \xi \rangle^{-1})$  と  $\Delta = 4a^3 - 27b^2 \geq 0 \implies \Delta \approx t$  の 3 次多項式  
 $\implies \Delta/a \approx t$  の 2 次多項式.

$\Delta(t)$  のグラフ  
 $\Delta(t) \geq 0 \ (t \geq 0)$   
 $\nu$  は実の最小根



$\Delta(t)/t \gtrsim c \min \{t^2, (t - \psi)^2\}$  を満たす  $\psi$  を探す

Weight  $\omega$ ,  $\phi$  の定義

$\rho = \alpha + \langle \xi \rangle^{-1}$  とおく ( $a = e(t + \rho)$ ).

$$\Delta \approx t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = (t - \nu)((t + (\nu + a_1)/2)^2 - D).$$

$(\nu + a_1)/2 < \exists c_1 \rho \implies |\nu - \nu_j| > \exists c_2 \rho$  ( $\nu_j$  は  $\Delta = 0$  の他の 2 根)

$$\implies \begin{cases} \psi := -\chi\left(\frac{\nu + a_1}{2c_1\rho}\right) \frac{\nu + a_1}{2}, & \chi(s) = 1, s \leq 0, \chi(s) = 0, s \geq 1, \\ \Delta/(t + \rho) \geq \exists c \min\{t^2, (t - \psi)^2\} \end{cases}$$

$\omega^2 = (t - \psi(x, \xi))^2 + \rho \langle \xi \rangle^{-1}$  ( $t \geq 0$ ) と定義する.  $t \geq 0$  で

$$(\lambda_1 \gtrsim) \Delta/a \gtrsim \min\{t^2, \omega^2\} \quad (**)$$

Regularity loss は  $t = 0$  を出発するときと,  $t = \psi$  を通過するとき.

$\phi = t - \psi + \omega = t - \psi + \sqrt{(t - \psi)^2 + \rho\langle\xi\rangle^{-1}}$  とする. このとき  
 $\phi = \rho\langle\xi\rangle^{-1}/(|t - \psi| + \omega)$  ( $t < \psi$ ) また  $\partial\phi/\partial t = \phi/\omega$ .

$$\begin{aligned} \phi &: \rho\langle\xi\rangle^{-1} (t < \psi) \rightarrow \rho^{1/2}\langle\xi\rangle^{-1/2} (t \approx \psi) \rightarrow c > 0 (t > \psi), \\ \phi^{-N} &: \langle\xi\rangle^{2N}(1 + \alpha\langle\xi\rangle)^{-N} \rightarrow \langle\xi\rangle^N(1 + \alpha\langle\xi\rangle)^{-N/2} \rightarrow C > 0 \end{aligned}$$

$t = \psi$  を通り過ぎるとき, 直感的には

$$\|\text{op}(\phi^{-N})u\| \lesssim C \iff u : H^{2N}(t < \psi) \rightarrow H^N(t \approx \psi) \rightarrow L^2(t > \psi)$$

$t = 0$  を出発するとき

$$\begin{aligned} v &= u - \sum_{j=0}^N \partial_t^j u(0, x) t^j / j! \text{ とおくと } v = O(t^{N+1}), P v = O(t^{N-1}) \\ \implies \|t^{-N} v\| \lesssim C, \|v\| \lesssim C &\implies \|u\| \lesssim \|u(0, \cdot)\|_{H^{N+1}} + \|\partial_t u(0, \cdot)\|_{H^N} \end{aligned}$$

$\varphi = t\phi$  とすると

$$\partial_t \varphi^{-N} = -N(1/t + 1/\omega)\varphi^{-N} = -N\kappa\varphi^{-N}$$

$\omega, \phi, \lambda_j$  の評価

$\rho = \alpha + \langle \xi \rangle^{-1}$ ,  $a \approx t + \rho$  であった.  $(*)$ ,  $(**)$   $\implies$

$$|\partial_t \lambda_j| \lesssim \kappa \lambda_j, \quad 1 \lesssim \kappa^2 \lambda_1, \quad 1 \lesssim \kappa a, \quad \lambda_i^{1/2} \lambda_j^{-1/2} \lesssim a^{(j-i)/2} \quad (i \leq j), \quad (t \geq 0)$$

$q(\lambda) := \det(\lambda - S(t, x, \xi))$  とすると  $q(\lambda_j) = 0$  より

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \lambda_j| \lesssim a^{3-j-|\alpha+\beta|/2} \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \lesssim a^{3-j} \langle \xi \rangle^{(|\alpha|-|\beta|)/2}, \quad (j = 1, 2, 3, t \geq 0)$$

$\psi := -\chi((\nu + a_1)/2c_1\rho)(\nu + a_1)/2$  より

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi| \lesssim \rho^{1-|\alpha+\beta|/2} \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \lesssim \rho \langle \xi \rangle^{(|\alpha|-|\beta|)/2}, \quad (t \geq 0)$$

