$\exp(S^{\kappa}_{\rho,\delta})$ 型 Gevrey 擬微分作用素について

1 $S_{\rho,\delta}$ 型 Gevrey シンボルの almost analytic extension

$\exp(S^{\kappa}_{\rho,\delta})$ 型の Gevrey シンボルを持つ擬微分作用素の合成を簡潔に表現するにはシンボルなどを複素変数にまで拡張しておくのが便利である．そのために $S_{\rho,\delta}$ 型の Gevrey シンボルの almost analytic extension を導入する．またこの複素変数に拡張されたシンボルのクラスでの陰関数定理も準備する．

1.1 合成関数の評価のための補題

以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ で自然数の全体を表し，$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ とする．最初に (global) な Gevrey クラスを導入する．

定義 1.1. $s > 1$ とし Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．正数 A, C が存在し

$$|\partial_x^\alpha f(x)| \le CA^{|\alpha|}|\alpha|!^s, \quad x \in \Omega, \ \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

が成立する $f(x) \in C^\infty(\Omega)$ を s 次の Gevrey 関数といい，この様な関数の全体を $G^{(s)}(\Omega)$ で表す．$G_0^{(s)}(\Omega) = G^{(s)}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$ とおく．

この節では Gevrey クラスの評価をもつ関数の合成関数に関する評価に有用ないくつかの補題を証明する．任意の $0 < \delta \le 1$ に対して $0 < L \le 1$ を

$$\Big(5 + 8\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{(j+1)^2}\Big)L \le \delta$$

が成立するように一つ選び $s \ge 1$ に対して

$$\Gamma_s(k) = L\frac{k!^s}{k^{s+2}}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

とおく．ただし $\Gamma_s(0) = L$ と約束する．$A_1 > 0$ を正数とするとき $A_2 \ge 2^{s+2}L^{-1}A_1$ と選ぶと

$$A_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s \le A_2^{|\alpha|}\Gamma_s(|\alpha|), \quad |\alpha| \ge 1$$

に注意する．したがって定義 1.1 で $|\alpha|!^s$ を $\Gamma_s(|\alpha|)$ で置き換えてもよい．

補題 1.1. 次が成立する．

(i) 任意の $p,\, q \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \Gamma_s(|\alpha'|+p+1)\Gamma_s(|\alpha''|+q+1) \le \delta\, \Gamma_s(|\alpha|+p+q+1).$$

(ii) 任意の $p \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \Gamma_s(|\alpha'|+p)\Gamma_s(|\alpha''|) \le \delta\, \Gamma_s(|\alpha|+p).$$

Proof. (i) を示すには

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \Gamma_s(|\alpha'|+p+1)\Gamma_s(|\alpha''|+q+1)/\Gamma_s(|\alpha|+p+q+1) \\
&= L \sum_{j=0}^{|\alpha|} \sum_{|\alpha'|=j} \binom{\alpha}{\alpha'} \frac{(|\alpha'|+p)!^s(|\alpha''|+q)!^s}{(|\alpha|+p+q)!^s} \Big\{ \frac{|\alpha|+p+q+1}{(|\alpha'|+p+1)(|\alpha''|+q+1)} \Big\}^2 \\
&\le L \sum_{j=0}^{|\alpha|} \binom{|\alpha|}{j} \binom{|\alpha|+p+q}{j+p}^{-s} \left\{ \frac{1}{j+p+1} + \frac{1}{|\alpha|-j+q+1} \right\}^2 \\
&\le 2L \sum_{j=0}^{|\alpha|} \frac{1}{(j+1)^2} \le \delta
\end{aligned}$$

に注意すればよい．次に (ii) を示そう．まず $\Gamma_s(p)\Gamma_s(|\alpha|)/\Gamma_s(|\alpha|+p) \le 4L$ より

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha''} \Gamma_s(|\alpha'|+p)\Gamma_s(|\alpha''|)/\Gamma_s(|\alpha|+p) \\
&\le 5L + L \sum_{j=1}^{|\alpha|-1} \sum_{|\alpha''|=j} \binom{\alpha}{\alpha''} \frac{(|\alpha'|+p)!^s(|\alpha''|-1)!^s}{(|\alpha|+p-1)!^s} \cdot \frac{(|\alpha|+p)^2}{(|\alpha'|+p)^{s+2}|\alpha''|^2}
\end{aligned}$$

と評価される．さらにこれは

$$\begin{aligned}
&\le 5L + L \sum_{j=1}^{|\alpha|-1} \binom{|\alpha|}{j} \binom{|\alpha|+p-1}{j-1}^{-s} \left\{ \frac{1}{j} + \frac{1}{|\alpha|-j+p} \right\}^2 \frac{1}{(|\alpha|-j+p)^s} \\
&\le 5L + L \sum_{j=1}^{|\alpha|-1} \binom{|\alpha|}{j} \frac{1}{|\alpha|-j+p} \binom{|\alpha|+p-1}{j-1}^{-1} \left\{ \frac{1}{j} + \frac{1}{|\alpha|-j} \right\}^2 \\
&\le 5L + L \sum_{j=1}^{|\alpha|-1} \left\{ \frac{1}{j} + \frac{1}{|\alpha|-j} \right\}^3 \le 5L + 8L \sum_{j=1}^{|\alpha|-1} \frac{1}{j^2} \le \delta
\end{aligned}$$

と評価される． □

以下，一般にベクトル値関数 $A(x)=(A_1(x),\dots,A_l(x))$ に対して $A^\alpha(x)$ は

$$A^\alpha(x)=A_1^{\alpha_1}(x)\cdots A_l^{\alpha_l}(x)),\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^l$$

を表すものとする．

補題 1.2. $V\subset\mathbb{R}^L$ は開集合で $A(x)=(A_1(x),\dots,A_L(x))$, $A_i(x)>0$, $x=(x_1,\dots,x_L)\in U$ とする．$f_j(x)\in C^\infty(U)$, $j=1,2$ が

$$|\partial_x^\alpha f_j(x)|\le C_j(x)A^\alpha(x)\Gamma_s(|\alpha|),\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^L,\ \ x\in U,\ \ j=1,2$$

を満たすとする．このとき

$$|\partial_x^\alpha(f_1(x)f_2(x))|\le C_1(x)C_2(x)A^\alpha(x)\Gamma_s(|\alpha|),\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^L,\ \ x\in U$$

が成立する．

Proof. Leibniz の公式と補題 1.1 から容易に従う． □

補題 1.3. $U\subset\mathbb{R}^L$, $V\subset\mathbb{R}^N$ を開集合とする．$A(x)=(A_1(x),\dots,A_L(x))$, $A_i(x)>0$, $x=(x_1,\dots,x_L)\in U$, $B(y)=(B_1(y),\dots,B_N(y))$, $B_i(y)>0$, $y=(y_1,\dots,y_N)\in V$ とし $f_j(x)\in C^\infty(U)$, $j=1,\dots,N$ と $u(y)\in C^\infty(V)$ は $x\in U$ のとき $f(x)=(f_1(x),\dots,f_N(x))\in V$ でさらに

$$|\partial_x^\alpha f_j(x)|\le C_j(x)A^\alpha(x)\Gamma_s(|\alpha|-1),\ \ |\alpha|\ge1,\ \ \alpha\in\mathbb{N}_0^L,\ \ x\in U,\ \ 1\le j\le N,$$
$$|\partial_y^\alpha u(y)|\le C(y)B^\alpha(y)\Gamma_s(|\alpha|-1),\quad |\alpha|\ge1,\ \ \alpha\in\mathbb{N}_0^N,\ \ y\in V$$

を満たすとする．いま $d(x,y)$ を

$$d(x,y)=\sum_{j=1}^N C_j(x)B_j(y)$$

とおくと $u(f(x))$ に対して $|\gamma|\ge1$ のとき $x\in U$ で

$$|\partial_x^\gamma u(f(x))|\le C(f(x))2^{|\gamma|}d(x,f(x))(1+d(x,f(x)))^{|\gamma|-1}A^\gamma(x)\Gamma_s(|\gamma|-1)$$

が成り立つ．

Proof. Y_k を $Y_k=\partial/\partial x_k+\sum_{i=1}^N(\partial f_i(x)/\partial x_k)\partial/\partial y_i$, $k=1,\dots,L$ とする．また $I=(i_1,\dots,i_p)\in\{1,\dots,n\}^p$ に対し $|I|=p$ と書き $Y^I=Y_{i_1}\cdots Y_{i_p}$ および $A^I(x)=A_{i_1}(x)\cdots A_{i_p}(x)$ と書くことにする．p に関する帰納法で

$$\begin{gathered}|\partial_x^\alpha\partial_z^\beta Y^I u(y)|\le\sum_{j=1}^{|I|}C_{\alpha,j}^I(x,y)d(x,y)^jA^\alpha(x)B^\beta(y)\Gamma_s(|\beta|+j-1),\\ C_{\alpha,j}^I(x,y)\le C(y)2^{|I|}A^I(x)\Gamma_s(|\alpha|+|I|-j),\quad I\in\{1,\dots,n\}^p\end{gathered}\tag{1.1}$$

を満たす $C^I_{\alpha,j}(x,y)$ の存在することを示そう．e_i で第 i 成分が 1 の $\mathbb{R}^L$ の単位ベクトルを表すことにすると

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_x^\alpha \partial_z^\beta Y_k u(y)\right| \leq \sum_i \left|\partial_x^{\alpha+e_k} f_i(x) \partial_z^{\beta+e_i} u(y)\right| \\
&\leq \sum_i C_i(x) A^{\alpha+e_k}(x) \Gamma_s(|\alpha+e_k|-1) C(y) B^{\beta+e_i}(y) \Gamma_s(|\beta+e_i|-1) \\
&= C(y)\Gamma_s(|\alpha|) A_k(x) \big(\sum_i C_i(x) B_i(y)\big) A^\alpha(x) B^\beta(y) \Gamma_s(|\beta|)
\end{aligned}$$

が成り立つので $p=1$, $I=(k)$ のとき $C^I_{\alpha,j}(x,y) = C(y)A^I(x)\Gamma_s(|\alpha|+1-j)$ と選べばよい．(1.1) が $p \in \mathbb{N}$ で成り立っているとする．$I=(i_1,\dots,i_p,k) \in \{1,\dots,n\}^{p+1}$, $J=(i_1,\dots,i_p)$ として

$$\begin{aligned}
\partial_x^\alpha \partial_z^\beta Y_k Y^J u(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \partial_x^{\alpha'+e_k} f_i(x) \partial_x^{\alpha''} \partial_z^{\beta+e_i} Y^J u(y) \\
+\partial_x^{\alpha+e_k} \partial_z^\beta Y^J u(y)
\end{aligned}$$

を考えよう．帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_x^\alpha \partial_z^\beta Y_k Y^J u(y)\right| \leq \sum_{i,\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} C_i(x) A^{\alpha'+e_k}(x) \Gamma_s(|\alpha'|) \\
&\times \sum_{j=1}^p C^J_{\alpha'',j}(x,y) d(x,y)^j A^{\alpha''}(x) B^{\beta+e_i}(y) \Gamma_s(|\beta+e_i|+j-1) \\
&+\sum_{j=1}^p C^J_{\alpha+e_k,j}(x,y) A^{e_k}(x) d(x,y)^j A^\alpha(x) B^\beta(y) \Gamma_s(|\beta|+j-1)
\end{aligned}$$

と評価される．右辺はさらに

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \big(\sum_i C_i(x) B_i(y)\big) A^{\alpha'+e_k}(x) \Gamma_s(|\alpha'|) \\
&\times \sum_{j=2}^{p+1} C^J_{\alpha'',j-1}(x,y) d^{j-1}(x,y) A^{\alpha''}(x) B^\beta(y) \Gamma_s(|\beta|+j-1) \\
&+\sum_{j=1}^p C^J_{\alpha+e_k,j}(x,y) A^{e_k}(x) d^j(x,z) A^\alpha(x) B^\beta(y) \Gamma_s(|\beta|+j-1) \\
&\leq \sum_{j=1}^{p+1} \Big(\sum_{\alpha'} \binom{\alpha}{\alpha'} A^{e_k}(x) \Gamma_s(|\alpha'|) C^J_{\alpha'',j-1}(x,y) + C^J_{\alpha+e_k,j}(x,y) A^{e_k}(x)\Big) \\
&\times A^\alpha(x) B^\beta(z) d^j(x,y) \Gamma_s(|\beta|+j-1)
\end{aligned}$$

と評価される．従って $C^I_{\alpha,j}(x,y)$ として

$$C^I_{\alpha,j}(x,y) = \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} A_k(x)\Gamma_s(|\alpha'|)C^J_{\alpha'',j-1}(x,y) \\ +C^J_{\alpha+e_k,j}(x,y)A_k(x)$$

とおき補題 1.1 を利用すると

$$C^I_{\alpha,j}(x,y) \le 2^{|J|}\sum \binom{\alpha}{\alpha'} A_k(x)\Gamma_s(|\alpha'|)C(y)A^J(x)\Gamma_s(|\alpha''|+p-j+1) \\ +C(y)2^{|J|}A_kA^J(x)\Gamma_s(|\alpha|+p+1-j) \le C(y)2^{|I|}A^I(x)\Gamma_s(|\alpha|+p+1-j)$$

となって (1.1) が $p+1$ のときも成立する．以上より (1.1) がが示された．いま $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_L)\in\mathbb{N}_0^L$ に対して $I=(i_1,\dots,i_{|\gamma|})\in\{1,\dots,n\}^{|\gamma|}$ を $\gamma_j\neq 0$ なる j について j $(1\le j\le n)$ が丁度 γ_j 個あらわれるように選ぶと

$$\partial_x^\gamma u(f(x)) = (Y^I u(y))_{y=f(x)}$$

であるから (1.1) において $\alpha=0$, $\beta=0$ と選ぶと

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\gamma u(f(x))\right| = \left|(Y^I u(y))_{y=f(x)}\right| &\le \sum_{j=1}^{|\gamma|} C^I_{0,j}(x,f(x))d(x,f(x))^j\Gamma_s(j-1) \\ &\le C(f(x))d(x,f(x))2^{|\gamma|}A^\gamma(x)\sum_{j=1}^{|\gamma|} d(x,f(x))^{j-1}\Gamma_s(|\gamma|-j)\Gamma_s(j-1) \\ &\le C(f(x))2^{|\gamma|}d(x,f(x))(1+d(x,f(x)))^{|\gamma|-1}A^\gamma(x)\sum_{j=1}^{|\gamma|}\Gamma_s(|\gamma|-j)\Gamma_s(j-1) \\ &\le C(f(x))2^{|\gamma|}d(x,f(x))\big(1+d(x,f(x))\big)^{|\gamma|-1}A^\gamma(x)\Gamma_s(|\gamma|-1)\end{aligned}$$

となって望む結果を得る． □

系 1.1. 補題 *1.3* で $C_j(x)=C_j>0, C(y)=C>0$ および $B(y)=(B_1,\dots,B_N)\in\mathbb{R}^N$ とすると $d=\sum_{j=1}^N C_jB_j$ として

$$|\partial_x^\gamma u(f(x))| \le C2^{|\gamma|}(1+d)^{|\gamma|}A^\gamma(x)\Gamma_s(|\gamma|-1), \quad |\gamma|\ge 1$$

が成り立つ．

補題 1.4. $U\subset\mathbb{R}^L$, $V\subset\mathbb{R}^N$ を開集合とする．$A_i(x)=(A_{i1}(x),\dots,A_{iL}(x))$, $A_{ij}(x)>0$, $i=1,2$, $D(x)=(D_1(x),\dots,D_N(x))$, $D_j(x)>0$, $x=(x_1,\dots,x_L)\in U$ とし $f_j(x)\in C^\infty(U)$, $j=1,\dots,N$ と $F(x,y)\in C^\infty(U\times V)$ は $x\in U$ のとき $f(x)=(f_1(x),\dots,f_N(x))\in V$ でさらに次を満たすとする．

$$|\partial_x^\alpha f_j(x)| \le C_j(x)A_1^\alpha(x)\Gamma_s(|\alpha|-1), \;\; |\alpha|\ge 1, \;\; x\in U, \;\; j=1,\dots,N,$$

$$\left|F^{(\gamma)}_{(\alpha)}(x,f(x))\right| \le C(x)A_2^\alpha(x)D^\gamma(x)\Gamma_s(|\alpha|+|\gamma|-1), \;\; |\alpha|+|\gamma|\ge 1, \;\; x\in U.$$

ただしここで $F^{(\gamma)}_{(\alpha)}(x,y)=\partial_x^\alpha\partial_y^\gamma F(x,y)$ である．いま

$$d(x)=\sum_{j=1}^N C_j(x)D_j(x)+\sum_{j=1}^L A_{2j}(x)A_{1j}^{-1}(x) \tag{1.2}$$

とおくとき $d(x)\le 1$ なら $1\le|\alpha+\mu|+|\gamma|$ に対して

$$\left|\partial_x^\mu F^{(\gamma)}_{(\alpha)}(x,f(x))\right|\le C(x)A_2^\alpha(x)D^\gamma(x)A_1^\mu(x)\Gamma_s(|\alpha+\mu|+|\gamma|-1) \tag{1.3}$$

が成立する．一般に

$$\left|\partial_x^\mu F^{(\gamma)}_{(\alpha)}(x,f(x))\right|\le C(x)A_2^\alpha(x)D^\gamma(x)(1+d(x))^{|\mu|}A_1^\mu(x)\Gamma_s(|\alpha+\mu|+|\gamma|-1)$$

が成立する．

Proof. $|\mu|$ に関する帰納法で示そう．$|\mu|=0$ のときは主張は仮定から明らかである．$|\mu|\le k$, $1\le|\alpha+\mu|+|\gamma|$ に対し (1.3) が成立しているとする．$|e|=1$, $e\in\mathbb{N}_0^L$ として

$$\begin{aligned}&\partial_x^\mu\partial_x^e F^{(\gamma)}_{(\alpha)}(x,f(x))\\ &=\sum_{j=1}^N\sum\binom{\mu}{\mu'}\partial_x^{\mu'}F^{(\gamma+e_j)}_{(\alpha)}\partial_x^{\mu''}\partial_x^e f_j(x)+\partial_x^\mu F^{(\gamma)}_{(\alpha+e)}(x,f(x))\end{aligned}$$

