２００４年度 整数論サマースクール 「基本群とガロア表現」 報告集所収

# 曲線の moduli 空間の基本群への Galois 作用

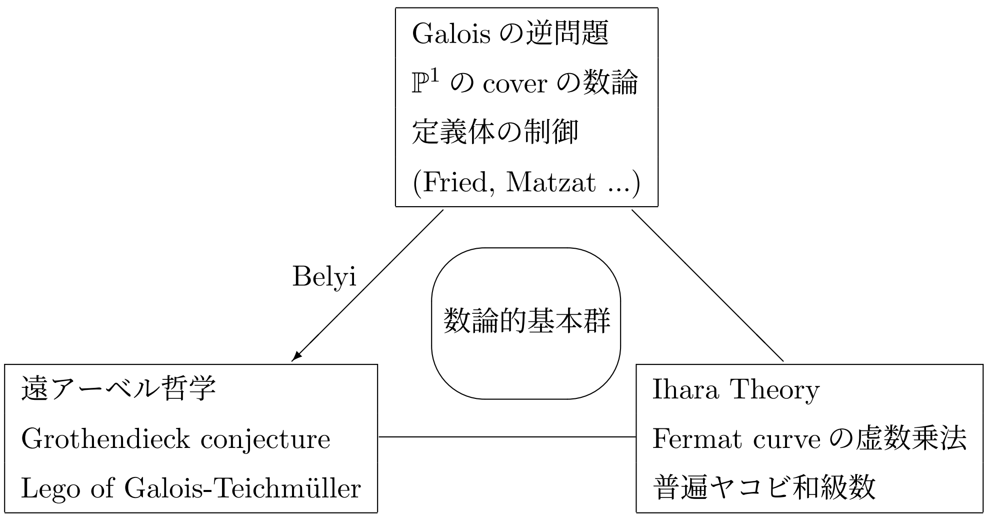
中村博昭 (述)、星野謙二 (記) [岡山大・理]

**概 要**



## 1 Introduction

ここ数年の数論的基本群をめぐる研究には、少なくとも以下のような三つの側面があり、２０世紀末から互いに影響を及ぼしながら発展している。



遠アーベル哲学では、例えば、複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体 $K$ 上定義された (非特異) 代数多様体 $X/K$ から生じる基本群の完全系列

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{K}}) \to \pi_1(X_K) \to G_K \to 1$$

に、$X/K$ の数論幾何的な情報が忠実に反映されているような場合を研究対象にしている。双曲的代数曲線たちが、その典型的な例である (cf. [Ta],[Mo]; [NTM])。このような現象は、幾何学的な基本群 $\pi_1(X_{\overline{K}})$ ($\cong {\pi_1}^{top}(X_{\mathbb{C}})$ の副有限完備化) と数論的対象である絶対ガロア群 $G_K$ が、数論的基本群 $\pi_1(X_K)$ の中に (核と商として) 非自明に混合されていることの現れであり, この非自明さは付随する外ガロア表現

$$\varphi : G_K \to \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$$

が絶対ガロア群を像に大きく映し出していることを意味している。最も重要かつ基礎的なのは $K = \mathbb{Q}$ として,

$$X_{\mathbb{Q}} := \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \backslash \{0, 1, \infty\} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}\left[t, \frac{1}{t}, \frac{1}{1-t}\right]$$

の場合である。この $X$ 上に Puiseux 級数体

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\mathbb{Q}}((t^{1/n}))$$

に値を持つ標準的な単位ベクトル

$$\vec{01} = (dt)^* : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X_{\mathbb{Q}}$$

を基点にとる。幾何的基本群 $\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \vec{01})$ は階数 2 の自由副有限群 $\hat{F}_2$ と同型になり, その標準的な (位相的) 生成元 $x$, $y$ を下図のように $x$ は 0 のまわりを回るループ, $y$ は 1 のまわりを回るループとして取ることができる。

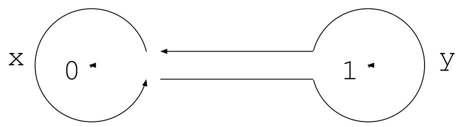



図 1: $\widehat{F_2}$ の生成元 $x, y$

この基点の取り方から、完全系列

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}) \to \pi_1(X_{\mathbb{Q}}) \to G_{\mathbb{Q}} \to 1$$

の自然な分裂が $G_{\mathbb{Q}}$ の Puiseux 級数への係数変換の作用から決まり、このことに対応して定義される外ガロア表現のリフトを $\widetilde{\varphi}: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}(\widehat{F}_2)$ (Belyi's lift) と書こう。($\varphi$ および $\widetilde{\varphi}$ は単射になる [Belyi の定理]).