$\psi$  の評価  $\implies$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \omega^s| \lesssim \omega^s \langle \xi \rangle^{(|\alpha|-|\beta|)/2}, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \phi^s| \lesssim \phi^s \langle \xi \rangle^{(|\alpha|-|\beta|)/2}, \quad (t \geq 0)$$

## Weight とエネルギー

$$\begin{aligned} \text{Weighted energy: } \mathcal{E}(u) &= e^{-\theta t} (\text{op}(\Lambda) \text{op}(\varphi^{-N}) V, \text{op}(\varphi^{-N}) V) \\ &= e^{-\theta t} \sum_{j=1}^3 (\text{op}(\lambda_j) \text{op}(\varphi^{-N}) V_j, \text{op}(\varphi^{-N}) V_j) \quad (\theta > 0) \end{aligned}$$

$$\partial_t V = i\tilde{A}\langle D \rangle V + i\tilde{B}V, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \Lambda\tilde{A} \text{ は対称.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &\implies -\theta e^{-\theta t} (\text{op}(\Lambda) \text{op}(\varphi^{-N}) V, \text{op}(\varphi^{-N}) V) \\ &\quad -2Ne^{-\theta t} \text{Re}(\text{op}(\kappa\Lambda) \text{op}(\varphi^{-N}) V, \text{op}(\varphi^{-N}) V) \\ &\quad + e^{-\theta t} (\text{op}(\partial_t \Lambda) \text{op}(\varphi^{-N}) V, \text{op}(\varphi^{-N}) V) \\ &\quad + 2e^{-\theta t} \text{Re}(\text{op}(\Lambda) \text{op}(\varphi^{-N}) (i\tilde{A}\langle D \rangle V + i\tilde{B}V), \text{op}(\varphi^{-N}) V) \end{aligned}$$

## シンボルレベルでの計算例

$$|\partial_t \lambda_j| \lesssim \kappa \lambda_j, \quad 1 \lesssim \kappa^2 \lambda_1, \quad 1 \lesssim \kappa a, \quad \lambda_i^{1/2} \lambda_j^{-1/2} \lesssim a^{(j-i)/2} (i \leq j) \quad (\Leftarrow (*), (**))$$

$$W = \text{op}(\varphi^{-N})V, \quad |\partial_t \lambda_j| \lesssim \kappa \lambda_j \implies |((\partial_t \Lambda)W, W)| \lesssim ((\kappa \Lambda)W, W),$$

$$\Lambda \tilde{A} \text{ 対称} \implies |(i\Lambda \tilde{A} \langle D \rangle W, W)| \lesssim \|W\|^2,$$

$$\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}), \quad |(\Lambda \tilde{B} W, W)| = |\Sigma \lambda_i \tilde{b}_{ij} W_j \cdot \bar{W}_i|$$

$$|\Sigma_{i \leq j} \lambda_i \tilde{b}_{ij} W_j \cdot \bar{W}_i| = |\Sigma_{i \leq j} \tilde{b}_{ij} \lambda_i^{1/2} \lambda_j^{-1/2} (\lambda_j^{1/2} W_j) \cdot (\lambda_i^{1/2} \bar{W}_i)|$$

$$\lesssim \Sigma_{j=1}^3 |\lambda_j^{1/2} W_j|^2 \lesssim (\Lambda W, W), \quad |\tilde{b}_{ij}| \lesssim a^{(i-j)/2},$$

$$|\lambda_3 \tilde{b}_{31} W_1 \cdot \bar{W}_3| \lesssim |\lambda_1^{1/2} \lambda_1^{-1/2} \tilde{b}_{31} W_1 \cdot \bar{W}_3| \lesssim |\lambda_1^{1/2} \kappa \tilde{b}_{31} W_1 \cdot \bar{W}_3|$$

$$\lesssim |(\kappa \lambda_1)^{1/2} \tilde{b}_{31} W_1| |(\kappa \lambda_3)^{1/2} W_3| \lesssim ((\kappa \Lambda)W, W), \quad |\tilde{b}_{31}| \lesssim C,$$

$$|\lambda_2 \tilde{b}_{21} W_1 \cdot \bar{W}_2| \lesssim |\lambda_1^{1/2} \lambda_1^{-1/2} \lambda_2^{1/2} \tilde{b}_{21} W_1 \cdot \lambda_2^{1/2} \bar{W}_2|$$

$$\lesssim |(\kappa \lambda_1)^{1/2} a^{1/2} \tilde{b}_{21} W_1| |(\kappa \lambda_2)^{1/2} W_2| \lesssim ((\kappa \Lambda)W, W), \quad |a^{1/2} \tilde{b}_{21}| \lesssim C$$