を考えよう．いま $|\mu|=k$ とすると仮定から

$$\begin{aligned}|\partial_x^\mu\partial_x^e F^{(\gamma)}_{(\alpha)}(x,f(x))|&\le\sum_j\sum\binom{\mu}{\mu'}C(x)A_2^\alpha(x)D^{\gamma+e_j}(x)A_1^{\mu'}(x)C_j(x)A_1^{\mu''+e}(x)\\ &\times\Gamma_s(|\alpha+\mu'|+|\gamma|)\Gamma_s(|\mu''|)+C(x)A_2^{\alpha+e}(x)D^\gamma(x)A_1^\mu(x)\Gamma_s(|\alpha+\mu|+\gamma|)\end{aligned}$$

と評価しさらに補題 1.1 を利用して

$$\begin{aligned}&\sum\binom{\mu}{\mu'}C(x)\big(\sum_j C_j(x)D_j(x)\big)A_2^\alpha(x)D^\gamma(x)A_1^{\mu+e}(x)\Gamma_s(|\alpha+\mu'|+|\gamma|)\Gamma_s(|\mu''|)\\ &\qquad+C(x)A_2^{\alpha+e}(x)D^\gamma(x)A_1^\mu(x)\Gamma_s(|\alpha+\mu|+|\gamma|)\\ &\le C(x)\big(\sum_j C_j(x)D_j(x)\big)A_2^\alpha(x)D^\gamma(x)A_1^{\mu+e}(x)\Gamma_s(|\alpha+\mu|+|\gamma|)\\ &\qquad+C(x)A_2^{\alpha+e}(x)D^\gamma(x)A_1^\mu(x)\Gamma_s(|\alpha+\mu|+|\gamma|)\\ &=\Big(\sum_j C_j(x)D_j(x)+A_2^e(x)A_1^{-e}(x)\Big)C(x)A_2^\alpha(x)D^\gamma(x)A_1^{\mu+e}(x)\\ &\qquad\times\Gamma_s(|\alpha+\mu+e|+|\gamma|-1)\\ &\le d(x)C(x)A_2^\alpha(x)D^\gamma(x)A_1^{\mu+e}(x)\times\Gamma_s(|\alpha+\mu+e|+|\gamma|-1)\end{aligned}$$

と評価すると (1.2) より (1.3) が $|\mu|=k+1$ に対して成立する．$d(x)$ が一般のときは A_1 を $(1+d(x))A_1$ として議論すればよい． □

系 1.2. $U \subset \mathbb{R}^L$, $V \subset \mathbb{R}^N$, $W \subset \mathbb{R}^K$ を開集合とし $A(x) = (A_1(x), \dots, A_L(x))$, $A_j(x) > 0$, $x = (x_1, \dots, x_L) \in U$ また $B_1(x,y) = (B_{11}(x,y), \dots, B_{1L}(x,y))$, $B_2(x,y) = (B_{21}(x,y), \dots, B_{2N}(x,y))$, $B_{kj}(x,y) > 0$, $y = (y_1, \dots, y_N) \in V$, $D(x,y) = (D_1(x,y), \dots, D_K(x,y))$, $D_j(x,y) > 0$ で $f_j(x) \in C^\infty(U)$, $j = 1, \dots, K$ と $F(x,y,z) \in C^\infty(U \times V \times W)$ は $f(x) = (f_1(x), \dots, f_K(x)) \in W$ $(x \in U)$ でさらに次を満たすとする．

$$\left|\partial_x^\alpha f_j(x)\right| \le C_j(x) A^\alpha(x) \Gamma_s(|\alpha| - 1), \ \ |\alpha| \ge 1, \ \ x \in U, \ \ j = 1, \dots, K,$$

$$\begin{gathered}\left|F_{(\alpha,\beta)}^{(\gamma)}(x,y,f(x))\right| \le C(x,y) B_1^\alpha(x,y) B_2^\beta(x,y) \\ \times D^\gamma(x,y) \Gamma_s(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| - 1), \quad |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \ge 1, \ \ x \in U.\end{gathered}$$

ただしここで $F_{(\alpha,\beta)}^{(\gamma)}(x,y,z) = \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma F(x,y,z)$ である．いま

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^K C_j(x) D_j(x,y) + \sum_{j=1}^N B_{1j}(x,y) A_j^{-1}(x)$$

とおくとき $d(x,y) \le 1$ なら $|\mu + \alpha| + |\beta| + |\gamma| \ge 1$ に対して

$$\begin{gathered}\left|\partial_x^\mu F_{(\alpha,\beta)}^{(\gamma)}(x,y,f(x))\right| \le C(x,y) A_1^\mu(x) B_1^\alpha(x,y) B_2^\beta(x,y) \\ \times D^\gamma(x,y) \Gamma_s(|\mu + \alpha| + |\beta| + |\gamma| - 1)\end{gathered}$$

が成立する．一般に

$$\begin{gathered}\left|\partial_x^\mu F_{(\alpha,\beta)}^{(\gamma)}(x,y,f(x))\right| \le C(x,y)(1 + d(x,y))^{|\mu|} A_1^\mu(x) B_1^\alpha(x,y) \\ \times B_2^\beta(x,y) D^\gamma(x,y) \Gamma_s(|\mu + \alpha| + |\beta| + |\gamma| - 1)\end{gathered}$$

が成り立つ．

Proof. y をパラメーターとして $F_{(0,\beta)}(x,y,z)$ に補題 1.4 を適用すればよい． □

1.2 $S_{\rho,\delta}$ 型の Gevrey シンボル

パラメーター $M \ge 1$ を含む $S_{\rho,\delta}^m$ タイプの Gevrey シンボルを metric

$$g(y,\eta) = \langle\xi\rangle_M^{2\delta} |y|^2 + \langle\xi\rangle_M^{-2\rho} |\eta|^2, \quad \langle\xi\rangle_M = (M^2 + |\xi|^2)^{1/2}$$

を用いて定義する．

定義 1.2. $m = m(\xi)$ を正値関数とする．M に依らないある正数 $C > 0$, $A > 0$ が存在して任意の α, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ に対して

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi;M)| \le C A^{|\alpha+\beta|} |\alpha + \beta|!^s m(\xi) \langle\xi\rangle_M^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}$$

を満たす $p(x,\xi;M) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ の全体を $S_{(s)}(m,g)$ と表す．第 1.1 節で注意したように C, A を取り替えることによって $|\alpha + \beta|!^s$ を $\Gamma_s(|\alpha + \beta|)$ に置き換えてよい．

以下記号を簡略化するためシンボル $p(x,\xi;M)$, $p(x,\xi,y;M)$ などでは M を省略する．

補題 1.5. $p_i(x,\xi)\in S_{(s)}(m_i,g)$, $i=1,2$ とするとき $p_1p_2\in S_{(s)}(m_1m_2,g)$.

Proof. 補題 1.2 から明らか． □

補題 1.6. Ω を $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ の開集合とし $f(z)\in G^{(s)}(\Omega)$ とする．$p(x,\xi)\in S_{(s)}(1,g)$ は $p(x,\xi)\in\Omega$, $(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ を満たすとする．このとき $f(p(x,\xi))\in S_{(s)}(1,g)$ である．

Proof. 系 1.1 から明らか． □

補題 1.7. $f\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa},g)$, $\kappa>0$ とし $\omega_\beta^\alpha=e^{-f}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha e^f$ とおく．このとき $A_i>0$, $C>0$ が存在して次が成立する．

$$\begin{aligned}&\left|\partial_x^\nu\partial_\xi^\mu\omega_\beta^\alpha\right|\le CA_1^{|\nu+\mu|}A_2^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta+\nu|-\rho|\alpha+\mu|}\\&\times\sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|-j)}(|\mu+\nu|+j)!^s,\quad\alpha,\beta,\mu,\nu\in\mathbb{N}_0^n.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Proof. $f\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa},g)$ より

$$\left|\partial_x^\nu\partial_\xi^\mu f\right|\le C_0A_0^{|\mu+\nu|}|\mu+\nu|!^s\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta|\nu|-\rho|\mu|}$$

が成り立っている．$|\alpha+\beta|=0$ なら $\omega_\beta^\alpha=1$ ゆえ (1.4) は任意の $\mu,\nu\in\mathbb{N}_0^n$ について成立する．いま (1.4) が $|\alpha+\beta|\le\ell$, $\forall\mu,\forall\nu\in\mathbb{N}_0^n$ に対して成立すると仮定する．$|e+e'|=1$ $(e,e'\in\mathbb{N}_0^n)$ としよう．$\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta f=f_{(\alpha)}^{(\beta)}$ と書くことにすると

$$\left(\omega_{\beta+e'}^{\alpha+e}\right)_{(\nu)}^{(\mu)}=\left(\omega_\beta^\alpha\right)_{(e'+\nu)}^{(e+\mu)}+\left(f_{(e')}^{(e)}\omega_\beta^\alpha\right)_{(\nu)}^{(\mu)}$$

であるから $|\alpha+\beta|=\ell$ として

$$\begin{aligned}\left|\left(\omega_{\beta+e'}^{\alpha+e}\right)_{(\nu)}^{(\mu)}\right|&\le CA_1^{|\mu+\nu|+1}A_2^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta+\nu+e'|-\rho|\alpha+\mu+e|}\\&\quad\times\sum_{j=1}^{|\alpha+\beta|+1}\langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|+1-j)}(|\mu+\nu|+j)!^s\\+C_0C\sum\binom{\nu}{\nu'}\binom{\mu}{\mu'}&A_0^{|\mu'+\nu'|+1}\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta|\nu'+e'|-\rho|\mu'+e|}|\mu'+\nu'|!^s\\&\quad\times A_1^{|\mu''+\nu''|}A_2^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta+\nu''|-\rho|\alpha+\mu''|}\\&\quad\times\sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|-j)}(|\mu''+\nu''|+j)!^s\end{aligned}$$

と評価される．右辺第 2 項は

$$
\begin{aligned}
C_0CA_2^{|\alpha+\beta|}\sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|+1-j)}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta+\nu+e'|-\rho|\alpha+\mu+e|}& \\
\times\sum\binom{\nu}{\nu'}\binom{\mu}{\mu'}A_0^{|\mu'+\nu'|+1}|\mu'+\nu'|!^sA_1^{|\mu''+\nu''|}(|\mu''+\nu''|+j)!^s& \\
\le C_0CA_2^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta+\nu+e'|-\rho|\alpha+\mu-e|}& \\
\times\sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|+1-j)}\frac{A_0}{A_1-A_0}A_1^{|\mu+\nu|+1}(|\mu+\nu|+j)!^s&
\end{aligned}
$$

と評価される．ここで

$$
\begin{aligned}
&\sum\binom{\nu}{\nu'}\binom{\mu}{\mu'}A_0^{|\mu'+\nu'|+1}|\mu'+\nu'|!^sA_1^{|\mu''+\nu''|}(|\mu''+\nu''|+j)!^s \\
&=A_0A_1^{|\mu+\nu|}\sum_{p=0}^{|\mu+\nu|}(A_0/A_1)^p\binom{|\mu+\nu|}{p}\binom{|\mu+\nu|+j}{p+j}^{-s}(|\mu+\nu|+j)!^s \\
&\le A_0A_1^{|\mu+\nu|}(|\mu+\nu|+j)!^s\sum_{p=0}^{\infty}(A_0/A_1)^p
\end{aligned}
$$

を用いた．したがって A_1 と A_2 を

$$
\frac{C_0A_0A_1}{(A_1-A_0)A_2}+\frac{A_1}{A_2}\le 1
$$

が成立するように選ぶと

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\omega_{\beta+e'}^{\alpha+e}\right)_{(\nu)}^{(\mu)}\right|\le CA_1^{|\mu+\nu|}A_2^{|\alpha+\beta|+1}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta+\nu+e'|-\rho|\alpha+\mu+e|}& \\
\times\sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|+1}\langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|+1-j)}(|\mu+\nu|+j)!^s&
\end{aligned}
$$

となり (1.4) が $|\alpha+\beta|\le\ell+1,\ \forall\mu,\forall\nu\in\mathbb{N}_0^n$ に対して成立することが従う． □

系 1.3. $f\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa},g)$ とする．$A>0,C>0,C'>0$ が存在して次の評価が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha e^f|\le Ce^fA^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}\sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|-j)}j!^s& \\
\le C'A^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^fe^{s\langle\xi\rangle_M^{\kappa/s}}.&
\end{aligned}
$$

従って特に $e^{f(x,\xi)}\in S_{(s)}(e^{c\langle\xi\rangle_M^{\kappa}},g)$ $(c>0)$ である．

Proof. 最初の不等式は (1.4) で $\mu = \nu = 0$ とすれば直ちに得られる．次に任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して $\langle\xi\rangle_M^{\kappa N} \le N!^s e^{s\langle\xi\rangle_M^{\kappa/s}}$ $(s > 0)$ が成立するので $s > 1$ によらない $C > 0$ があって

$$e^{-s\langle\xi\rangle_M^{\kappa/s}} \sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|} \langle\xi\rangle_M^{\kappa(|\alpha+\beta|-j)} j!^s \le \sum_{j=0}^{|\alpha+\beta|} (|\alpha+\beta|-j)!^s j!^s \le C|\alpha+\beta|!^s$$

が従う．これより 2 番目の不等式が従うので $e^f e^{s\langle\xi\rangle_M^{\kappa/s}} \le e^{c\langle\xi\rangle_M^{\kappa}}$ $(c > 0)$ に注意すればよい． □

1.3 $S_{\rho,\delta}$ 型 Gevrey シンボルの almost analytic extension

さて

$$g^\sigma(y,\eta) = \sup_{(\tilde{y},\tilde{\eta})} \frac{|\langle\eta,\tilde{y}\rangle - \langle y,\tilde{\eta}\rangle|^2}{g(\tilde{y},\tilde{\eta})} = \langle\xi\rangle_M^{2\rho}|y|^2 + \langle\xi\rangle_M^{-2\delta}|\eta|^2$$

とおく．$g^\sigma(y,\eta) = \langle\xi\rangle_M^{2\rho-2\delta} g(y,\eta)$ ゆえ $\sup_{y,\eta} g(y,\eta)/g^\sigma(y,\eta) = \langle\xi\rangle_M^{-2\rho+2\delta}$ である．κ を

$$0 < \kappa < \rho - \delta$$

なる正数とし

$$\begin{aligned}
E_\kappa =& \{(x,y,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{4n} \mid g^\sigma(y,\eta) < \langle\xi\rangle_M^{2\kappa}\} \\
&= \{(x+iy,\xi+i\eta) \in \mathbb{C}^{2n} \mid \langle\xi\rangle_M^{2\rho}|y|^2 + \langle\xi\rangle_M^{-2\delta}|\eta|^2 < \langle\xi\rangle_M^{2\kappa}\}, \\
\bar{E}_\kappa =& \{(x,\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{3n} \mid g^\sigma(0,\eta) < \langle\xi\rangle_M^{2\kappa}\} \\
&= \{(x,\xi+i\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \mid x,\xi \in \mathbb{R}^n, |\eta| < \langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}\}, \\
\underline{E}_\kappa =& \{(x,y,\xi) \in \mathbb{R}^{3n} \mid g^\sigma(y,0) < \langle\xi\rangle_M^{2\kappa}\} \\
&= \{(x+iy,\xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n \mid x,\xi \in \mathbb{R}^n, |y| < \langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho}\}
\end{aligned}$$

とおく．したがって $(x,y,\xi,\eta) \in E_\kappa$ のとき $|\eta| < \langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$, $|y| < \langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho}$ である．

定義 1.3. ある $C > 0$, $A > 0$ があって任意の α, $\beta \in {\mathbb{N}_0}^{2n}$ に対して

$$|\partial_{x,y}^\beta \partial_{\xi,\eta}^\alpha a(x,y,\xi,\eta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s \langle\xi\rangle_M^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \ \ (x,y,\xi,\eta) \in E_\kappa$$

を満たす $a(x,y,\xi,\eta) \in C^\infty(E_\kappa)$ の全体を $S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m; E_\kappa)$ と表す．同様にして $S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m; \bar{E}_\kappa)$ を $C > 0$, $A > 0$ が存在して任意の $(x,\xi,\eta) \in \bar{E}_\kappa$，任意の $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in \mathbb{N}^{2n}$ に対して

$$|\partial_x^\beta \partial_{\xi,\eta}^\alpha a(x,\xi,\eta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s \langle\xi\rangle_M^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad (x,\xi,\eta) \in \bar{E}_\kappa$$

を満たす $a(x,\xi,\eta) \in C^\infty(\bar{E}_\kappa)$ の全体として定義する．$S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m; \underline{E}_\kappa)$ も同様に

$$|\partial_{x,y}^\beta \partial_{\xi,\eta}^\alpha a(x,y,\xi)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s \langle\xi\rangle_M^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad (x,y,\xi) \in \underline{E}_\kappa$$

を満たす $a(x,y,\xi) \in C^\infty(\underline{E}_\kappa)$ の全体とする．

任意の $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$ に対し $(x,0,\xi,0)\in E_\kappa$ であるから $a(x,y,\xi,\eta)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m;E_\kappa)$ なら $a(x,0,\xi,0)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ である．

$S^m_{\rho,\delta}$ シンボルの almost analytic extension を定義しよう．$\chi(t)\in G_0^{(s)}(\mathbb{R})$ を $|t|\le 1$ では 1 で $|t|\ge 2$ では 0 とし

$$\chi(x)=\chi(x_1)\chi(x_2)\cdots\chi(x_n)$$

とおく．次に

$$d_j=d_j(B)=Bj^{s-1},\quad j\ge 1,\ \ d_0=1$$

とおき $d_\beta=(d_{\beta_1},\dots,d_{\beta_n})$, $\beta\in\mathbb{N}_0^n$ とする．$B>0$ は後で決める．また

$$\bar\epsilon=\rho-\delta-\kappa>0 \tag{1.5}$$

とおく．補題 1.3 より $C>0,A>0$ があって任意の $b>0$ に対して

$$|\partial_\xi^\alpha\chi(b\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})|\le CA^{|\alpha|}|\alpha|!^s\langle\xi\rangle_M^{-|\alpha|},\quad \alpha\in\mathbb{N}_0^n$$