このとき $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対し, $\widetilde{\varphi}(\sigma)$ の $x, y$ への作用は,

$$\widetilde{\varphi}(\sigma) : \begin{cases} x \mapsto x^{\lambda(\sigma)}, \\ y \mapsto f_\sigma(x,y)^{-1} y^{\lambda(\sigma)} f_\sigma(x,y), \end{cases}$$

の形にかける。ここに $\lambda : G_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ は 1 の累乗根への作用を表す円分指標であり, $f : G_{\mathbb{Q}} \to \widehat{F}_2' = [\widehat{F}_2, \widehat{F}_2]$ は詳細な性質不明の (非可換-)1-cocycle である。

Belyi の定理を考慮すると, 上の対応によって、各元 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ が二つのパラメーター $\lambda \in \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$, $f \in \widehat{F}_2'$ によって決まる。言い換えると、絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ が直積空間 $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \times \widehat{F}_2'$ という箱に収容されたとみなすことが出来る。

そこで自然に思いつく疑問として次の 2 つの問題を考えよう:

**(P1) $G_{\mathbb{Q}}$ の $(\lambda, f)$-空間で満たす方程式系は？（外側からの探索）**

**(P2) $G_{\mathbb{Q}}$ の上で未知のパラメーター $f$ はどんな振る舞いをするか？（内側からの探索）**

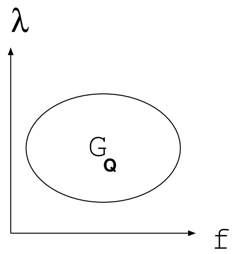



図 2: $G_{\mathbb{Q}}$ のパラメータ付け

問題 (P1) については Drinfeld, Ihara-Matsumoto らにより $(\lambda, f)$-空間内に Grothendieck-Teichmüller 群 $\widehat{GT}$ という枠が定義され、$G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{GT}$ が示された。$\widehat{GT}$ は, $(\lambda, f)$ に関する 3 種類の方程式で定義され、$G_{\mathbb{Q}}$ の像がそれらを満たすことが証明される (精しくは [I1] を参照)。この方向のモジュライ空間の塔を用いた進展について、次節でもう少し紹介する。このほかに算術的な方向や曲線の被覆塔を用いる方向の研究もある ([I2], [Fur], [NT])。

問題 (P2) について、最初の深い結果は, ヤコビ和を interpolate する普遍的な級数として伊原 [I0] により導入された 2 変数のべき級数 (ベータ関数と類似の性質を持つ) に関するものである。$\hat{F}_2$ の完備群環のアーベル化写像

$$f_\sigma \in \widehat{F}_2' \subset \widehat{\mathbb{Z}}[[\widehat{F}_2]] \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_l[[x-1, y-1]] \ \ (l : prime)$$

を考え, Fox の自由微分 (の副有限版) を用いて

$$B_\sigma := \left(1 + \frac{\partial f_\sigma}{\partial y}(y-1)\right)^{ab} \in \mathbb{Z}_l[[x-1, y-1]] \subset \mathbb{Q}_l[[X, Y]] \ \ (x = e^X, y = e^Y)$$

とおくとき、$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ $(\lambda(\sigma) = 1)$ に対して次が成り立つ:

**Theorem 1 (Anderson / Coleman / Ihara - Kaneko - Yukinari).**

$$B_\sigma = \exp\left(\sum_{m \geq 3,\, odd} \frac{\lambda_m(\sigma)}{l^{m-1} - 1} \sum_{i+j=m;\, i,j \geq 1} \frac{X^i Y^j}{i!j!}\right)$$

ここに $\lambda_m$ は *Soule* 指標と呼ばれ、円単数に結びついたガロア群上の $\mathbb{Z}_l(m)$ 値のある指標として与えられる。