$S_{\rho,\delta}^m$  calculus の復習と Weyl calculus

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^m \langle \xi \rangle^{\delta|\alpha| - \rho|\beta|} \stackrel{\text{def}}{\iff} a \in S_{\rho,\delta}^m,$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \lesssim m(x, \xi) \langle \xi \rangle^{\delta|\alpha| - \rho|\beta|} \stackrel{\text{def}}{\iff} a \in S(m, g_{\rho,\delta})$$

$a_i \in S(m_i, g_{\rho,\delta})$ ,  $\langle \xi \rangle^{-l_i} / C \leq m_i \leq C \langle \xi \rangle^{l_i}$  とする.  $a_i \in S_{\rho,\delta}^{l_i}$  で  
 $\text{op}(a_1)\text{op}(a_2) = \text{op}(a_1 \# a_2)$

$$a_1 \# a_2 = \sum_{|\alpha+\beta| < N} \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|} \alpha! \beta!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_1 \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_2 + R_N,$$

$$\sum \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_1 \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_2 \in S(m_1 m_2, g_{\rho,\delta}), \quad R_N \in S_{\rho,\delta}^{\ell_1 + \ell_2 - (\rho - \delta)N},$$

$$N(\rho - \delta) \geq 2(\ell_1 + \ell_2) \implies S_{\rho,\delta}^{\ell_1 + \ell_2 - N(\rho - \delta)} \subset S_{\rho,\delta}^{-\ell_1 - \ell_2} \subset S(m_1 m_2, g_{\rho,\delta})$$

$$\rho = \delta (= 1/2) \text{ のとき } R_N \in S_{1/2,1/2}^{\ell_1 + \ell_2} \implies a_1 \# a_2 \in S_{1/2,1/2}^{\ell_1 + \ell_2}.$$

Weyl calculus の応用:

$$a \in S(m, \bar{g}) \stackrel{\text{def}}{\iff} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \lesssim m(x, \xi) M^{-|\alpha+\beta|} \langle \xi \rangle^{(|\alpha|-|\beta|)/2},$$

$$m/C \leq a \in S(m, \bar{g}) \implies a^{-1} \in S(m^{-1}, \bar{g}).$$

$$\bar{g}_X(Y) = M^{-2}(\langle \xi \rangle |y|^2 + \langle \xi \rangle^{-1} |\eta|^2), \quad X = (x, \xi), \quad Y = (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

$$m(x, \xi) > 0 \text{ が } \bar{g}\text{-admissible} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists C, \exists N > 0 \text{ (} M \text{ によらない)}$$

$$m(X) \leq Cm(Y)(1 + \max\{\bar{g}_Y(X - Y), \bar{g}_X(X - Y)\})^N, \quad \forall X, \forall Y$$

( $t$  を含む場合は  $t \geq 0$  について一様に)

$$m, m_i : \bar{g}\text{-admissible}, \quad s \in \mathbb{R} \implies m^s, m_1 m_2, m_1 + m_2 : \bar{g}\text{-admissible},$$

$$a_i \in S(m_i, \bar{g}), \quad m_i : \bar{g}\text{-admissible} \implies a_1 \# a_2 \in S(m_1 m_2, \bar{g})$$

$$\lambda = \omega, \rho, \phi, \lambda_j, \kappa, a \text{ のとき } \lambda \text{ は } \bar{g}\text{-admissible weight かつ } \lambda \in S(\lambda, \bar{g})$$

$$\lambda_j \in S(a^{3-j}, \bar{g}), \quad \partial_t \lambda_j \in S(\kappa \lambda_j, \bar{g})$$

## 作用素レベルでの計算例

## Lemma

$m$  は  $\bar{g}$ -admissible で  $m \in S(m, \bar{g}) \implies \exists k \in S(M^{-1}, \bar{g})$  ( $M \geq \exists M_0$ )  
 $m \# m^{-1} \# (1 + k) = 1$ ,  $(1 + k) \# m \# m^{-1} = 1$ ,  $m^{-1} \# (1 + k) \# m = 1$ .