が成立する．

定義 1.4. $\rho-\delta>\kappa>0$ とする．このとき $p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ の (x,ξ) に関する almost analytic extension $\tilde p(z,\zeta)=\tilde p(x+iy,\xi+i\eta)$ を

$$\tilde p(z,\zeta)=\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{\alpha!\beta!}p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)(iy)^\beta(i\eta)^\alpha\chi(d_\beta\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\chi(d_\alpha\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon}) \tag{1.6}$$

で定義する．$\tilde p(x+iy,\xi+i\eta)$ を $\tilde p(x,y,\xi,\eta)$ とも書く．$\tilde p(x,y,\xi,0)=\tilde p(x,y,\xi)=\tilde p(z,\xi)$ および $\tilde p(x,0,\xi,\eta)=\tilde p(x,\xi,\eta)=\tilde p(x,\zeta)$ でそれぞれ x および ξ に関する almost analytic extension を定義する．κ を明示する必要があるときは almost analytic extension (κ) ということにする．

勿論 $\tilde p(z,\zeta)$ は (z,ζ) が実のときは $p(x,\xi)$ に一致する．すなわち

$$\tilde p(x,0,\xi,0)=p(x,\xi) \tag{1.7}$$

である．また $p(x,\xi)$ が ξ の多項式ならばある M_0 があって $M\ge M_0$ ならば $\tilde p(x,\xi+i\eta)=p(x,\xi+i\eta)$ であることも定義から明らかである．

命題 1.1. $p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ とする．このとき B を適当に選ぶと

$$\tilde p(z,\zeta)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m;E_\kappa) \tag{1.8}$$

である．さらに正数 $c>0$ が存在して

$$\bar\partial_{z_j}\tilde p(z,\zeta)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m+\delta}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{\bar\epsilon/(s-1)}};E_\kappa) \tag{1.9}$$

$$\bar\partial_{\zeta_j}\tilde p(z,\zeta)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-\rho}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{\bar\epsilon/(s-1)}};E_\kappa) \tag{1.10}$$

$$\partial_{\xi_j}\tilde p(z,\zeta)-\widetilde{\partial_{\xi_j}p}(z,\zeta)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-\rho}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{\bar\epsilon/(s-1)}};E_\kappa) \tag{1.11}$$

が成立する．ここで $\bar\partial_{z_j}=(\partial_{x_j}+i\partial_{y_j})/2$, $\bar\partial_{\zeta_j}=(\partial_{\xi_j}+i\partial_{\eta_j})/2$ である．

系 1.4. $\tilde{p}(x+iy,\xi+i\eta)$ を $p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ の almost analytic extention (κ) とする．また $Y(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho},g)$, $H(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta},g)$ で $|Y|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho}$, $|H|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$ とする．このとき $\tilde{p}(x+Y(x,\xi),\xi+H(x,\xi))\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ である．

Proof. $Y=Y_1+iY_2$, $H=H_1+iH_2$ と実部と虚部に分けて書き補題 1.3 を $f=(x+Y_1,Y_2,\xi+H_1,H_2)$, $u=\tilde{p}(x,y,\xi,\eta)$ として適用する．このとき $C_j=\langle\xi\rangle_M^{-\delta}$, $1\le j\le n$, $C_j=\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho}$, $n+1\le j\le 2n$, $C_j=\langle\xi\rangle_M^{\rho}$, $2n+1\le j\le 3n$, $C_j=\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$, $3n+1\le j\le 4n$ および $A=(\langle\xi\rangle_M^{\delta},\dots,\langle\xi\rangle_M^{\delta},\langle\xi\rangle_M^{-\rho},\dots,\langle\xi\rangle_M^{-\rho})$, $B=(\langle\xi\rangle_M^{\delta},\dots,\langle\xi\rangle_M^{\delta},\langle\xi\rangle_M^{\delta},\dots,\langle\xi\rangle_M^{\delta},\langle\xi\rangle_M^{-\rho},\dots,\langle\xi\rangle_M^{-\rho},\langle\xi\rangle_M^{-\rho},\dots,\langle\xi\rangle_M^{-\rho})$ と選びまた命題 1.1 より $C=\langle\xi\rangle_M^m$ と選ぶと補題 1.3 の仮定が満たされる．このとき

$$d(x,\xi,f(x,\xi))=2n(1+\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho+\delta})\le 2n(1+M^{-(\rho-\delta-\kappa)})$$

は有界であるから補題 1.3 より結論を得る． □

条件 (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) を満たす $\tilde{p}(z,\zeta)\in C^\infty(E_\kappa)$ が一意的でないことは明らかである．しかし

命題 1.2. $\tilde{p}(z,\zeta)\in C^\infty(E_\kappa)$ を条件 (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) を満たす $p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ の拡張とし $Y\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho},g)$, $H\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta},g)$, $|Y|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho}$, $|H|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$ とする．このとき任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{p}(x+Y,\xi+H)-\sum_{|\alpha+\beta|<N}\frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)Y^\beta H^\alpha$$

は $S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-N\bar{\epsilon}},g)$ に属する．特に $\tilde{p}_i(z,\zeta)\in C^\infty(E_\kappa)$ を (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) を満たす $p(x,\xi)$ の 2 つの拡張とするとき任意の $k\in\mathbb{N}$ について

$$\tilde{p}_1(x+Y,\xi+H)-\tilde{p}_2(x+Y,\xi+H)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-k},g)$$

が成立する．

Proof. Taylor 展開より

$$\begin{aligned}&\tilde{p}(x+Y,\xi+H)-\sum_{|\alpha+\beta|<N}\frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_z^\beta\partial_\zeta^\alpha\tilde{p}(x,\xi)Y^\beta H^\alpha\\&=N\sum_{|\alpha+\beta|=N}\frac{Y^\beta H^\alpha}{\alpha!\beta!}\int_0^1(1-\theta)^N\partial_z^\beta\partial_\zeta^\alpha\tilde{p}(x+\theta Y,\xi+\theta H)d\theta\end{aligned}\tag{1.12}$$

である．系 1.4 の証明を繰り返すと右辺は $S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-N\bar{\epsilon}},g)$ に属すことが従う．一方 $\partial_z=\partial_x-\bar{\partial}_z$, $\partial_\zeta=\partial_\xi-\bar{\partial}_\zeta$ と (1.9) および (1.10) より任意の $N_1\in\mathbb{N}$ に対し

$$\partial_z^\beta\partial_\zeta^\alpha\tilde{p}(x,\xi)-\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-N_1},g)$$

であるからこれより結論が従う． □

命題 1.3. $0 < \kappa_1 < \kappa < \rho - \delta$ とする．$\tilde{p}(z,\zeta)$, $\tilde{v}(z,\zeta)$ および $\tilde{w}(z,\zeta)$ をそれぞれ $p(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m, g)$, $u(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa_1-\rho}, g)$ および $v(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa_1+\delta}, g)$ の almost analytic extension (κ) とすると $\tilde{p}(\tilde{u}(z,\zeta), \tilde{v}(z,\zeta)) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m; E_\kappa)$ で (1.10), (1.11) が成立する．

Proof. 最初の主張を示すには $\kappa_1 - \rho + \delta < 0$ に注意して補題 1.3 を適用すればよい．次に

$$\bar{\partial}_{z_j}\tilde{p}(\tilde{u},\tilde{v}) = \nabla_x\tilde{p}\cdot\bar{\partial}_{z_j}\tilde{u} + \nabla_\xi\tilde{p}\cdot\bar{\partial}_{z_j}\tilde{v} - i\bar{\partial}_z\tilde{p}\cdot\bar{\partial}_{z_j}\mathsf{Im}\tilde{u} - i\bar{\partial}_\zeta\tilde{p}\cdot\bar{\partial}_{z_j}\mathsf{Im}\tilde{v}$$

に注意すると補題 1.2 より上式右辺は $S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m+\delta-(\rho-\delta-\kappa_1)}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{\bar{\epsilon}/(s-1)}}; E_\kappa)$ である．$\bar{\partial}_{\zeta_j}\tilde{p}(\tilde{u},\tilde{v})$ についても同様である． □

系 1.5. $p(x,y,\xi,\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^{4n})$ は

$$|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha p(x,y,\xi,\eta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$$

を満たすとする．このとき $p(x,y,\xi,\eta)$ の (x,ξ) に関する almost analytic extension $\tilde{p}(z,y,\zeta,\eta)$, $z = x+i\hat{x}$, $\zeta = \xi+i\hat{\xi}$ を

$$\tilde{p}(z,y,\zeta,\eta) = \sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{\alpha!\beta!}p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,y,\xi,\eta)(i\hat{x})^\beta(i\hat{\xi})^\alpha\chi(d_\beta\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})\chi(d_\alpha\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})$$

で定義すると，次が成立する．

$$|\partial_{x,y,\hat{x}}^\beta\partial_{\xi,\eta,\hat{\xi}}^\alpha\tilde{p}(z,y,\zeta,\eta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|},$$
$$|\partial_{x,y,\hat{x}}^\beta\partial_{\xi,\eta,\hat{\xi}}^\alpha\bar{\partial}_{z_j}\tilde{p}(z,y,\zeta,\eta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s e^{-c\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}/(s-1)}}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta+\delta|\beta|-\rho|\alpha|},$$
$$|\partial_{x,y,\hat{x}}^\beta\partial_{\xi,\eta,\hat{\xi}}^\alpha\bar{\partial}_{\zeta_j}\tilde{p}(z,y,\zeta,\eta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s e^{-c\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}/(s-1)}}\langle\xi\rangle_M^{m-\rho+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}.$$

Proof. $\partial_y^\mu\partial_\eta^\nu p(x,y,\xi,\eta)$ に命題 1.1 (の証明中の評価) を適用する． □

命題 1.1 の証明： $(x,y,\xi,\eta) \in E_\kappa$ に対して

$$\begin{aligned}\big|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\partial_y^\nu\partial_\eta^\mu\tilde{p}(x+iy,\xi+i\eta)\big| &\le \Big|\sum_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}\sum_{\nu\le\tilde{\beta},\lambda\le\tilde{\alpha}}\frac{i^{|\mu+\nu|}}{(\tilde{\beta}-\nu)!(\tilde{\alpha}-\mu)!}(iy)^{\tilde{\beta}-\nu}(i\eta)^{\tilde{\alpha}-\mu}\\ &\quad\times\sum_{\alpha'}\binom{\alpha}{\alpha'}p_{(\tilde{\beta}+\beta)}^{(\tilde{\alpha}+\alpha')}(x,\xi)\partial_\xi^{\alpha-\alpha'}\big(\chi(d_{\tilde{\beta}}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})\chi(d_{\tilde{\alpha}}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})\big)\Big|\\ &= \Big|\sum_{\tilde{\beta},\tilde{\alpha}}\frac{i^{|\mu+\nu|}}{\tilde{\beta}!\tilde{\alpha}!}(iy)^{\tilde{\beta}}(i\eta)^{\tilde{\alpha}}\sum_{\alpha'}\binom{\alpha}{\alpha'}p_{(\tilde{\beta}+\nu+\beta)}^{(\tilde{\alpha}+\mu+\alpha')}(x,\xi)\\ &\quad\times\partial_\xi^{\alpha-\alpha'}\big(\chi(d_{\tilde{\beta}+\nu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})\chi(d_{\tilde{\alpha}+\mu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})\big)\Big|\end{aligned}$$

である．ところで $\chi(d_{\tilde{\beta}+\nu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})\chi(d_{\tilde{\alpha}+\mu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}}) \ne 0$ ならば

$$1 \le (2^{-1}d_{\tilde{\beta}+\nu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})^{-\tilde{\beta}}, \quad 1 \le (2^{-1}d_{\tilde{\alpha}+\mu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}})^{-\tilde{\alpha}}$$

であり $(x,y,\xi,\eta)\in E_\kappa$ から $|y|\le\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho}$, $|\eta|\le\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$ であるから上式の右辺は

$$\begin{aligned}C\sum_{\tilde\beta,\tilde\alpha}\frac{1}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}\langle\xi\rangle_M^{(\kappa-\rho)|\tilde\beta|}\langle\xi\rangle_M^{(\kappa+\delta)|\tilde\alpha|}\sum_{\alpha'}\binom{\alpha}{\alpha'}A^{|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha'+\beta|}\\ \times|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha'+\beta|!^s|\alpha-\alpha'|!^s\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\tilde\beta+\nu+\beta|-\rho|\tilde\alpha+\mu+\alpha|}\\ \times A_1^{|\alpha-\alpha'|}(2^{-1}d_{\tilde\beta+\nu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})^{-\tilde\beta}(2^{-1}d_{\tilde\alpha+\mu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})^{-\tilde\alpha}\end{aligned}$$

で評価される．従ってさらに

$$\begin{aligned}\sum_{\tilde\beta,\tilde\alpha}\frac{1}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}2^{|\tilde\beta+\tilde\alpha|}\sum_{\alpha'}\binom{\alpha}{\alpha'}A^{|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha'+\beta|}|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha'+\beta|!^s\\ \times|\alpha-\alpha'|!^s\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta+\nu|-\rho|\alpha+\mu|}d_{\tilde\beta+\nu}^{-\tilde\beta}d_{\tilde\alpha+\mu}^{-\tilde\alpha}A_1^{|\alpha-\alpha'|}\end{aligned}$$

で評価される．ここで

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha}\binom{\alpha}{\alpha'}A^{|\alpha'|}A_1^{|\alpha''|}(|\alpha'|+\ell)!^s(|\alpha''|+m)!^s\\ \le\frac{A}{A-A_1}A^{|\alpha|}(|\alpha|+\ell+m)!^s\end{aligned}$$

を利用すると $\ell=|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\beta|$, $m=0$ と選んで

$$\begin{aligned}\frac{A}{A-A_1}\sum_{\tilde\beta,\tilde\alpha}\frac{1}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}2^{|\tilde\beta+\tilde\alpha|}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta+\nu|-\rho|\alpha+\mu|}d_{\tilde\beta+\nu}^{-\tilde\beta}d_{\tilde\alpha+\mu}^{-\tilde\alpha}\\ \times A^{|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha+\beta|}|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha+\beta|!^s\end{aligned}$$

で評価される．ここで適当に c を選ぶと

$$|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha+\beta|!\le c^{|\tilde\alpha+\mu+\tilde\beta+\nu+\alpha+\beta|}|\tilde\alpha|!|\tilde\beta|!|\mu+\nu+\alpha+\beta|!$$

が成り立つことに注意する．さらに $d_{\tilde\beta+\nu}^{\tilde\beta}\ge B^{|\tilde\beta|}\tilde\beta!^{s-1}$, $d_{\tilde\alpha+\mu}^{\tilde\alpha}\ge B^{|\tilde\alpha|}\tilde\alpha!^{s-1}$ に注意すると $B=B(A)$ を適当に選ぶとある $C_1>0$ があって

$$\sum_{\tilde\beta,\tilde\alpha}\frac{1}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}(2c^sA)^{|\tilde\beta+\tilde\alpha|}|\tilde\beta|!^s|\tilde\alpha|!^sd_{\tilde\beta+\nu}^{-\tilde\beta}d_{\tilde\alpha+\mu}^{-\tilde\alpha}<C_1 \tag{1.13}$$

が任意の $\nu,\mu\in\mathbb{N}_0^n$ について成立する．従って $\tilde p(z,\zeta)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m;E_\kappa)$ が示された．次の主張に移る．まず

$$\begin{aligned}\bar\partial_{\zeta_j}\tilde p(x+iy,\xi+i\eta)=\sum_{\tilde\beta,\tilde\alpha}\frac{1}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}p_{(\tilde\beta)}^{(\tilde\alpha+e_j)}(x,\xi)(iy)^{\tilde\beta}(i\eta)^{\tilde\alpha}\chi(d_{\tilde\beta}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\\ \times\big[\chi(d_{\tilde\alpha}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})-\chi(d_{\tilde\alpha+e_j}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\big]\\ +\sum_{\tilde\beta,\tilde\alpha}\frac{1}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}p_{(\tilde\beta)}^{(\tilde\alpha)}(x,\xi)(iy)^{\tilde\beta}(i\eta)^{\tilde\alpha}\partial_\xi^{e_j}\big[\chi(d_{\tilde\alpha}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\chi(d_{\tilde\beta}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\big]\end{aligned} \tag{1.14}$$

に注意する．(1.14) の右辺第 1 項を考察しよう．

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \partial_y^\nu \partial_\eta^\mu \bar\partial_{\zeta_j} \tilde p(x+iy,\xi+i\eta)\\
=&\sum_{\tilde\beta,\tilde\alpha}\sum_{\alpha'}\binom{\alpha}{\alpha'}\frac{i^{|\mu+\nu|}}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}p^{(\tilde\alpha+\mu+\alpha'+e_j)}_{(\tilde\beta+\nu+\beta)}(x,\xi)(iy)^{\tilde\beta}(i\eta)^{\tilde\alpha}\partial_\xi^{\alpha-\alpha'}\chi(d_{\tilde\beta+\nu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\\
&\times\Big[\chi(d_{\tilde\alpha+\mu}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})-\chi(d_{\tilde\alpha+\mu+e_j}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\Big]=\sum_{\tilde\alpha_j\le N}\cdots+\sum_{\tilde\alpha_j>N}\cdots
\end{aligned}
$$

と和を分けて書こう．ここで ξ に依存して $N=N(\xi)$ を

$$
2N+1\le\big(\langle\xi\rangle_M^{\bar\epsilon}/B\big)^{1/(s-1)} \tag{1.15}
$$

なる最大の $N\in\mathbb{N}$ として選ぶと $d_{2N+1}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon}\le 1$ が成り立つ．また $\mu_j\le\tilde\alpha_j\le N$ に対して

$$
d_{\tilde\alpha_j+\mu_j+1}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon}\le d_{2N+1}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon}\le 1
$$

であるから

$$
\chi(d_{\tilde\alpha_j+\mu_j}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})-\chi(d_{\tilde\alpha_j+\mu_j+1}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})=0
$$