## 2 Teichmüller 塔とは？

問題 (P1) については Grothendieck が Galois-Teichmüller 塔の理念を提唱した。非負整数 $g, n$ $(2 - 2g - n < 0)$ に対してモジュライ空間

$$\begin{cases} M_{g,n} := \{\text{genus } g, \text{ mark された } n \text{ 点をもつ smooth curve の moduli}\}, \\ \mathfrak{M}_{g,n} := \{\text{genus } g, \text{ mark された非特異 } n \text{ 点をもつ stable curve の moduli}\} \end{cases}$$

を $\mathbb{Q}$ 上定義された moduli stack と考える。$\mathfrak{M}_{g,n} \supset M_{g,n}$ であり、$\mathfrak{M}_{g,n}$ は $M_{g,n}$ のコンパクト化、さらに $\mathfrak{M}_{g,n} \backslash M_{g,n} =: \partial M_{g,n}$ は正規交叉因子になる。また、

(1) forgetful morphism $M_{g,n+1} \to M_{g,n}$ (mark を落とす操作)

(2) coupling morphism $\mathfrak{M}_{g_1,n_1+1} \times \mathfrak{M}_{g_2,n_2+1} \to \partial M_{g_1+g_2,n_1+n_2}$
( 2 本の曲線を marked point で交わらせる操作)

(3) clutching morphism $\mathfrak{M}_{g,n+2} \to \partial M_{g+1,n}$
(marked point 2 個をくっつける操作)

などにより異なる $(g,n)$ に対するモジュライ空間の基本群 $\pi_1(M_{g,n})$ 達の間に $G_{\mathbb{Q}}$-compatible な準同形写像の系列が生じる。これらをひっくるめて ガロア・タイヒミュラー塔と呼ぶ。$G_{\mathbb{Q}}$ は 塔 $\{\pi_1(M_{g,n})\}$ に $\widehat{GT}$ の 3 つの定義方程式を保ちながら作用する。

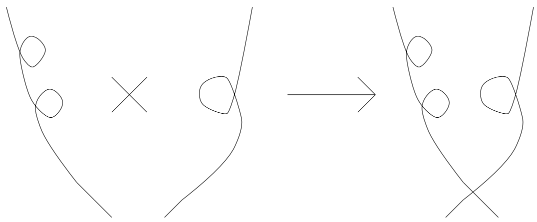


図 3: coupling morphism

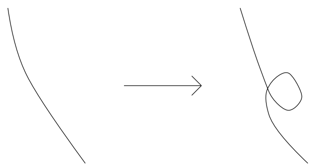


図 4: clutching morphism

<u>Moduli stack</u>：$g=1, n=1$ の場合。
このとき，　$M_{1,1}$ =(楕円曲線の moduli) であり、$\pi_1(M_{1,1}/\overline{\mathbb{Q}}) = \widehat{SL_2(\mathbb{Z})}$。coarse モジュライ空間としては $< M_{1,1} >= \{j\text{-invariants}\} \cong \mathbb{A}^1_j$ であり、$\mathbb{C}$ 上ではよく知られている複素上半平面 $\mathcal{H}$ 上の楕円モジュラー関数 $j(\tau)$ によって $\mathbb{A}^1_j(\mathbb{C}) = \mathcal{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の形に一意化される。moduli stack としては

$$\begin{cases} j=0 \text{ のとき楕円曲線の自己同型は } (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \\ j=1728 \text{ のとき楕円曲線の自己同型は } (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \\ j\neq 0,1728 \text{ のとき楕円曲線の自己同型は } \{\pm 1\} \end{cases}$$

という情報が各点に記憶されていると考える。

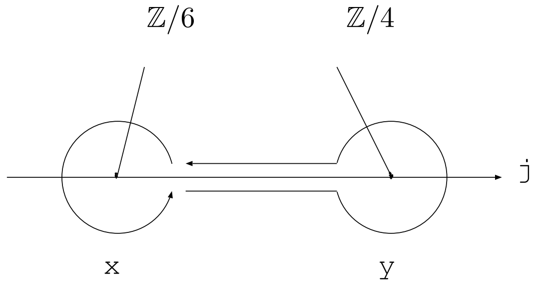



図 5: j-invariant と自己同型

一般には $\mathbb{C}^{3g-3+n}$ 内のタイヒミュラー空間と呼ばれる bounded domain $T_{g,n}$ (単連結可縮) に、タイヒミュラーモジュラー群 $\Gamma_{g,n}$ と呼ばれる離散群が作用していて、商空間 $T_{g,n}/\Gamma_{g,n}$ が coarse モジュライ空間 $M_{g,n}(\mathbb{C})$ になる。群 $\Gamma_{g,n}$ は、位相幾何的に次のように定義することができる：種数 $g$ の閉曲面 $\Sigma_g$ とその上の $n$ 点 $p_1, \ldots, p_n$ を決めたとき、これらの点を固定する向きを保つ diffeomorphism たちの連結成分たちのなす群

$$\Gamma_{g,n} := \pi_0 \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma_g; \{p_1, \cdots, p_n\} : \mathrm{fixed}).$$