$\partial_t \lambda_j \in S(\kappa \lambda_j, \bar{g})$  であったから

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_j &= \overbrace{(\kappa \lambda_j)^{1/2} \# (1 + k_1) \# (\kappa \lambda_j)^{-1/2}}^{=1} \# \partial_t \lambda_j \# \overbrace{(\kappa \lambda_j)^{-1/2} \# (1 + k_2) \# (\kappa \lambda_j)^{1/2}}^{=1} \\ a &= (1 + k_1) \# (\kappa \lambda_j)^{-1/2} \# \partial_t \lambda_j \# (\kappa \lambda_j)^{-1/2} \# (1 + k_2) \in S(1, \bar{g}), \\ |(\text{op}(\partial_t \lambda_j)u, u)| &= |(\text{op}(a)\text{op}((\kappa \lambda_j)^{1/2})u, \text{op}((\kappa \lambda_j)^{1/2})u)| \\ &\leq C \|\text{op}((\kappa \lambda_j)^{1/2})u\|^2, \\ (\kappa \lambda_j)^{1/2} \# (\kappa \lambda_j)^{1/2} &= \kappa \lambda_j + S(M^{-1} \kappa \lambda_j, \bar{g}) \implies \\ \|\text{op}((\kappa \lambda_j)^{1/2})u\|^2 &\leq (\text{op}(\kappa \lambda_j)u, u) + CM^{-1} \|\text{op}((\kappa \lambda_j)^{1/2})u\|^2. \end{aligned}$$

$b \in S(1, \bar{g})$  とする.

$$b = \overbrace{(\kappa\lambda_3)^{1/2} \# (1+k) \# (\kappa\lambda_3)^{-1/2}}^{=1} \# b \# \overbrace{(\kappa\lambda_1)^{-1/2} \# (1+\tilde{k}) \# (\kappa\lambda_1)^{1/2}}^{=1}$$

とかく.  $\tilde{b} = (1+k) \# (\kappa\lambda_3)^{-1/2} \# b \# (\kappa\lambda_1)^{-1/2} \# (1+\tilde{k})$  とすると  
 $1 \lesssim \kappa^2 \lambda_1$  より  $\tilde{b} \in S(\kappa^{-1} \lambda_1^{-1/2}, \bar{g}) \subset S(1, \bar{g})$ . ゆえに

$$\begin{aligned} |(\text{op}(b)W_1, W_3)| &\lesssim \|\text{op}((\kappa\lambda_3)^{1/2})\text{op}(\tilde{b})\text{op}((\kappa\lambda_1)^{1/2})W_1, W_3\| \\ &\lesssim \|\text{op}(\tilde{b})\text{op}((\kappa\lambda_1)^{1/2})W_1\| \|\text{op}((\kappa\lambda_3)^{1/2})W_3\| \\ &\lesssim \|\text{op}((\kappa\lambda_1)^{1/2})W_1\| \|\text{op}((\kappa\lambda_3)^{1/2})W_3\| \lesssim \sum_{j=1}^3 \|\text{op}((\kappa\lambda_j)^{1/2})W_j\|^2 \\ &\lesssim \sum_{j=1}^3 (\text{op}(\kappa\lambda_j)W_j, W_j) = (\text{op}(\kappa\Lambda)W, W). \end{aligned}$$

$T^{-1}\partial_t T$  と  $\tilde{B}$ 

$$T = \begin{bmatrix} 1 + O(a) & O(\sqrt{a}) & O(a) \\ O(\sqrt{a}) & 1 + O(a) & O(a^{5/2}) \\ O(a) & O(a^{3/2}) & 1 + O(a) \end{bmatrix}, \quad O(a^s) = S(a^s, \bar{g})$$

$$T^{-1}\partial_t T = \begin{bmatrix} 0 & O(a^{-1/2}) & O(1) \\ O(a^{-1/2}) & 0 & O(a^{1/2}) \\ O(1) & O(a^{1/2}) & 0 \end{bmatrix} = (\tilde{t}_{ij})$$

$$T^{-1}BT = \begin{bmatrix} O(a) & O(a) & O(a) \\ O(a^{3/2}) & O(a^{3/2}) & O(a^{3/2}) \\ b_2 + O(a^{1/2}) & -b_1 - e + O(a^{1/2}) & b_0 + O(a) \end{bmatrix} = (\tilde{b}_{ij})$$

$$[\langle D \rangle, T] = \begin{bmatrix} O(\sqrt{a}) & O(1) & O(\sqrt{a}) \\ O(1) & O(\sqrt{a}) & O(a^2) \\ O(\sqrt{a}) & O(a) & O(\sqrt{a}) \end{bmatrix} = O(1)$$

## 2階実効的雙曲型作用素に関する補足

$\rho(t, x, \tau, \xi) = \tau^2 - a(t, x, \xi)$  は次を満たすとする.

$$a(t, x, \xi) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in [0, \delta) \times U', \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

### Proposition

$\rho = (0, 0, 0, \bar{\xi})$  を  $\rho = 0$  の実効的雙曲型の危点とすると,  $(0, \bar{\xi})$  の錐近傍  $V$  で定義される滑らかで斉次0次の  $\phi(x, \xi)$  と正数  $0 < \kappa < 1, c > 0, \delta' > 0$  が存在し,

$$a(t, x, \xi) \geq c \min \{t^2, (t - \phi(x, \xi))^2\} |\xi|^2, \quad \{\phi, a\}^2 \leq 4\kappa a$$

が  $(t, x, \xi) \in [0, \delta') \times V$  で成立する.