が従う．従って $\tilde\alpha_j\le N$ に関する和は 0 である．次に $\sum_{\tilde\alpha_j>N}$ の項を調べよう．$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\partial_y^\nu\partial_\eta^\mu\tilde p(x+iy,\xi+i\eta)$ の評価で用いた議論を繰り返すと A_1,A,B によらない $c_1>0$ が存在して $\sum_{\tilde\alpha_j>N}$ は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\tilde\alpha_j>N}\sum\binom{\alpha}{\alpha'}\frac{1}{\tilde\beta!\tilde\alpha!}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta+\nu|-\rho|\alpha+\mu+e_j|}A^{|\tilde\alpha+\mu+\alpha'+\tilde\beta+\nu+\beta+e_j|}\\
&\qquad\times|\tilde\alpha+\mu+\alpha'+\tilde\beta+\nu+\beta+e_j|!^s|\alpha-\alpha'|!^s\\
&\qquad\times A_1^{|\alpha-\alpha'|}2^{|\tilde\beta+\tilde\alpha|}d_{\tilde\beta+\nu}^{-\tilde\beta}d_{\tilde\alpha+\mu}^{-\tilde\alpha}\\
&\le CA^{|\alpha+\beta+\mu+\nu|+1}|\alpha+\beta+\mu+\nu+e_j|!\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta+\nu|-\rho|\alpha+\lambda+e_j|}\\
&\qquad\times\sum_{\tilde\alpha_j>N,\tilde\beta}\frac{(c_1A)^{|\tilde\beta+\tilde\alpha|}|\tilde\beta|!^{s-1}|\tilde\alpha|!^{s-1}}{d_{\tilde\beta+\nu}^{\tilde\beta}d_{\tilde\alpha+\mu}^{\tilde\alpha}}
\end{aligned}
$$

と評価される．右辺の最後の部分を評価しよう．$\tilde\alpha=(\tilde\alpha_j,\tilde\alpha')$, $\mu=(\mu_j,\mu')$ と書くと $c_2=2^{s-1}c_1$ として (1.13) の評価 ($\tilde\alpha_j=0$) を利用すると $B=B(A)$ を適当に選んで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\tilde\alpha_j>N,\tilde\beta}\frac{(c_1A)^{|\tilde\beta+\tilde\alpha|}|\tilde\beta|!^{s-1}|\tilde\alpha|!^{s-1}}{d_{\tilde\beta+\nu}^{\tilde\beta}d_{\tilde\alpha+\mu}^{\tilde\alpha}}\le\sum_{\tilde\alpha_j>N}\frac{(c_2A)^{\tilde\alpha_j}\tilde\alpha_j!^{s-1}}{d_{\tilde\alpha_j+\mu_j}^{\tilde\alpha_j}}\\
&\times\sum_{\tilde\alpha',\tilde\beta}\frac{(c_2A)^{|\tilde\beta+\tilde\alpha'|}|\tilde\beta|!^{s-1}|\tilde\alpha'|!^{s-1}}{d_{\tilde\beta+\nu}^{\tilde\beta}d_{\tilde\alpha'+\mu'}^{\tilde\alpha'}}\le C_2\sum_{j>N}\frac{(c_2A)^jj^{(s-1)j}}{d_{j+\mu_j}^j}\\
&=C_2\sum_{j>N}\frac{(c_2A)^jj^{(s-1)j}}{B^j(j+\mu_j)^{(s-1)j}}\le C_2\sum_{j>N}\Big(\frac{c_2A}{B}\Big)^j\le\frac{BC_2}{B-c_2A}\Big(\frac{c_2A}{B}\Big)^N
\end{aligned}
$$

を得る．さらに B は $c_2A/B \le e^{-1}$ をみたすとする．(1.15) より $\langle\xi\rangle_M^{\bar\epsilon}/B \le (2N+3)^{s-1}$ ゆえ $c_3 > 0$ があって $N \ge c_3\langle\xi\rangle_M^{\bar\epsilon/(s-1)}$ が成り立つから

$$\left(\frac{c_2A}{B}\right)^N \le Ce^{-c_3\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon/(s-1)}}$$

を得る．(1.14) の右辺第 2 項は $d_{2N+1}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon} \le 1$ のとき

$$\chi'(d_{\tilde\beta_i+\nu_i}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon}) = 0, \quad \nu_i \le \tilde\beta_i \le N,$$
$$\chi'(d_{\tilde\alpha_i+\mu_i}\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon}) = 0, \quad \mu_i \le \tilde\alpha_i \le N$$

に注意すれば $\sum_{\tilde\alpha_j>N}$ の評価と同様にして評価できる．従って (1.9) が示された．(1.10) の証明も同様である．(1.11) を示すには $\partial_{\xi_j}\tilde p(z,\zeta) - \widetilde{\partial_{\xi_j}p}(z,\zeta)$ が

$$\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{\beta!\alpha!}p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)(iy)^\beta(i\eta)^\alpha\partial_{\xi_j}\left[\chi(d_\alpha\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\chi(d_\beta\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon})\right]$$

に等しいので (1.14) の右辺第 2 項の評価と同じである． □

1.4 $S_{\rho,\delta}$ 型 Gevrey クラスでの陰関数定理

Gevrey クラスにおける陰関数定理について考察する．$f_j(x,\xi,y)$, $\delta < \ell < \rho$ は

$$|\partial_{x,y}^\beta\partial_\xi^\alpha f_j(x,\xi,y)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{\ell+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$$

を満たすとする．

$$\ell = \kappa+\delta, \quad \kappa > 0$$

とおき $\kappa < \kappa' < \rho-\delta$ なる κ' を一つ選んで $\tilde f_j(x,\zeta,y) = \tilde f_j(x,\xi+i\eta,y)$ を $f_j(x,\xi,y)$ の ξ に関する almost analytic extension (κ') とすると $(x,\zeta) \in \bar E_{\kappa'}$, $y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\left|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\tilde f_j(x,\zeta,y)\right| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{\ell+\delta|\beta|-\rho|\alpha|} \tag{1.16}$$

が成立する．これを定義 1.3 の記法を流用して $\tilde f_j \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^\ell; \bar E_{\kappa'}\times\mathbb{R}^n)$ とも書くことにする．

$$F(x,\zeta,y) = (\tilde f_1(x,\zeta,y),\ldots,\tilde f_n(x,\zeta,y)), \quad \zeta = \xi+i\eta$$

とおく．

命題 1.4. 次の条件を満たす $\Xi(x,\zeta,y)$ が一意に存在する．

$$\begin{aligned}\Xi(x,\zeta,y)-\zeta \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^\ell; \bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n),\\ \Xi(x,\zeta,y) = iF(x,\Xi(x,\zeta,y),y)+\zeta, \quad (x,\zeta,y)\in\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n,\\ \bar\partial_{\zeta_j}\Xi(x,\zeta,y) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-2\bar\epsilon}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta-\kappa')/(s-1)}}; \bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n), \ \ c>0.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Proof. 最初に一意性を確かめる．$\Xi_i(x,\zeta,y)$ $(i=1,2)$ は (1.17) を満たすとする．このとき $|\nabla_{\xi,\eta}F(x,\zeta,y)|\le C\langle\xi\rangle_M^{\ell-\rho}\le CM^{-(\ell-\delta)}$ より

$$|\Xi_1-\Xi_2|\le|F(x,\Xi_1,y)-F(x,\Xi_2,y)|\le CM^{-(\ell-\rho)}|\Xi_1-\Xi_2|$$

ゆえ M が大のとき $\Xi_1=\Xi_2$ が従う．$\zeta=\xi+i\eta$, $\hat\zeta=\hat\xi+i\hat\eta$ として $F(x,\zeta+\hat\zeta,y)$ を考察する．(1.16) より $C>0$ が存在して

$$|F(x,\zeta,y)|<C\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta},\quad (x,\zeta,y)\in\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n \tag{1.18}$$

が成立している．$(x,\zeta)\in\bar E_\kappa$ とし

$$|\hat\zeta|=|\hat\xi+i\hat\eta|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta} \tag{1.19}$$

とすると $\langle\xi\rangle_M^{-\rho}|\hat\xi|\le\langle\xi\rangle_M^{-(\rho-\delta-\kappa)}\le M^{-\bar\epsilon}$ であるから M を十分大にすると M によらない C があって

$$C^{-1}\langle\xi\rangle_M\le\langle\xi+\hat\xi\rangle_M\le C\langle\xi\rangle_M$$

が成り立つ．(1.19) より

$$|\eta+\hat\eta|<2\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}\le C'\langle\xi+\hat\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}\le C'M^{-(\kappa'-\kappa)}\langle\xi+\hat\xi\rangle_M^{\kappa'+\delta} \tag{1.20}$$

であるから M を大に選ぶと $|\eta+\hat\eta|<\langle\xi+\hat\xi\rangle_M^{\kappa'}$ で $(x,\zeta+\hat\zeta)\in\bar E_{\kappa'}$ となり $F(x,\zeta+\hat\zeta,y)$ が定義される．従って $|\hat\zeta|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$, $(x,\zeta,y)\in\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n$ のとき

$$\left|\nabla_{\xi,\eta,\hat\xi,\hat\eta}F(x,\zeta+\hat\zeta,y)\right|\le C\langle\xi+\hat\xi\rangle_M^{\kappa+\delta-\rho}\le CM^{-\bar\epsilon} \tag{1.21}$$

が成立する．さて (1.17) を解こう．$\Xi(x,\zeta,y)=\zeta+G(x,\zeta,y)$ とおくと (1.17) は

$$G(x,\zeta,y)=iF(x,\zeta+G(x,y,\zeta),y)$$

に帰着される．$G^{[0]}=0$ から始めて $G^{[m]}(x,\zeta,y)$ を

$$G^{[m+1]}(x,\zeta,y)=iF(x,\zeta+G^{[m]}(x,\zeta,y),y)$$

で定義する．上で確かめたように $|G^{[m]}(x,\zeta,y)|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$ で $(x,\zeta,y)\in\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n$ のとき $(x,\zeta+G^{[m]}(x,\zeta,y))\in\bar E_{\kappa'}$ で

$$\left|G^{[m+1]}(x,\zeta,y)\right|<C\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$$

が成り立つ．(1.21) より

$$\left|G^{[m+1]}(x,\zeta,y)-G^{[m]}(x,\zeta,y)\right|\le CM^{-\bar\epsilon}\left|G^{[m]}(x,\zeta,y)-G^{[m-1]}(x,\zeta,y)\right|$$

が成り立つので M が大のとき $G^{[m]}(x,\zeta,y)$ はある $G(x,\zeta,y)\in C^0(\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ に収束する．ここで $G(x,\zeta,y)$ は

$$G(x,\zeta,y)=iF(x,y,\zeta+G(x,\zeta,y)),\quad |G(x,\zeta,y)|\le C\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta} \tag{1.22}$$

を満たす．陰関数定理の標準的な証明を繰り返せば $G(x,\zeta,y)\in C^\infty(\bar{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ であることは容易に分かる．次に $G_j(x,\zeta,y)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^\ell;\bar{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ を証明しよう．まず $\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha G_j^{[m]}(x,\zeta,y)$ を評価する．任意の $(x,\zeta,y)\in\bar{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n$ および $|\hat{\zeta}|<\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$, $|\alpha+\beta+\gamma|\geq 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\partial_{\hat{\xi},\hat{\eta}}^\gamma F_j(x,\zeta+\hat{\zeta},y)|\\
&\leq C_2A_2^{|\alpha+\beta+\gamma|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta+\delta|\beta|-\rho|\alpha+\gamma|}\Gamma_s(|\alpha+\beta+\gamma|-1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．いま $1\leq j\leq n$, $|\alpha+\beta|\geq 1$ に対して

$$
|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha G_j^{[m-1]}(x,\zeta,y)|\leq C_1A_1^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}\Gamma_s(|\alpha+\beta|-1) \tag{1.23}
$$

が成立していると仮定する．補題 1.4 で $x\leftarrow(x,y,\zeta)$, $y\leftarrow\hat{\zeta}$, $f_j=G_j(x,\zeta,y)$, $F(x,y,\zeta,\hat{\zeta})\leftarrow F_j(x,\zeta+\hat{\zeta},y)$ および

$$
\begin{gathered}
C_j=C_1\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta},\ \ 1\leq j\leq 2n,\quad C=C_2\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta},\\
A_1\leftarrow A_1(\langle\xi\rangle_M^\delta,\ldots,\langle\xi\rangle_M^\delta,\langle\xi\rangle_M^{-\rho},\ldots,\langle\xi\rangle_M^{-\rho}),\ \ 0<A_1\in\mathbb{R},\\
A_2\leftarrow A_2(\langle\xi\rangle_M^\delta,\ldots,\langle\xi\rangle_M^\delta,\langle\xi\rangle_M^{-\rho},\ldots,\langle\xi\rangle_M^{-\rho}),\ \ 0<A_2\in\mathbb{R},\\
D=(\langle\xi\rangle_M^{-\rho},\ldots,\langle\xi\rangle_M^{-\rho})
\end{gathered}
$$

として適用する．$A_2A_1^{-1}\ll 1$ および $C_2\leq C_1$ と仮定してよいからこのとき M が大ならば

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2n}C_jD_j+\sum_{j=1}^{4n}A_{2j}A_{ij}^{-1}&=2nC_1\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta-\rho}+4nA_2A_1^{-1}\\
&\leq 2n(C_1M^{-\bar{\epsilon}}+2A_2A_1^{-1})\leq 1
\end{aligned}
$$

が成立するので補題 1.4 より $|\alpha+\beta|\geq 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\left|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha F_j(x,\zeta+G^{[m-1]}(x,\zeta,y),y)\right|\\
&\leq C_2A_1^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}\Gamma_s(|\alpha+\beta|-1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って $\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha G_j^{[m]}(x,y,\zeta)$ が (1.23) を満たすことがわかる．$m\to\infty$ として望む結論を得る．

最後に $\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\bar{\partial}_{\zeta_j}\Xi(x,\zeta,y)$ を評価する．まず $\Xi(x,\zeta,y)=\zeta+G(x,\zeta,y)$ であるから $|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\zeta|\leq 1$, $|\alpha+\beta|=1$, $\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\zeta=0$, $|\alpha+\beta|\geq 2$, $\ell\leq\rho$ より

$$
\begin{aligned}
\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\Xi(x,\zeta,y)\in&S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\rho-\rho|\alpha|+\delta|\beta|};\bar{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n),\quad|\alpha+\beta|\geq 1,\\
\nabla_\xi\Xi(x,\zeta,y)-I\in&\ S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\ell-\rho};\bar{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n)
\end{aligned} \tag{1.24}
$$

に注意する．次に

$$
0=\bar{\partial}_{\zeta_j}\zeta=\bar{\partial}_{\zeta_j}(\Xi-iF(x,\Xi,y))=\bar{\partial}_{\zeta_j}\Xi-i(\nabla_\xi F)\,\bar{\partial}_{\zeta_j}\Xi-(\bar{\partial}_\Xi F)\,\bar{\partial}_{\zeta_j}\mathsf{Im}\Xi
$$

であるからこれより $(I-i\nabla_\xi F)\,\bar\partial_{\zeta_j}\Xi=(\bar\partial_\Xi F)\,\bar\partial_{\zeta_j}\mathsf{Im}\Xi$ が従い次を得る．

$$\bar\partial_{\zeta_j}\Xi=(I-i\nabla_\xi F)^{-1}(\bar\partial_\Xi F)\,\bar\partial_{\zeta_j}\mathsf{Im}\Xi. \tag{1.25}$$

命題 1.1 と (1.24) に注意して補題 1.4 を適用すると $d(x,y,\zeta)$ は有界であるから

$$\begin{gathered}\left|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\bar\partial_\Xi F(x,\Xi,y)\right|\le C\langle\xi\rangle_M^{\ell-\rho}A^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^{-c(\rho-\delta-\kappa')/(s-1)},\\ \left|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\nabla_\xi F(x,\Xi,y)\right|\le C\langle\xi\rangle_M^{\ell-\rho}A^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|},\end{gathered}$$

が成立する．また $\bar\partial_{\zeta_j}\mathsf{Im}\Xi=\bar\partial_{\zeta_j}\mathsf{Im}G_j$ と $G_j(x,\zeta,y)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^\ell;\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ より

$$\bar\partial_{\zeta_j}\mathsf{Im}\Xi\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\ell-\rho};\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$$

が従う．$\nabla_\xi F\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon};\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ より $g(x,\zeta,y)=\det(I-i\nabla_\xi F)$ とおくと補題 1.2 から $g=1+r$, $r\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-\bar\epsilon};\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ である．ゆえに M_0 があって

$$|g(x,\zeta,y)|\ge 1/2,\ \ M\ge M_0,\quad g(x,\zeta,y)\in S_{(s)}(1;\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$$

が成り立ち系 1.1 より $g(x,\zeta,y)^{-1}\in S_{(s)}(1;\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ で再び補題 1.2 より

$$(I-i\nabla_\xi F)^{-1}\in S_{(s)}(1;\bar E_\kappa\times\mathbb{R}^n)$$

を得る．以上のことと (1.25) および補題 1.2 より結論を得る． □

次に $f_j(x,\xi,\eta)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-\ell'},g)$, $\rho>\ell'>\delta$ は

$$|\partial_x^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha f_j(x,\xi,\eta)|\le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{\ell+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$$

を満たすとする．

$$-\ell'=\kappa-\rho,\quad \kappa>0$$

とおき以前と同様に $\kappa<\kappa'<\rho-\delta$ となるなる $\kappa'>0$ を一つ選び $\tilde f_j(z,\xi,\eta)=\tilde f_j(x+iy,\xi,\eta)$ を $f_j(x,\xi,\eta)$ の x に関する almost analytic extension (κ') とする．したがって

$$\tilde f_j(z,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-\ell'};\underline{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n)$$

である．

$$F(z,\xi,\eta)=(\tilde f_1(z,\xi,\eta),\ldots,\tilde f_n(z,\xi,\eta)),\quad z=x+iy$$

とおき方程式 $X+iF(X,\xi,\eta)=z$ を考えよう

命題 1.5. 次の条件を満たす $X(z,\xi,\eta)$ が一意に存在する．

$$\begin{gathered}X(z,\xi,\eta)-z\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-\ell'};\underline{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n),\\ X(z,\xi,\eta)+iF(X(z,\xi,\eta),\xi,\eta)=z,\quad (z,\xi,\eta)\in\underline{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n,\\ \bar\partial_{z_j}X\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-2\bar\epsilon}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{-(\rho-\delta-\kappa')/(s-1)}};\underline{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n),\quad c>0.\end{gathered}$$

Proof. 命題 1.4 の証明に倣えばよい． □

2 $\exp\left(S^{\kappa}_{\rho,\delta}\right)$ 型 Gevrey 擬微分作用素

ここでは $\phi(x,\xi)$ が $S^{\kappa}_{\rho,\delta}$ 型の Gevrey シンボルのとき $\mathrm{op}^0(e^{\phi(x,\xi)})\mathrm{op}(p)\mathrm{op}^1(e^{-\phi(x,\xi)})$ がどのような作用素であるかを調べる.

2.1 $S_{\rho,\delta}$ 型の Gevrey 擬微分作用素

最初に振動積分を考えるために次のシンボルのクラスを導入しよう.

定義 2.1. $m = m(\xi)$ は正値関数で $0 \le \delta < 1,\ 1 < s$ とする. 任意の $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ に対して $C > 0, A > 0$ が存在して

$$|\partial^{\alpha}_{x,y}\partial^{\beta}_{\xi} a(x,\xi,y)| \le CA^{|\alpha|}|\alpha|!^{s}\left(|\alpha|^{\delta s/(1-\delta)} + \langle\xi\rangle_M^{\delta}\right)^{|\alpha|} m(\xi), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

の成立する $a(x,\xi,y) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{3n})$ の全体を $\mathcal{A}_{(s)}(m)$ で表すとする.

いま $m(\xi)$ と $1 < s$ は

$$m(\xi) \le e^{c\langle\xi\rangle_M^{\tilde\kappa}} \ \ (c > 0), \quad \tilde\kappa s < 1-\delta \tag{2.26}$$

を満たすとする. このとき $a(x,\xi,y) \in \mathcal{A}_{(s)}(m)$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{O}p(a)u(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\xi}a(x,\eta,y)u(y)dyd\eta \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{-iy\eta}a(x,\eta,y+x)u(y+x)dyd\eta, \quad u(x) \in G^s(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{2.27}$$

は振動積分として well-defined であることをみておく. $\chi(t) \in G^s_0(\mathbb{R}^n)$ は

$$\chi(t) = 1 \ \text{ for } \ |t| \le 1/4, \quad \chi(t) = 0 \ \text{ for } \ |t| \ge 1/2 \tag{2.28}$$

を満たすとし $\chi_\epsilon(y) = \chi(\epsilon y),\ \chi_\epsilon(\eta) = \chi(\epsilon\eta)$ とおく. また $\rho(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ を $\rho(t) = 0,\ |t| \le 1/2,\ \rho(t) = 1,\ |t| \ge 1$ とし $\rho_M(\eta) = \rho(M^{-1}\eta)$ とおく.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-iy\eta}\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\eta)\rho_M(\eta)a(x,\eta,y+x)u(y+x)dyd\eta$$

が存在し χ の選び方によらないことを確かめる. $\langle\eta\rangle^{-2N}\langle D_y\rangle^{2N}e^{-iy\eta} = e^{-iy\eta}$ および $\langle y\rangle^{-2\ell}\langle D_\eta\rangle^{2\ell}e^{-iy\eta} = e^{-iy\eta}$ より部分積分によって上の積分は

$$\int e^{-iy\eta}\langle D_y\rangle^{2N}\langle\eta\rangle^{-2N}\langle D_\eta\rangle^{2\ell}\langle y\rangle^{-2\ell}\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\eta)\rho_M(\eta)a(x,\eta,y+x)u(y+x)dyd\eta$$

に等しい. $\rho_M(\eta) \ne 0$ のとき $\langle\eta\rangle_M \le 3\langle\eta\rangle$ に注意して補題 1.2 より被積分関数は $\epsilon > 0$ に一様に

$$\begin{aligned} &C_\ell A^{2N}N^{2Ns}(N^{s\delta/(1-\delta)} + \langle\eta\rangle_M^{\delta})^{2N}\langle y\rangle^{-2\ell}\langle\eta\rangle^{-2N}e^{c\langle\eta\rangle_M^{\tilde\kappa}} \\ &\le C_\ell\Big(\frac{rAN^s}{\langle\eta\rangle^{1-\delta}}\Big)^{2N}\Big(\frac{N^{s\delta/(1-\delta)}}{r\langle\eta\rangle^{\delta}} + \frac{3^\delta}{r}\Big)^{2N}e^{c\langle\eta\rangle_M^{\tilde\kappa}} \end{aligned}$$

で評価される．$r>0$ を $(1/rA)^{\delta/(1-\delta)}+3^\delta/r\leq 1$ と選び $N=N(\eta)$ を $N^s\leq\langle\eta\rangle^{1-\delta}/(reA)$ を満たす最大の N として選ぶと右辺は $c'>0$ が存在し

$$C_\ell e^{-2N}e^{c\langle\eta\rangle_M^{\tilde\kappa}}\leq C_\ell e^{-c'\langle\eta\rangle^{(1-\delta)/s}}e^{c\langle\eta\rangle_M^{\tilde\kappa}} \tag{2.29}$$

と評価される．$\tilde\kappa<(1-\delta)/s$ であったから被積分関数は $C\langle y\rangle^{-2\ell}e^{-c''\langle\eta\rangle^{(1-\delta)/s}}$ で評価される．$\epsilon\to 0$ のとき $|\alpha|\geq 1$ なら $\partial_{y,\eta}^\alpha\chi_\epsilon\to 0$ であるから Lebesgue の優収束定理より積分は χ によらない

$$\int e^{-iy\eta}\langle D_y\rangle_M^{2N}\langle\eta\rangle_M^{-2N}\langle D_\eta\rangle^{2\ell}\langle y\rangle^{-2\ell}\rho_M(\eta)a(x,\eta,y+x)u(y+x)dyd\eta \tag{2.30}$$

に収束する．残りの

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-iy\eta}\chi_\epsilon(y)(1-\rho_M(\eta))a(x,\eta,y+x)dyd\eta\\ &=\int e^{-iy\eta}\langle D_\eta\rangle^{2\ell}\langle y\rangle^{-2\ell}(1-\rho_M(\eta))a(x,\eta,y+x)dyd\eta\end{aligned}$$

は容易である．次にシンボル $a(x,\xi)\in S_{(s)}(m,g)$ に対し $0\leq t\leq 1$ として $\tilde a(x,\xi,y)=a(ty+(1-t)x,\xi)\in\mathcal{A}_{(s)}(m)$ とおき $\mathrm{op}^t(a)$ を

$$\mathrm{op}^t(a)u(x)=\mathcal{O}p(\tilde a)u(x) \tag{2.31}$$

で定義する．

定義 2.2. 特に $\mathrm{op}^{1/2}(a)$ は a の Wyle 量子化と呼ばれる．$\mathrm{op}^{1/2}(a)=\mathrm{op}(a)$ のように 1/2 を省略して書くことにする．

2.2 $\exp(S_{\rho,\delta}^\kappa)$ 型 Gevrey 擬微分作用素の合成則

$\phi(x,\xi)$ は実数値で，ある $0<\kappa\leq\tilde\kappa<1$ について

$$\begin{cases}\phi\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\tilde\kappa},g),\\ \nabla_x\phi\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta},g),\quad\nabla_\xi\phi\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho},g)\end{cases} \tag{2.32}$$

を満たすと仮定する．ここで $s>1$ と $0<\tilde\kappa<1$ は

$$\tilde\kappa<(\rho-\delta)/s \tag{2.33}$$

を満たすものとする．したがって特に $(\rho-\delta)/s>\kappa$ である．$p\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ とするとき $e^\phi p$ をシンボルとする作用素

$$\mathrm{op}^t(e^\phi p)u=(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\xi+\phi(ty+(1-t)x,\xi)}p(ty+(1-t)x,\xi)u(y)dyd\xi$$

を考えよう．ここで $0\leq t\leq 1$ である．このとき

$$(\mathrm{op}^0(e^\phi)u,v)=(u,\mathrm{op}^1(e^\phi)v)$$

が成り立つ．以下 almost analytic extension とは

$$\kappa < \kappa' < (\rho - \delta)/s \tag{2.34}$$

なる κ' を一つ選び (1.6) で κ を κ' として定義した almost analytic extension (κ') を意味するものとする．

定理 2.1. $\phi \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\tilde{\kappa}}, g)$ は実数値で (2.32), (2.33) を満たすとし $p \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m}, g)$ とする．このとき

$$\mathrm{op}^0(e^{\phi})\mathrm{op}(p)\mathrm{op}^1(e^{-\phi}) = \mathrm{op}(q) + \mathrm{op}(r)$$

が成立する．ここで $q \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m}, g)$ であり r は任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $r \in S_{(sd^2)}(\langle\xi\rangle_M^{-k}, g)$ である．ここで $d = (1+\rho-\delta)/(1-\delta)$ である．さらに

$$q(x,\xi) = J(x,\xi)\tilde{p}(x - i\nabla_\xi\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)), \xi + i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi))) + R(x,\xi)$$

と書ける．ここで $R(x,\xi) \in S_{(sd)}(\langle\xi\rangle_M^{m-(\rho-\delta)}, g)$ で $\tilde{p}(z,\zeta)$ および $\tilde{\phi}(x,\zeta)$ ($z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$) はそれぞれ $p(x,\xi)$ および $\phi(x,\xi)$ の (x,ξ) および ξ に関する almost analytic extension (κ') で $E_{\kappa'}$ および $\underline{E}_{\kappa'}$ で定義されている．$\Xi(x,\xi)$ は

$$\Xi(x,\xi) - i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)) = \xi, \quad \Xi(x,\xi) - \xi \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}, g) \tag{2.35}$$

の一意解で $J(x,\xi) = \det\bigl(\partial\Xi(x,\xi)/\partial\xi\bigr)$ である．

定理 2.1 の q の表現が任意の N に対し $S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-\bar{\epsilon}N}, g)$ を modulo にして almost analytic extension によらないことをみておこう．命題 1.2 の証明より

$$\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi) - \sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\nabla_x\phi(x,\xi)(i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi))^\alpha \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta-N\bar{\epsilon}}, g)$$

である．この操作を繰り返すと $\phi(x,\xi)$ のみから決まる

$$c_{1j}(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta-\bar{\epsilon}j}, g), \quad c_{2j}(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho-\bar{\epsilon}j}, g)$$

が存在して

$$\begin{gathered}\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi) - \sum_{j=0}^{N-1}c_{1j}(\phi)(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta-N\bar{\epsilon}}, g),\\ \nabla_\xi\tilde{\phi}(x,\Xi) - \sum_{j=0}^{N-1}c_{2j}(\phi)(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho-N\bar{\epsilon}}, g)\end{gathered} \tag{2.36}$$

が成立する．例えば

$$\begin{gathered}c_{10} = \nabla_x\phi(x,\xi), \quad c_{11} = \sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^\alpha\nabla_x\phi(x,\xi)(i\nabla_x\phi(x,\xi))^\alpha,\\ c_{20} = \nabla_\xi\phi(x,\xi), \quad c_{21} = \sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^\alpha\nabla_\xi\phi(x,\xi)(i\nabla_x\phi(x,\xi))^\alpha\end{gathered}$$

である．一方命題 1.2 より

$$
\begin{aligned}
&\tilde{p}(x-i\nabla_\xi\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)),\xi+i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)))\\
&-\sum_{|\alpha+\beta|<N}\frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)(-i\nabla_\xi\tilde{\phi}(x,\Xi))^\beta(i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi))^\alpha\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-\bar{\epsilon}N},g)
\end{aligned}
$$

であるから (2.36) を上式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\tilde{p}(x-i\nabla_\xi\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)),\xi+i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)))\\
&-\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha+\beta|=k}\frac{(-1)^{|\beta|}i^k}{\alpha!\beta!}\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\big(\sum_{j=0}^{N-k-1}c_{2j}(x,\xi)\big)^\beta\big(\sum_{j=0}^{N-k-1}c_{1j}(x,\xi)\big)^\alpha\\
&\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-\bar{\epsilon}N},g)
\end{aligned}
$$

が従う．例えば $N=3$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\tilde{p}(x-i\nabla_\xi\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)),\xi+i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi(x,\xi)))=p(x,\xi)+i\{p,\phi\}(x,\xi)\\
&-\frac{1}{2}\big(\mathrm{Hess}\,p\,H_\phi,H_\phi\big)-\sum_{j=1}^n\{p,\partial_{\xi_j}\phi\}\partial_{x_j}\phi+r,\quad r\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-3\bar{\epsilon}},g)
\end{aligned}
$$

である．ここで $\{p,\phi\}=\nabla_\xi p\nabla_x\phi-\nabla_\xi\phi\nabla_x p$ は p と ϕ の Poisson 括弧式で $H_\phi={}^t(\nabla_\xi\phi,-\nabla_x\phi)$ は ϕ の Hamilton ベクトル場で $\mathrm{Hess}\,p$ は p の Hesse 行列である．$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上の標準的なシンプレクティク形式 $\sigma((x,\xi),(y,\eta))=\xi\,y-x\,\eta$ を導入すると

$$
i\{p,\phi\}(x,\xi)-\frac{1}{2}\big(\mathrm{Hess}\,p\,H_\phi,H_\phi\big)=i\sigma(H_p,H_\phi)+\sigma(F_p\,H_\phi,H_\phi)
$$

と書ける．ここで F_p は p の基本行列で

$$
F_p=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial^2p/\partial x\partial\xi & \partial^2p/\partial\xi\partial\xi\\ -\partial^2p/\partial x\partial x & \partial^2p/\partial\xi\partial x\end{pmatrix}
$$

である．$\Xi=\xi+i\nabla_x\tilde{\phi}(x,\Xi)$ より (2.36) に注意すると ϕ のみから決まる $d_j(\phi)(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}j},g)$ が存在して $J(x,\xi)$ も

$$
J(x,\xi)-\big(1+\sum_{j=1}^{N-1}d_j(\phi)(x,\xi)\big)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-\bar{\epsilon}N},g)
$$

と書くことができる．例えば $d_1(\phi)=i\sum_{j=1}^n\partial^2\phi/\partial x_j\partial\xi_j$ である．

2.3 定理 2.1 の証明

定理 2.1 の証明に取りかかろう．$\underline{g}$ を

$$
\underline{g}(y,\eta)=|y|^2+|\eta|^2
$$

とおく．$S_{0,0}$ クラスを定義する metric である．Φ を

$$\phi(x,\xi+\eta)-\phi(x,\xi)=\eta\Phi(x,\xi,\eta),\ \ \Phi(x,\xi,\eta)=\int_0^1\nabla_\xi\phi(x,\xi+\theta\eta)d\theta$$

で定義する．最初に $\mathrm{op}^0(e^{\phi})\mathrm{op}(p)$ を考察する．

命題 2.1. $p\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ とする．このとき $q\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ があって

$$\mathrm{op}^0(e^{\phi})\mathrm{op}(p)=\mathrm{op}^0(e^{\phi}q)+\mathrm{op}^0(r)$$

と書ける．ここで $r\in S_{(sd)}(e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}},g)$ $(c>0)$ で q は任意の N について

$$q(x,\xi)=\sum_{|\beta|<N}\frac{(-i)^{|\beta|}}{\beta!}\partial_\eta^\beta\partial_x^\beta\tilde{p}(x-i\Phi(x,\xi,\eta),\xi+\eta/2)\big|_{\eta=0}+q_N(x,\xi)$$

の展開をもつ．ここで $q_N\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-(\rho-\delta)N},g)$ また $\tilde{p}(x+iy,\xi)$ は $p(x,\xi)$ の x に関する almost analytic extension である．

Proof. 定義式で $y\to y+(x+z)/2$ と変数変換すると $\mathrm{op}^0(e^{\phi})\mathrm{op}(p)u(x)$ は

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-2n}\iint e^{i(x-y)\xi+i(y-z)\eta+\phi(x,\xi)}p((y+z)/2,\eta)u(z)dyd\xi dzd\eta\\ =&(2\pi)^{-2n}\iint e^{-iy(\xi-\eta)+i(x-z)(\xi+\eta)/2+\phi(x,\xi)}p((2y+x+3z)/4,\eta)u(z)dyd\xi dzd\eta\end{aligned}$$

である．ここで $(\xi+\eta)/2=\tilde{\eta}$, $\xi-\eta=\tilde{\xi}$, $y\to\tilde{y}$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n}\int e^{i(x-z)\tilde{\eta}}a(x,\tilde{\eta},z)u(z)dzd\tilde{\eta}=\mathcal{O}p(a)u(x),\\ a(x,\tilde{\eta},z)=(2\pi)^{-n}\int e^{-i\tilde{y}\tilde{\xi}+\phi(x,\tilde{\eta}+\tilde{\xi}/2)}p((2\tilde{y}+x+3z)/4,\tilde{\eta}-\tilde{\xi}/2)d\tilde{y}d\tilde{\xi}\end{aligned}$$

となる．$\mathcal{O}p(a)=\mathrm{op}^0(b)$ とすると補題**??**から $b(x,\xi)$ は

$$(2\pi)^{-2n}\iint e^{iy(\eta-\xi)-i\tilde{y}\tilde{\xi}+\phi(x,\eta+\tilde{\xi}/2)}p(x+(2\tilde{y}-3y)/4,\eta-\tilde{\xi}/2)d\tilde{y}d\tilde{\xi}dyd\eta$$

で与えられる．$\tilde{y}\to\tilde{y}+3y/2$ と変数変換し $(2\pi)^{-n}\int e^{iy(\eta-\xi-3\tilde{\xi}/2)}dy=\delta(\eta-\xi-3\tilde{\xi}/2)$ に注意すると上式は

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-n}\int e^{-i\tilde{y}\tilde{\xi}+\phi(x,\xi+2\tilde{\xi})}p(x+\tilde{y}/2,\xi+\tilde{\xi})d\tilde{y}d\tilde{\xi}\\ =&(2\pi)^{-n}\int e^{-i\tilde{y}\tilde{\xi}+\phi(x,\xi+\tilde{\xi})}p(x+\tilde{y},\xi+\tilde{\xi}/2)d\tilde{y}d\tilde{\xi}\end{aligned}$$

に等しい．ここまでの形式的計算は振動積分によって正当化されるので結局

$$b(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\lim_{\epsilon\to0}\int\int e^{-iy\eta+\phi(x,\xi+\eta)}\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)p(x+y,\xi+\eta/2)dyd\eta$$

を得る．ここで (2.28) の χ を用いて $\chi_\epsilon(\xi,\eta)=\chi(\epsilon\langle\xi\rangle_M^{-1}\eta)$ とした．補題 1.3 より $0<\epsilon\le 1$ に無関係な C があって

$$|\partial_y^\beta\chi_\epsilon(y)|\le CA^{|\beta|}|\beta|!^s,\quad |\partial_{\xi,\eta}^\alpha\chi_\epsilon(\xi,\eta)|\le CA^{|\alpha|}|\alpha|!^s\langle\xi\rangle_M^{-|\alpha|} \tag{2.37}$$

が成り立つことは容易に確かめられる．さて積分の前の定数 $(2\pi)^{-n}$ を省略して

$$\begin{aligned} q_\epsilon &= \int\int e^{-iy\eta+\phi(x,\xi+\eta)-\phi(x,\xi)}\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)\chi(\xi,\eta)p(x+y,\xi+\eta/2)dyd\eta \\ &= \int\int e^{-i\eta(y+i\Phi(x,\xi,\eta))}\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)\chi(\xi,\eta)p(x+y,\xi+\eta/2)dyd\eta, \\ r_\epsilon &= \int\int e^{-iy\eta+\phi(x,\xi+\eta)}\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)p(x+y,\xi+\eta/2)dyd\eta \end{aligned}$$

とおこう．このとき $q=\lim_{\epsilon\to 0}q_\epsilon$, $r=\lim_{\epsilon\to 0}r_\epsilon$ とおくと

$$\mathrm{op}^0(e^\phi)\mathrm{op}(p)=\mathrm{op}^0(e^\phi q)+\mathrm{op}^0(r)$$

が成り立つ．$\Phi=(\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ と書くとき $(\xi,\eta)\in\mathrm{supp}\,\chi$ ならば

$$|\partial_x^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\Phi_j|\le CA^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta|!^s,\quad (\xi,\eta)\in\mathrm{supp}\,\chi \tag{2.38}$$

が成り立つことは容易に分かる．

$$\begin{aligned} \gamma(x,\xi,\eta)&=\{z=y+i\Phi(x,\xi,\eta)\mid y\in\mathbb{R}^n\}, \\ \Gamma(x,\xi,\eta)&=\{z=y+it\Phi(x,\xi,\eta)\mid y\in\mathbb{R}^n, 0\le t\le 1\} \end{aligned}$$

とおく．$\tilde\chi_\epsilon(z)$ および $\tilde p(z,\xi)$ を $\chi_\epsilon(x)$ および $p(x,\xi)$ の x に関する almost analytic extension とし

$$f_\epsilon(x,z,\xi,\eta)=\tilde\chi_\epsilon(z)\chi_\epsilon(\xi,\eta)\tilde p(x+z,\xi+\eta/2)$$

とおくと $\gamma(x,\xi,\eta)$ 上では $y+i\Phi(x,\xi,\eta)=z$ であるから

$$q_\epsilon(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}\chi(\xi,\eta)d\eta\int_{\gamma(x,\xi,\eta)}e^{-iz\eta}f_\epsilon(x,z-i\Phi,\xi,\eta)dz$$

となる．Stokes の公式より

$$\begin{aligned} \sum\int_\Gamma e^{-iz\eta}\bar\partial_{z_j}f_\epsilon(x,z-i\Phi,\xi,\eta)d\bar z_j\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n \\ =\int_\gamma e^{-iz\eta}f_\epsilon(x,z-i\Phi,\xi,\eta)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n \\ -\int_{\mathbb{R}^n}e^{-iy\eta}f_\epsilon(x,y-i\Phi,\xi,\eta)dy \end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$q_\epsilon=\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{-iy\eta}\chi(\xi,\eta)f_\epsilon(x,y-i\Phi,\xi,\eta)dyd\eta$$

$$+\sum\int_{\mathbb{R}^n}\chi(\xi,\eta)d\eta\int_\Gamma e^{-iz\eta}\bar\partial_{z_j}f_\epsilon(x,z-i\Phi,\xi,\eta)d\bar z_j\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n=q_{1\epsilon}+q_{2\epsilon}$$

を得る．$q_{2\epsilon}$ を評価しよう．$z_j = y_j + it\Phi_j(x,\xi,\eta)$, $dz_j = dy_j + i\Phi_j dt$ より

$$d\bar{z}_j \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = -2i\Phi_j dtdy$$

であるから $\phi(x,\xi+\eta) = \eta\Phi(x,\xi,\eta) + \phi(x,\xi)$ より $e^{\phi(x,\xi)}q_{2\epsilon}$ は

$$\begin{aligned}
&-2i\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n}\chi(\xi,\eta)d\eta\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 e^{-iy\eta+\phi(x,\xi+\eta)}\Phi_j\bar{\partial}_{z_j}f_\epsilon(x,y+i(t-1)\Phi,\xi,\eta)dtdy\\
&\quad = -2i\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{-1}^{0} e^{-iy\eta+\phi(x,\xi+\eta)}\Phi_j\chi(\xi,\eta)\bar{\partial}_{z_j}f_\epsilon(x,y+it\Phi,\xi,\eta)dtdyd\eta
\end{aligned}$$

に等しい．$\bar{\partial}_{z_j}f_\epsilon(x,y+i\hat{y},\xi,\eta) = F(x,y,\hat{y},\xi,\eta)$ とおくと

$$\chi(\xi,\eta)\neq 0 \Longrightarrow \langle\xi\rangle_M/2 \le \langle\xi+\theta\eta\rangle_M \le (\sqrt{2}+1/2)\langle\xi\rangle_M,\quad 0\le\theta\le 1 \tag{2.39}$$

に注意して命題 1.1 と補題 1.2 より $\chi(\xi,\eta)\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&|\partial_{x,y,\hat{y}}^{\beta}\partial_{\xi,\eta}^{\alpha}F(x,y,\hat{y},\xi,\eta)|\\
&\le CA^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta|!^s e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta-\kappa')/(s-1)}}
\end{aligned}$$

を得る．合成関数 $F(x,y,t\Phi,\xi,\eta)$ を評価しよう．$x\leftarrow(x,\xi,\eta)$, $y\leftarrow y$, $z\leftarrow\hat{y}$, $f_j\leftarrow\Phi_j$, $F\leftarrow F$ として系 1.2 を適用すると $\chi(\xi,\eta)\neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^{\beta}\partial_y^{\gamma}\partial_{\xi,\eta}^{\alpha}\bar{\partial}_{z_j}f_\epsilon(x,y+it\Phi,\xi,\eta)\right| &\le Ce^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta-\kappa')/(s-1)}}\\
&\quad\times A^{|\alpha+\beta+\gamma|}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta+\delta|\beta+\gamma|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta+\gamma|!^s
\end{aligned} \tag{2.40}$$

が成り立つ．系 1.3 より $(\xi,\eta)\in\operatorname{supp}\chi$ に対し

$$\left|\partial_x^{\beta}\partial_{\xi,\eta}^{\alpha}e^{\phi(x,\xi+\eta)}\right| \le e^{C\langle\xi\rangle_M^{\kappa}}A^{|\alpha|+|\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}(|\alpha|+|\beta|)!^s$$

が成り立つので以上の評価と補題 1.2 より

$$\begin{aligned}
&\left|\partial_{x,y}^{\beta}\partial_{\xi,\eta}^{\alpha}\big(e^{\phi(x,\xi+\eta)}\chi(\xi,\eta)\Phi_j\bar{\partial}_{z_j}f_\epsilon(x,y+it\Phi,\xi,\eta)\big)\right|\\
&\le Ce^{C\langle\xi\rangle_M^{\kappa}-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta-\kappa')/(s-1)}}A^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{m-\bar{\epsilon}+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}|\beta+\alpha|)!^s
\end{aligned}$$

が成立する．ここで (2.34) より

$$(\rho-\delta-\kappa')/(s-1) > (\rho-\delta)/s > \kappa \tag{2.41}$$

であるから M が大のとき右辺はさらに

$$Ce^{-c'\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}A^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{m-\bar{\epsilon}+\delta|\beta+\gamma|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta|!^s$$

で評価される．次に $\nu = (\rho+\delta)/2$ とおき L を

$$L = (1+\langle\xi\rangle_M^{2\nu}|y|^2+\langle\xi\rangle_M^{-2\nu}|\eta|^2)^{-1}(1+\langle\xi\rangle_M^{2\nu}|D_\eta|^2+\langle\xi\rangle_M^{-2\nu}|D_y|^2) \tag{2.42}$$

で定義し $e^{-iy\eta}$ を $e^{-iy\eta} = L^{n+1}e^{-iy\eta}$ で置き換えて部分積分を行うと $\int(1+\langle\xi\rangle_M^{2\nu}|y|^2+\langle\xi\rangle_M^{-2\nu}|\eta|^2)^{n+1}dyd\eta < C$ より

$$\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha e^{\phi(x,\xi)}q_{2\epsilon}\right| \le Ce^{-c'\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}A^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{m-\bar{\epsilon}+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta|!^s$$

と評価される．$q_{2\epsilon} = e^{-\phi(x,\xi)}(e^{\phi(x,\xi)}q_{2\epsilon})$ と書き $|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha e^{\phi(x,\xi)}|$ の評価に再び系 1.3 を利用する．$\langle\xi\rangle_M^{m-\bar{\epsilon}}$ を $e^{-c'\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}$ で吸収させ (2.41) に注意すると M が大のとき $c''>0$ が存在して

$$\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\ q_{2\epsilon}\right| \le Ce^{-c''\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}A^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta|!^s$$

が成り立つ．$\epsilon\to 0$ として $q_2 \in S_{(s)}(e^{-c''\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}, g)$ を得る．次に $q_{1\epsilon}$ を調べる．

$$q_{1\epsilon} = \int e^{-iy\eta}\chi(\xi,\eta)\tilde{\chi}_\epsilon(y-i\Phi)\chi_\epsilon(\xi,\eta)\tilde{p}(x+y-i\Phi,\xi+\eta/2)dyd\eta \tag{2.43}$$

であった．(2.37) より $\tilde{\chi}_\epsilon(x+iy)$ は $\epsilon>0$ に一様に $S_{(s)}(1,\underline{E}_{\kappa'})$ であるから (2.38) および補題 1.3 から次の評価式

$$\begin{aligned}\Big|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha\big(\chi(\xi,\eta)\tilde{\chi}_\epsilon(y+it\Phi)\chi_\epsilon(\xi,\eta)\tilde{p}(x+y+it\Phi,\xi+\eta/2)\big)\Big|&\\ \le CA^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta|!^s&\end{aligned} \tag{2.44}$$

を得る．(2.42) の L を利用して部分積分すると以前と同様にして

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha q_{1\epsilon}(x,\xi)| \le CA^{|\alpha+\beta|}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}|\alpha+\beta|!^s$$

が成立するので $q_1(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m, g)$ である．q_1 を詳しく調べよう．Taylor 展開より

$$\begin{aligned}\tilde{p}(x+y-i\Phi,\xi+\eta/2) &= \sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}(D_x^\gamma\tilde{p})(x-i\Phi,\xi+\eta/2)(iy)^\gamma\\ &+\sum_{|\gamma|=N}\frac{N}{\gamma!}(iy)^\gamma\int_0^1(1-\theta)^{N-1}(D_x^\gamma\tilde{p})(x+\theta y-i\Phi,\xi+\eta/2)d\theta\end{aligned}$$

となる．この表現を (2.43) に代入し $e^{-iy\eta}(iy)^\gamma = (-\partial_\eta)^\gamma e^{-iy\eta}$ を利用して部分積分すると $q_{1\epsilon}$ は

$$\begin{aligned}\sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}\int\int e^{-iy\eta}\partial_\eta^\gamma\big(\chi(\xi,\eta)\tilde{\chi}_\epsilon(y-i\Phi)\chi_\epsilon(\xi,\eta)(D_x^\gamma\tilde{p})(x-i\Phi,\xi+\eta/2)\big)dyd\eta&\\ +\sum_{|\gamma|=N}\frac{N}{\gamma!}\int\int e^{-iy\eta}\partial_\eta^\gamma\big\{\chi(\xi,\eta)\tilde{\chi}_\epsilon(y-i\Phi)\chi_\epsilon(\xi,\eta)&\\ \times\int_0^1(1-\theta)^{N-1}(D_x^\gamma\tilde{p})(x+\theta y-i\Phi,\xi+\eta/2)d\theta\big\}dyd\eta&\end{aligned}$$

と表される．$|\partial_y^\beta\partial_\eta^\alpha(\chi(\xi,\eta)\tilde{\chi}_\epsilon(y-i\Phi))|\le C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$ また $\chi_\epsilon(\xi,\eta)$ は (2.37) を満たし $\epsilon\to 0$ のとき $\partial_\eta^\alpha\tilde{\chi}_\epsilon(y-i\Phi)\to\partial_\eta^\alpha 1$, $\partial_\eta^\alpha\chi_\epsilon(\xi,\eta)\to\partial_\eta^\alpha 1$ に注意すると上式は $\epsilon\to 0$ として

$$\sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}\int\int e^{-iy\eta}\partial_\eta^\gamma\big(\chi(\xi,\eta)(D_x^\gamma\tilde{p})(x-i\Phi,\xi+\eta/2)\big)dyd\eta$$
$$+\sum_{|\gamma|=N}\frac{N}{\gamma!}\int\int e^{-iy\eta}\partial_\eta^\gamma\big\{\chi(\xi,\eta)$$
$$\times\int_0^1(1-\theta)^{N-1}(D_x^\gamma\tilde{p})(x+\theta y-i\Phi,\xi+\eta/2)d\theta\big\}dyd\eta$$

に収束する．$(2\pi)^{-n}\int e^{-iy\eta}dy=\delta(\eta)$ および $|\alpha|\ge 1$ のとき $\partial_\eta^\alpha\chi(\xi,\eta)\big|_{\eta=0}=0$ に注意すると上式の $\sum_{|\gamma|<N}\cdots$ の項を $\bar{q}_1$ と書けば

$$\bar{q}_1=(2\pi)^n\sum_{|\gamma|<N}\frac{1}{\gamma!}\partial_\eta^\gamma D_x^\gamma\tilde{p}(x-i\Phi(x,\xi,\eta),\xi+\eta/2)\Big|_{\eta=0}$$

となる．剰余項 $\sum_{|\gamma|=N}\cdots$ を $\bar{r}_N$ とおくと $q_1\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ の証明を繰り返して

$$\Big|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\bar{r}_N(x,\xi)\Big|\le C_NA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(\rho-\delta)N}\tag{2.45}$$

を得るので $\bar{r}_N(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-(\rho-\delta)N},g)$ が従う．任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $q_2(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-k},g)$ であるから望む結果を得る．また almost analytic extension の定義から $(D_x^\gamma\tilde{p})(x-i\Phi,\xi,\eta)=\widetilde{p_{(\gamma)}}(x-i\Phi,\xi+\eta/2)$ は明らかである．最後に

$$r_\epsilon=\int e^{-iy\eta+\phi(x,\xi+\eta)}\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)p(x+y,\xi+\eta/2)dyd\eta$$

を評価しよう．$\theta=y\eta+i\phi(x,\xi+\eta)$ とおくと ϕ は実数値ゆえ

$$|(\theta_y,\theta_\eta)|=|(\eta,y+i\nabla_\xi\phi(x,\xi+\eta))|\ge(|\eta|^2+|y|^2)^{1/2}\tag{2.46}$$

である．$\chi^c(\xi,\eta)\ne 0$ のとき

$$\langle\xi+\eta\rangle_M\le(4\sqrt{2}+1)\langle\eta\rangle,\quad 1\le 4\langle\xi\rangle_M^{-1}\langle\eta\rangle\tag{2.47}$$

および $\kappa-\rho<0$ より

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\mu\nabla_\xi\phi(x,\xi+\eta)|\le CA^{|\alpha+\beta+\mu|}|\alpha+\beta+\mu|!^s\langle\eta\rangle^{\delta|\beta|}$$

が成立する．したがって $|\alpha+\beta+\mu+\nu|\ge 1$ で

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\partial_y^\nu\partial_\eta^\mu(\theta_y,\theta_\eta)|\le CA^{|\alpha+\beta+\mu+\nu|}|\alpha+\beta+\mu+\nu|!^s\langle\eta\rangle^{\delta|\beta|}$$

が成り立つ．ゆえに $|\partial_z^\alpha(1+|z|^2)^{-1}| \le CA^{|\alpha|}|\alpha|!^s(1+|z|^2)^{-1}$ と補題 1.3 より

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\partial_y^\nu\partial_\eta^\mu(|\theta_y|^2+|\theta_\eta|^2+1)^{-1}\right| \le CA^{|\alpha+\beta+\mu+\nu|}&|\alpha+\beta+\mu+\nu|!^s\\ &\times(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-2}\langle\eta\rangle^{\delta|\beta|}\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって補題 1.2 より $\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\partial_y^\nu\partial_\eta^\mu(\theta_y,\theta_\eta)/(|\theta_y|^2+|\theta_\eta|^2+1)\right|$ も上式の右辺の $(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-2}$ を $(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-1}$ に置き換えた評価をもつ．今

$$L_1 = (1+|\theta_y|^2+|\theta_\eta|^2)^{-1}(1-\langle\theta_y, D_y\rangle-\langle\theta_\eta, D_\eta\rangle) \tag{2.48}$$

とおくと $L_1 e^{-i\theta} = e^{-i\theta}$ であるから部分積分より

$$r_\epsilon = \int e^{-i\theta}({}^tL_1)^N\big(\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)p(x+y,\xi+\eta/2)\big)dyd\eta$$

であり (2.47) および (2.37) に注意すると系 1.3 を利用して $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha r_\epsilon$ の被積分項は

$$\begin{aligned}&\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha e^{\phi(x,\xi+\eta)}({}^tL_1)^N\big(\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)p(x+y,\xi+\eta/2)\big)\right|\\ &\quad\le Ce^{c\langle\eta\rangle^{\tilde\kappa}}|\alpha+\beta|!^sN!^sA^{|\alpha+\beta|+N}\langle\eta\rangle^{m+\delta|\beta|+\delta N}(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-N}\end{aligned}$$

と評価される．$\langle\eta\rangle^{m+\delta|\beta|+\delta N}(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-N} \le (\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-(1-\delta)N+m+\delta|\alpha+\beta|}$ に注意して与えられた $\ell\in\mathbb{N}$ に対し N を $(\ell+\delta|\alpha+\beta|+m)/(1-\delta)\le N$ なる最小の自然数とするとき

$$(\ell+\delta|\alpha+\beta|+m)^{(\ell+\delta|\alpha+\beta|+m)/(1-\delta)} \le C_1A_1^{\ell+|\alpha+\beta|}\ell^{\ell/(1-\delta)}|\alpha+\beta|^{\delta|\alpha+\beta|/(1-\delta)}$$

に注意すると $N!^s \le C_2A_2^{|\alpha+\beta|+\ell}\ell^{s\ell/(1-\delta)}|\alpha+\beta|!^{s\delta/(1-\delta)}$ が成立するので右辺は

$$Ce^{c\langle\eta\rangle^{\tilde\kappa}}|\alpha+\beta|!^{s/(1-\delta)}A_2^{|\alpha+\beta|+\ell}\frac{\ell^{s\ell/(1-\delta)}}{(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^\ell}$$

で評価される．いま ℓ を $((\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)/eA_2)^{(1-\delta)/s}\le\ell$ なる最小の自然数と選ぶとこの項は適当な $c'>0$ について

$$Ce^{c\langle\eta\rangle^{\tilde\kappa}}|\alpha+\beta|!^{s/(1-\delta)}A_2^{|\alpha+\beta|}e^{-c'(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{(1-\delta)/s}}$$

で評価される．一方 $\tilde\kappa<(1-\delta)/s$ で $\chi^c(\xi,\eta)$ の台上では $4\langle\eta\rangle\ge\langle\xi\rangle_M$ であったから (y,η) に関する積分を行うと

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha r_\epsilon(x,\xi)| \le Ce^{-(c'/2)\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}}A_2^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^{s/(1-\delta)} \tag{2.49}$$

が成立する．$\epsilon\to0$ として $r(x,\xi)\in S_{(s/(1-\delta))}(e^{-c''\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}}, g)$ である．ここで

$$1 \le CA^{|\alpha|}|\alpha|^{s\rho|\alpha|/(1-\delta)}\langle\xi\rangle_M^{-\rho|\alpha|}e^{(c''/2)\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}} \tag{2.50}$$

および $1/(1-\delta)+\rho/(1-\delta)=d$ に注意すると $r(x,\xi)\in S_{(sd)}(e^{-(c''/2)\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}}, g)$ が従う．　□

2.4 定理 2.1 の証明 (続き)

$q_i \in S_{(s)}(\langle \mu\xi\rangle^{m_i}, g)$ $(i=1,2)$ として $\mathrm{op}^0(e^{\phi}q_1)\mathrm{op}^1(e^{-\phi}q_2)$ を考察する．

$$\phi(x+y/2,\xi)-\phi(x-y/2,\xi)=y\int_{-1/2}^{1/2}\nabla_x\phi(x+\theta y,\xi)d\theta=y\Psi(x,\xi,y)$$

とおくと $\Psi(x,\xi,y)\in\tilde{S}_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta},g)$ は明らかである．$\Psi(x,\xi,y)$ の ξ に関する almost analytic extension を $\Psi(x,\zeta,y)=\Psi(x,\xi+i\hat{\xi},y)$ で表すと定義より

$$\Psi(x,\zeta,y)=\int_{-1/2}^{1/2}\nabla_x\tilde{\phi}(x+\theta y,\zeta)d\theta$$

は明らかであり命題 1.4 より

$$\Xi(x,\zeta,y)=\zeta-i\Psi(x,\Xi(x,\zeta,y),y),\quad \zeta=\eta+i\hat{\eta},$$
$$\Xi(x,\zeta,y)=\zeta+G(x,\zeta,y),\;\; G(x,\zeta,y)\in S_{(s)}(\langle\eta\rangle_M^{\kappa+\delta};\bar{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n)$$

を満たす Ξ が一意に存在する．

命題 2.2. $q_i\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m_i},g)$ とする．このとき $p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m_1+m_2},g)$ および $r(x,\xi)\in S_{(sd)}(e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}},g)$, $(c>0)$ が存在して

$$\mathrm{op}^0(e^{\phi}q_1)\mathrm{op}^1(e^{-\phi}q_2)=\mathrm{op}(p)+\mathrm{op}(r)$$

と書ける．$p(x,\xi)$ は任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\big(J(x,\xi,y)\tilde{q}_1(x+y/2,\Xi(x,\xi,y))$$
$$\times\tilde{q}_2(x-y/2,\Xi(x,\xi,y))\big)\big|_{y=0}+R_N(x,\xi)$$

と表される．ここで $\tilde{q}_i(x,\zeta)$ は $q_i(x,\xi)$ の ξ に関する almost analytic extension で

$$J(x,\xi,y)=\det(\partial\Xi(x,\xi,y)/\partial\xi),\;\; R_N(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m_1+m_2-(\rho-\delta)N},g)$$

である．

Proof. $\mathrm{op}^0(e^{\phi}q_1)\mathrm{op}^1(e^{-\phi}q_2)u(x)$ は定義より

$$(2\pi)^{-2n}\iint e^{iy(\eta-\xi)+ix\xi-iz\eta+\phi(x,\xi)-\phi(z,\eta)}q_1(x,\xi)q_2(z,\eta)u(z)dyd\xi dzd\eta$$

であるが $(2\pi)^{-n}\int e^{iy\zeta}dy=\delta(\zeta)$ に注意すると上式は $\mathcal{O}p(a)u(x)$

$$a(x,\xi,z)=e^{\phi(x,\xi)-\phi(z,\xi)}q_1(x,\xi)q_2(z,\xi)$$

に等しいから $\mathcal{O}p(a)=\mathrm{op}(b)$ とすると補題**??**より b は

$$q(x,\xi,y)=q_1(x+y/2,\xi)q_2(x-y/2,\xi)$$

とおくと

$$b(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy(\eta-\xi+\phi(x+y/2,\eta)-\phi(x-y/2,\eta)} q(x,\eta,y)dyd\eta$$

で与えられる．ここまでの形式的計算は振動積分によって正当化されて

$$b(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon\to 0} \int e^{iy(\eta-\xi-i\Psi(x,\eta,y))} \chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta-\xi)q(x,\eta,y)dyd\eta$$

となる．$(2\pi)^{-n}$ を省略して

$$q_\epsilon = \int e^{iy(\eta-\xi-i\Psi(x,\eta,y))} \chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta-\xi)\chi(\xi,\eta-\xi)q(x,\eta,y)dyd\eta,$$
$$r_\epsilon = \int e^{iy(\eta-\xi-i\Psi(x,\eta,y))} \chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta-\xi)\chi^c(\xi,\eta-\xi)q(x,\eta,y)dyd\eta$$

とおく．$q = \lim_{\epsilon\to 0} q_\epsilon$ および $r = \lim_{\epsilon\to 0} r_\epsilon$ とすると

$$\mathrm{op}^0(e^\phi q_1)\mathrm{op}^1(e^{-\phi} q_2) = \mathrm{op}(q) + \mathrm{Op}(r)$$

が成立する．ここで

$$h_\epsilon(x,\xi,y,\eta) = \chi(\xi,\eta-\xi)\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta-\xi)q(x,\eta,y),$$
$$q_\epsilon(x,\xi,y) = \int dy \int e^{iy(\eta-\xi-i\Psi(x,\eta,y))} h_\epsilon(x,\xi,y,\eta)d\eta$$

とおこう．$C>0$ があって $\chi(\xi,\eta-\xi)\neq 0$ のとき $\langle\xi\rangle_M/C \le \langle\eta\rangle_M \le C\langle\xi\rangle_M$ に注意すると

$$|\partial_{x,y}^\beta \partial_{\xi,\eta}^\alpha h_\epsilon| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s \langle\eta\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}, \quad x,y,\xi,\eta\in\mathbb{R}^n \tag{2.51}$$

$(m = m_1+m_2)$ が成立する．次に $\tilde{\chi}(\xi,\zeta-\xi)$, $\tilde{q}_i(x,\zeta)$ を $\chi(\xi,\eta-\xi)$, $q_i(x,\eta)$ の η に関する almost analytic extension として

$$\tilde{h}_\epsilon(x,\xi,y,\zeta) = \tilde{\chi}(\xi,\zeta-\xi)\chi_\epsilon(y)\tilde{\chi}_\epsilon(\xi,\zeta-\xi)\tilde{q}(x,\zeta,y),$$
$$\tilde{q}(x,\zeta,y) = \tilde{q}_1(x+y/2,\zeta)\tilde{q}_2(x-y/2,\zeta), \quad \zeta = \eta + i\hat{\eta}$$

とおく．従って $(x,\xi,y,\zeta)\in\mathbb{R}^{2n}\times\bar{E}_{\kappa'}$ で定義されている．系 1.5 と (2.51) より

$$|\partial_{x,y}^\beta \partial_{\xi,\eta,\hat{\eta}}^\alpha \tilde{h}_\epsilon| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s \langle\eta\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$$

が成り立つ．次のようにおこう．

$$\gamma(x,y) = \{\zeta = \eta - i\Psi(x,\eta,y) \mid \eta\in\mathbb{R}^n\},$$
$$\Gamma = \{\zeta = \eta - it\Psi(x,\eta,y) \mid \eta\in\mathbb{R}^n, 0\le t\le 1\}.$$

このとき $q_\epsilon(x,\xi,y)$ は次のように書き換えられる．

$$q_\epsilon = \int dy \int_{\gamma(x,y)} e^{iy(\zeta-\xi)} J(x,\zeta,y)\tilde{h}_\epsilon(x,\xi,y,\Xi(x,\zeta,y))d\zeta,$$
$$J(x,\zeta,y) = \det(\partial\Xi(x,\zeta,y)/\partial\zeta).$$

ここで $\partial\Xi(x,\zeta,y)/\partial\zeta = I+\partial G(x,\zeta,y)/\partial\zeta$, $\partial G(x,\zeta,y)/\partial\zeta \in S_{(s)}(\langle\eta\rangle_M^{-\bar{\epsilon}};\bar{E}_\kappa\times\mathbb{R}^n)$ から補題 1.2 より

$$|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\eta,\hat{\eta}}^\alpha J(x,\zeta,y)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\eta\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}, \quad \zeta=\eta+i\hat{\eta}$$

を得る．$|\alpha+\beta|\ge 1$ で $|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\eta,\hat{\eta}}^\alpha\Xi(x,\zeta,y)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\eta\rangle_M^{\rho+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$ と (2.51) に注意して補題 1.4 を適用すると

$$|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta,\hat{\eta}}^\alpha\tilde{h}_\epsilon(x,\xi,y,\Xi(x,\zeta,y))| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\eta\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$$

が成り立つ．従って補題 1.2 より

$$\begin{gathered}H_\epsilon(x,\xi,y,\zeta)=J(x,\zeta,y)\tilde{h}_\epsilon(x,\xi,y,\Xi(x,\zeta,y)),\\ |\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta,\hat{\eta}}^\alpha H_\epsilon(x,\xi,y,\zeta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\eta\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}\end{gathered} \tag{2.52}$$

を得る．Stokes の公式より

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(x,y)} e^{iy(\zeta-\xi)}H_\epsilon(x,\xi,y,\zeta)d\zeta &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\eta}H_\epsilon(x,\xi,y,\eta+\xi)d\eta\\ &\quad+\sum_{j=1}^n\int_\Gamma e^{iy(\zeta-\xi)}\bar{\partial}_{\zeta_j}H_\epsilon(x,\xi,y,\zeta)d\bar{\zeta}_j\wedge d\zeta\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{gathered}q_\epsilon(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}dy\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{iy\eta}H_\epsilon(x,\xi,y,\eta+\xi)d\eta\\ +\sum_{j=1}^n\int dy\int_\Gamma e^{iy(\zeta-\xi)}\bar{\partial}_{\zeta_j}H_\epsilon(x,\xi,y,\zeta)d\bar{\zeta}_j\wedge d\zeta = q_{1\epsilon}+q_{2\epsilon}\end{gathered}$$

が得られる．最初に $q_{1\epsilon}$ を考察する．almost analytic extension の定義から $|\eta|\langle\xi\rangle_M^{-1}\ge 1/2$ のとき $\tilde{\chi}(\xi,\zeta)=0$ に注意する．$\Xi(x,\eta+\xi,y)-\xi=\eta+G(x,\eta+\xi,y)$ より

$$\tilde{\chi}(\xi,\Xi(x,\eta+\xi,y)-\xi)\neq 0 \Longrightarrow \langle\xi\rangle_M^{-1}|\eta+\mathsf{Re}\,G(x,\xi+\eta,y)|\le 1/2$$

が成り立ち $|G(x,\zeta+\xi,y)|\le C\langle\eta+\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}$ に注意すると $1>\kappa+\delta$ であるから十分大な M と $|\eta|$ に対して $|\eta|\le 2\langle\xi\rangle_M/3$ が成り立ち従って

$$C^{-1}\langle\xi\rangle_M \le \langle\xi+\eta\rangle_M \le C\langle\xi\rangle_M, \quad \langle\eta\rangle_M\le C\langle\xi\rangle_M \tag{2.53}$$

が成立する．ゆえに (2.52) より

$$|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha H_\epsilon(x,y,\xi,\xi+\eta)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$$

が従う．次に (2.42) の L を利用して $e^{-iy\eta}$ を $L^\ell e^{-iy\eta}$ でおき換えて部分積分を行うと

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha q_{1\epsilon}(x,\xi)| \le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}$$

が得られ従って $q_1(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ が分かる．y に関する Taylor 展開より

$$H_\epsilon(x,y,\xi,\xi+\eta)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}D_y^\alpha H_\epsilon(x,0,\xi,\xi+\eta)(iy)^\alpha$$
$$+\sum_{|\alpha|=N}\frac{N}{\alpha!}(iy)^\alpha\int_0^1(1-\theta)^{N-1}D_y^\alpha H_\epsilon(x,\theta y,\xi,\xi+\eta)d\theta$$

と書くと $\int e^{iy\eta}H_\epsilon(x,y,\xi,\xi+\eta)dyd\eta$ は

$$\sum_{|\alpha|<N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\int e^{iy\eta}\partial_\eta^\alpha D_y^\alpha H_\epsilon(x,0,\xi,\xi+\eta)dyd\eta$$
$$+N\sum_{|\alpha|=N}\frac{(-1)^N}{\alpha!}\int\int_0^1 e^{-iy\eta}(1-\theta)^{N-1}\partial_\eta^\alpha D_y^\alpha H_\epsilon(x,\theta y,\xi,\xi+\eta)d\theta dyd\eta$$
$$=(2\pi)^n\sum_{|\alpha|<N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha D_y^\alpha H_\epsilon(x,0,\xi,\xi+\eta)\Big|_{\eta=0}+r_{\epsilon N}$$

に等しい．剰余項 $r_{\epsilon N}$ については上記の L を用いて部分積分すると

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha r_{\epsilon N}|\le CA^{|\alpha+\beta|+2N}|\alpha+\beta|!^s N^{(2s-1)N}\langle\xi\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|-(\rho-\delta)N}\tag{2.54}$$

が容易に確かめられる．$|G(x,\xi,0)|\le C\langle\xi\rangle_M^{\kappa+\delta}\le C'M^{-(1-\delta-\kappa)}\langle\xi\rangle_M$ より十分大な M をとると任意の $|\alpha|\ge 1$ に対して $\widetilde{\partial_{\xi,\eta}^\alpha}\chi(\xi,G(x,\xi,0))=0$ ゆえ命題 1.1 より

$$\partial_{\xi,\eta}^\alpha\tilde\chi(\xi,G(x,\xi,0))\in S_{(s)}(1,e^{-c\langle\xi\rangle_M^{\bar\epsilon/(s-1)}},g),\quad |\alpha|\ge 1\tag{2.55}$$

が成り立つ．従って $\epsilon\to 0$ として $q(x,\xi)$ は

$$\sum_{|\alpha|<N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha D_y^\alpha\big(J(x,\xi+\eta,y)q(x,\Xi(x,\xi+\eta,y),y)\big)\big|_{y=0,\eta=0}+r_N(x,\xi)$$
$$=\sum_{|\alpha|<N}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\big(J(x,\xi,y)q(x,\Xi(x,\xi,y),y)\big)\big|_{y=0}+r_N(x,\xi)$$

で与えられる．ここで (2.54), (2.55) より $r_N(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-(\rho-\delta)N},g)$ である．次に $q_{2\epsilon}$ を調べる．$\zeta_j=\eta_j-it\Psi_j(x,\eta,y)$ とおくと

$$d\bar\zeta_j\wedge d\zeta=J_j(x,y,t,\eta)dtd\eta,\quad J_j=\det\Big(\frac{\partial(\eta_j+it\bar\Psi_j,\eta-it\Psi)}{\partial(t,\eta)}\Big)$$

である．従って次のように書き換えることができる．

$$q_{2\epsilon}=\sum_{j=1}^n\int\int_0^1 e^{iy(\eta-it\Psi(x,y,\xi+\eta))}J_j(x,y,t,\xi+\eta)$$
$$\times(\bar\partial_{\zeta_j}H_\epsilon)(x,y,\xi,\eta+\xi-it\Psi(x,y,\xi+\eta))dyd\eta dt$$
$$=\sum\int\int_0^1 e^{iy\eta+t\psi(x,\xi+\eta,y)}J_jM_\epsilon(x,y,\xi,\xi+\eta,t)dyd\eta dt$$

ここで

$$M_\epsilon(x,y,\xi,\eta,t)=(\bar\partial_{\zeta_j}H_\epsilon)(x,y,\xi,\eta-it\Psi(x,\eta,y)),$$
$$\phi(x+y/2,\xi)-\phi(x-y/2,\xi)=\psi(x,\xi,y)$$

とした．(2.53) の証明を繰り返すと $\tilde\chi(\xi,\eta-it\Psi(x,\xi+\eta,y))\neq 0$ のとき $0\le t\le 1$ に一様に (2.53) が成立することが分かる．従ってこのとき系 1.3 より

$$\left|\partial_{x,y}^\alpha\partial_{\xi,\eta}^\beta e^{\psi(x,y,\xi+\eta)}\right|\le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^{c\langle\xi\rangle_M^\kappa}$$

が成立する．$H=H_\epsilon$ と ϵ を省略して書くと

$$\begin{aligned}\bar\partial_{\zeta_j}H(x,\Xi(x,\zeta,y),y)&=H_\eta\bar\partial_{\zeta_j}\mathrm{Re}\,\Xi+H_{\hat\eta}\bar\partial_{\zeta_j}\mathrm{Im}\,\Xi\\&=H_\eta\bar\partial_{\zeta_j}\Xi-i\bar\partial_\Xi H\bar\partial_{\zeta_j}\mathrm{Im}\,\Xi\end{aligned}$$

であり $\bar\partial_{\zeta_j}\Xi$ と $\bar\partial_\Xi H$ は命題 1.4 と (2.41) より

$$|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\eta,\hat\eta}^\alpha\bar\partial_{\zeta_j}\Xi(x,\zeta,y)|\le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^sM^{-2\bar\epsilon}\langle\eta\rangle_M^{\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^{-c\langle\eta\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}},$$
$$|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\eta,\hat\eta}^\alpha\bar\partial_\zeta H(x,\zeta,y)|\le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\eta\rangle_M^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|-\rho}e^{-c\langle\eta\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}$$

を満たす．ゆえに補題 1.4 より

$$\begin{aligned}|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha(\bar\partial_{\zeta_j}H_\epsilon)(x,y,\xi,\xi+\eta)|&\le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\\&\times M^{-2\bar\epsilon}\langle\xi\rangle_M^{m-\rho+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}\end{aligned}\tag{2.56}$$

が成立する．$\rho-\delta>\kappa s$ より

$$\begin{aligned}&|\partial_{x,y}^\beta\partial_{\xi,\eta}^\alpha e^{\psi(x,y,\xi+\eta)}J_j(x,y,t,\xi+\eta)M_\epsilon(x,y,\xi,\xi+\eta,t)|\\&\le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^sM^{-2\bar\epsilon}\langle\xi\rangle_M^{m-\rho+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}\end{aligned}\tag{2.57}$$

が従う．ここで (2.42) の L を用いて部分積分を行うと

$$\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha q_{2\epsilon}\right|\le CA^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{m-\rho+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}$$

が得られ $q_2(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-\rho}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}},g)$ が従う．特に任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $q_2(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-k},g)$ である．次に

$$r_\epsilon=\int e^{iy\eta+\psi(x,\xi+\eta,y)}\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y,\xi+\eta)q(x,\xi+\eta,y)dyd\eta$$

を評価しよう．$\theta=y\eta-i\psi(x,\xi+\eta,y)$ とおくと ψ は実数値であるから (2.46) が成り立つ．$(\xi,\eta)\in\mathrm{supp}\,\chi^c$ 上では $\langle\xi\rangle_M\le 4\langle\eta\rangle$ であるから補題 1.3 を適用して

$$\begin{aligned}\left|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\partial_y^\nu\partial_\eta^\mu\frac{(\theta_y,\theta_\eta)}{|\theta_y|^2+|\theta_\eta|^2+1}\right|&\le CA^{|\alpha+\beta+\mu+\nu|}|\alpha+\beta+\mu+\nu|!^s\\&\times(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-1}\langle\xi\rangle_M^{-\rho|\alpha|}\langle\eta\rangle^{\rho|\alpha|+\delta|\beta|+\delta|\nu|}\end{aligned}\tag{2.58}$$

が成立する．(2.48) の L_1 を用いて部分積分を N 回繰り返すと r_ϵ は

$$\int e^{iy\theta}({}^tL_1)^N\big(\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y,\xi+\eta)q(x,\xi+\eta,y)\big)dyd\eta$$

に等しい．$\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha r_\epsilon$ を評価するとその被積分項は系 1.3 と (2.58) より

$$\Big|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha e^{\psi(x,\xi+\eta,y)}({}^tL_1)^N\big(\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y,\xi+\eta)q(x,\xi+\eta,y)\big)\Big|$$
$$\leq Ce^{c\langle\eta\rangle^{\tilde\kappa}}|\alpha+\beta|!^sN!^sA^{|\alpha+\beta|+N}\langle\eta\rangle^{m+\delta|\beta|+\delta N}(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^{-N}$$

と評価される．ここで (2.49), (2.50) と全く同様にして

$$r(x,\xi)\in S_{(s/(1-\delta))}(e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}},g)\subset S_{(sd)}(e^{-c'\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}},g)$$

が従う． □

命題 2.3. $s>1$, $\kappa>0$ で

$$p(x,\xi)\in S_{(s)}(e^{c\langle\xi\rangle_M^\kappa}\langle\xi\rangle_M^{m_1},g),\quad q(x,\xi)\in S_{(s)}(e^{c'\langle\xi\rangle_M^\kappa}\langle\xi\rangle_M^{m_2},g)$$

とする．$c+c'\leq 0$ とすると

$$\mathrm{op}^0(p)\mathrm{op}^1(q)=\mathrm{op}(r_1)+\mathrm{op}(r_2)$$

と書ける．ここである $c_i>0$ について $r_1(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m_1+m_2}e^{c_1(c+c')\langle\xi\rangle_M^\kappa},g)$, $r_2(x,\xi)\in S_{(sd)}(e^{-c_2\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}},g)$ である．特に $c+c'<0$ のときは任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\mathrm{op}^0(p)\mathrm{op}^1(q)\in\mathrm{op}(S_{(sd)}(\langle\xi\rangle_M^{-k},g))$ である．

Proof. $\mathrm{op}^0(p)\mathrm{op}^1(q)=\mathrm{op}(r)$ とすると補題**??**より

$$r(x,\xi)=\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{iy\eta}\chi_\epsilon(y,\eta)a(x,\xi+\eta,y)dyd\eta$$

である．ここで $a(x,\xi,y)=p(x+y/2,\xi)q(x-y/2,\xi)$ とおいた．

$$r_{1\epsilon}(x,\xi)=\int e^{iy\eta}\chi(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y,\eta)a(x,\xi+\eta,y)dyd\eta,$$
$$r_{2\epsilon}(x,\xi)=\int e^{iy\eta}\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y,\eta)a(x,\xi+\eta,y)dyd\eta$$

とおこう．$\chi(\xi,\eta)\neq 0$ のとき $C(c+c')\langle\xi\rangle_M\leq(c+c')\langle\xi+\eta\rangle_M\leq(c+c')\langle\xi\rangle_M/C$ に注意する．ゆえに (2.42) の L を用い $e^{iy\eta}=L^{n+1}e^{iy\eta}$ を利用して部分積分すると $c_1>0$ があって

$$\big|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha r_{1\epsilon}\big|\leq C_\ell A^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^s\langle\xi\rangle_M^{m_1+m_2+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}e^{c_1(c+c')\langle\xi\rangle_M^\kappa}$$

と評価される．次に $r_{2\epsilon}$ を考えよう．$e^{iy\eta}=\langle y\rangle^{-2\ell}\langle D_\eta\rangle^{2\ell}\langle\eta\rangle^{-2N}\langle D_y\rangle^{2N}e^{iy\eta}$ を利用して部分積分すると $\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha r_{2\epsilon}$ の被積分項は $c+c'\leq 0$ に注意して

$$\big|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha\langle D_y\rangle^{2N}\langle\eta\rangle^{-2N}\langle D_\eta\rangle^{2\ell}\langle y\rangle^{-2\ell}\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y,\eta)a(x,\xi+\eta,y)\big|$$
$$\leq C_\ell A^{|\alpha+\beta|+2N}|\alpha+\beta|!^s(2N)!^s\langle\eta\rangle^{|m_1+m_2|+\delta|\beta|+2\delta N}\langle y\rangle^{-2\ell}\langle\eta\rangle^{-2N}$$

と評価される．$k=[\langle\eta\rangle^{(1-\delta)/s}]$ と選び N を $N=[(|m_1+m_2|+\delta|\alpha+\beta|+k)/2(1-\delta)]$ また ℓ を $2\ell>n+1$ と選び (2.49) の証明を繰り返すと

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha r_2(x,\xi)|\le CA_1^{|\alpha+\beta|}|\alpha+\beta|!^{s/(1-\delta)}e^{-c_2\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}},\quad c_2>0$$

が得られ (2.50) より $r_2\in S_{(sd)}(e^{-c_2'\langle\xi\rangle_M^{(1-\delta)/s}},g)$ が従う． □

系 2.1. ϕ, $\tilde\phi\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^\kappa,g)$ が $\tilde\phi+\phi\in S_{(s)}S(1,g)$ を満たすとする．このとき $p\in S_{(sd^2)}(1,g)$ があって

$$\mathrm{op}^0(e^{\tilde\phi})\mathrm{op}^1(e^\phi)=\mathrm{op}(p).$$

Proof. 仮定より $\tilde\phi=-\phi+\psi$, $\psi\in S_{(s)}(1,g)$ と書ける．補題 1.3 より $e^\psi=q\in S_{(s)}(1,g)$ である．従って定理 2.1 より結論を得る． □

定理 2.1 の証明: 命題 2.1 より

$$\mathrm{op}^0(e^\phi)\mathrm{op}(p)=\mathrm{op}^0(e^\phi q)+\mathrm{op}^0(r_1)$$

を満たす $q\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ と $r_1\in S_{(sd)}(e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}},g)$ がある．これに右側から $\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$ を作用させると

$$\mathrm{op}^0(e^\phi q)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})+\mathrm{op}^0(r_1)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$$

を得る．$(\rho-\delta)/s>\tilde\kappa$ より命題 2.3 から任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\mathrm{op}^0(r_1)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})\in\mathrm{op}\big(S_{(sd^2)}(\langle\xi\rangle_M^{-k},g)\big)$ であることが分かる．また q は

$$q=q_0+q_N,\quad q_0\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g),\ \ q_N\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-(\rho-\delta)N},g),$$
$$q_0(x,\xi)=\sum_{|\beta|<N}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!}\partial_\eta^\beta\partial_x^\beta\tilde p(x-i\Phi(x,\xi,\eta),\xi+\eta/2)_{\eta=0}$$

と書ける．ここで

補題 2.1. $p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ とする．このとき

$$\mathrm{op}^0(e^\phi)\mathrm{op}(p)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})=\mathrm{op}(\tilde p)+\mathrm{op}(r)$$

と書ける．ここで $\tilde p(x,\xi)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$ でありまた任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $r(x,\xi)\in S_{(sd^2)}(\langle\xi\rangle_M^{-k},g)$ である．

Proof. 命題 2.1 より $\mathrm{op}^0(e^\phi)\mathrm{op}(p)=\mathrm{op}^0(e^\phi q)+\mathrm{op}^0(r)$ と表すことができる．ここで $q\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m,g)$, $r\in S_{(sd)}(e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}},g)$ $(c>0)$ である．この式の右から $\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$ を作用させよう．

$$\mathrm{op}^0(e^\phi)\mathrm{op}(p)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})=\mathrm{op}^0(e^\phi q)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})+\mathrm{op}^0(r)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$$

ここで $\mathrm{op}^0(e^{\phi}q)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$ に命題 2.2 を適用すると $\tilde{p} \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^m, g)$ および $\tilde{r} \in S_{(sd)}(e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}, g)$ があって $\mathrm{op}^0(e^{\phi}q)\mathrm{op}^1(e^{-\phi}) = \mathrm{op}(\tilde{p}) + \mathrm{op}(\tilde{r})$ となる．また $\mathrm{op}^0(r)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$ に命題 2.3 を適用すると任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{op}^0(r)\mathrm{op}^1(e^{-\phi}) \in S_{(sd^2)}(\langle\xi\rangle_M^{-k}, g)$$

である．従って証明された． □

補題 2.1 から $\mathrm{op}^0(e^{\phi}q_N)\mathrm{op}^1(e^{-\phi}) \in \mathrm{op}^0\big(S_{(sd)}(\langle\xi\rangle_M^{m-(\rho-\delta)N}, g)\big)$ を得る．次に $\mathrm{op}^0(e^{\phi}q_0)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$ を考えよう．命題 2.2 を適用すると $\mathrm{op}^0(e^{\phi}q_0)\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$ は

$$\mathrm{op}\Big(\sum_{|\alpha|<N} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha\big(J(x,\xi,y)\tilde{q}_0(x+y/2, \Xi(x,\xi,y))\big)\big|_{y=0}\Big)$$
$$+\mathrm{op}\big(S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{m-(\rho-\delta)N}, g)\big) + \mathrm{op}\big(S_{(sd)}(\langle\xi\rangle_M^{-k}, g)\big)$$

で与えられる．$N = 1$ と選び

$$\tilde{q}_0(x,\zeta) = \tilde{p}(x - i\Phi(x,\zeta,0), \zeta), \quad \Phi(x,\zeta,0) = \widetilde{\nabla_\xi\phi}(x,\zeta)$$

および $\Xi(x,\xi,0) - i\nabla_x\tilde{\phi}(x, \Xi(x,\xi,0)) = \xi$ に注意すると上式第 1 項は

$$J(x,\xi,0)\tilde{p}(x - i\widetilde{\nabla_\xi\phi}(x, \Xi(x,\xi,0)), \xi + i\nabla_x\tilde{\phi}(x, \Xi(x,\xi,0)))$$

であるが (1.11) と補題 1.2 より

$$\widetilde{\nabla_\xi\phi}(x, \Xi(x,\xi,0)) - \nabla_\xi\tilde{\phi}(x, \Xi(x,\xi,0)) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{\kappa-\rho}e^{-c\langle\xi\rangle_M^{\bar{\epsilon}/(s-1)}}, g)$$

ゆえ $\widetilde{\nabla_\xi\phi}(x, \Xi(x,\xi,0))$ を $\nabla_\xi\tilde{\phi}(x, \Xi(x,\xi,0))$ に置き換えてよい．$\Xi(x,\xi,0)$ を $\Xi(x,\xi)$ と書いて証明が終わる． □

命題 2.2 で $q_1 = q_2 = 1$ とすると合成 $\mathrm{op}^0(e^{\phi})\mathrm{op}^1(e^{-\phi})$ に関する結果が得られる．同様にして合成 $\mathrm{op}^1(e^{-\phi})\mathrm{op}^0(e^{\phi})$ に対する結果を得ることもできる．

命題 2.4. $p(x,\xi) \in S_{(s)}(1, g)$ および $r(x,\xi) \in S_{(sd)}(e^{-c\langle\xi\rangle_M^{(\rho-\delta)/s}}, g)$ が存在して

$$\mathrm{op}^1(e^{-\phi})\mathrm{op}^0(e^{\phi}) = \mathrm{op}(p) + \mathrm{op}(r)$$

と書ける．p は任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}\partial_\eta^\alpha D_x^\alpha J(x,\xi,\eta)\big|_{\eta=0} + R_N(x,\xi)$$

と書ける．ここで

$$J(x,\xi,\eta) = \det(\partial X(x,\xi,\eta)/\partial x), \quad R_N(x,\xi) \in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-(\rho-\delta)N}, g)$$

で $X(x,\xi,\eta)$ は命題 *1.5* で与えられる

$$X + i\Phi(X,\xi,\eta) = x, \quad \Phi(z,\xi,\eta) = \int_{-1/2}^{1/2} \nabla_\xi\tilde{\phi}(z, \xi+\theta\eta)d\theta$$

の一意解である．$\tilde{\phi}(z,\xi)$ は $\phi(x,\xi)$ の x に関する almost analytic extension で

$$J(x,\xi,0)-(1-i\sum_{j=1}^{n}\partial^2\phi(x,\xi)/\partial x_j\partial\xi_j)\in S_{(s)}(\langle\xi\rangle_M^{-2\bar{\epsilon}},g).$$

Proof. $\mathrm{op}^1(e^{\phi})\mathrm{op}^0(e^{-\phi})=\mathrm{op}(q)$ とすると補題**??**より

$$q(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\lim_{\epsilon\to 0}\int e^{-i\eta y+\phi(y+x,\xi+\eta/2)-\phi(y+x,\xi-\eta/2)}\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)dyd\eta$$

である．$(2\pi)^{-n}$ を省略して

$$q_\epsilon=\int e^{-i\eta y+\phi(y+x,\xi+\eta/2)-\phi(y+x,\xi-\eta/2)}\chi(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)dyd\eta,$$
$$r_\epsilon=\int e^{-i\eta y+\phi(y+x,\xi+\eta/2)-\phi(y+x,\xi-\eta/2)}\chi^c(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y)\chi_\epsilon(\xi,\eta)dyd\eta$$

とおく．さらに

$$\phi(y,\xi+\eta/2)-\phi(y,\xi-\eta/2)=\eta\int_{-1/2}^{1/2}\nabla_\xi\phi(y,\xi+\theta\eta)d\theta=\eta\Phi(y,\xi,\eta)$$

とおくと

$$q_\epsilon(x,\xi)=\int e^{-i\eta(y-x+i\Phi(y,\xi,\eta))}\chi(\xi,\eta)\chi_\epsilon(y-x)\chi_\epsilon(\xi,\eta)dyd\eta$$

と書ける．$H_\epsilon(z,x,\xi,\eta)=\chi(\xi,\eta)\tilde{\chi}_\epsilon(X(z,\xi,\eta)-x)\chi_\epsilon(\xi,\eta)J(z,\xi,\eta)$ とおくと Stokes の公式より

$$q_\epsilon(x,\xi)=\int d\eta\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\eta y}H_\epsilon(x+y,x,\xi,\eta)dy$$
$$+\sum\int d\eta\int_\Gamma e^{i\eta(z-x)}\bar{\partial}_{z_j}H_\epsilon(z,x,\xi,\eta)d\bar{z}_j\wedge dz$$

である．ここで $\Gamma=\{z=y+it\Phi(y,\xi,\eta)\mid y\in\mathbb{R}^n,0\le t\le 1\}$ である．Φ が y に依存するのでこの場合は $J(z,\xi,\eta)$ が現れる．以下は命題 2.2 の証明と同様の議論を繰り返せばよい． □

References

[1] K.Kajitani, T.Nishitani; The Hyperbolic Cauchy Problem, Lecture Notes in Math. **1505**, Springer-Verlag (1991)

[2] T.Nishitani, M.Tamura; A class of Fourier integral operators with complex phase related to the Gevrey classes, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. **1** (2010), 255-292.