これは写像類群 (mapping class group) とも呼ばれる。曲面 $\Sigma_{g,n} := \Sigma_g \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ 上の任意の単純閉曲線 $\alpha$ に対して、その曲線の近傍だけを 360 度捻る diffeomorphism が与える $\Gamma_{g,n}$ の元を Dehn twist といい $D_\alpha$ と記す。

## 3 $G_{\mathbb{Q}}$ の作用

$G_{\mathbb{Q}}$ の作用を $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times \times \widehat{F}_2'$ で書くと, 第 1 節で紹介したように $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\} = M_{0,4}$ の幾何的基本群 $\pi_1 =< x, y >$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用は,

$$\begin{cases} x \mapsto x^{\lambda_\sigma}, \\ y \mapsto f_\sigma(x,y)^{-1} y^{\lambda(\sigma)} f_\sigma(x,y) \end{cases}$$

と表せるが, これをまず $M_{0,n}$ に一般化する (Drinfeld, Ihara-Matsumoto)。

Braid configulation space $(\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) - \{\text{diagonal's}\})/S_n =: Y_n$ の各点は、$\mathbb{A}^1$ 上の $n$ 点集合 $p = (p_1, \cdots, p_n)$ をあらわしていると考えられるから

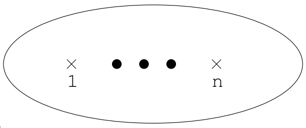
$$\pi_1(Y_n) \text{ の元} \leftrightarrow \text{平面内の } n \text{ 点が運動して元に戻る仕方}$$

とみなせる。そこで、$\pi_1(Y_n) = B_n$ (Artin braid group) であり生成元は標準的な $\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}$ ($\tau_i$ : $p_i$ と $p_{i+1}$ を入れ換えるもの) が取れる。上手に tangential base point を取ると $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の $\widehat{B}_n$ への作用は,

$$\begin{cases} \sigma(\tau_1) = {\tau_1}^{\lambda_\sigma}, \\ \sigma(\tau_i) = f_\sigma(\omega_i, {\tau_i}^2)^{-1} {\tau_i}^{\lambda_\sigma} f_\sigma(\omega_i, {\tau_i}^2) \ \ (i \neq 1) \end{cases}$$

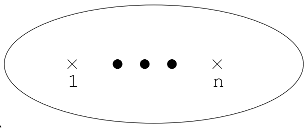
となる。ここで $\omega_i = (\tau_1 \cdots \tau_{i-1})^i$ である。組紐群 $B_n$ とその部分群である純組紐群 $P_n$ の写像類群としての解釈は

$B_n = \pi_0 \mathrm{Diffeo}^+ \Bigg($




, 点を置換し境界は固定 $\Bigg),$

$P_n = \pi_0 \mathrm{Diffeo}^+ \Bigg($




, 点と境界を固定 $\Bigg)$

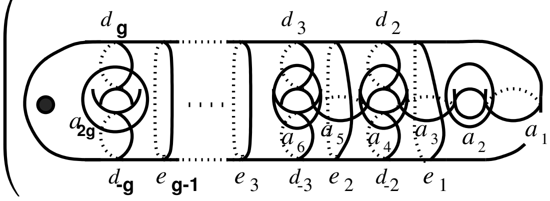
となる。基本群 $\pi_1(M_{0,n})$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用は、$\pi_1(M_{0,n})$ を $P_n$ の商とみなすことで計算される。

また $G_{\mathbb{Q}}$ の $\pi_1(M_{g,1})$ への作用は,

$$\begin{cases} \sigma(D_{a_i}) = f_\sigma(\omega_i, D_{a_i}^2)^{-1} D_{a_i}^{\lambda_\sigma} f_\sigma(\omega_i, D_{a_i}^2), \\ \sigma(D_{e_i}) = D_{e_i}^{\lambda_\sigma}, \\ \sigma(D_{d_{\pm j}}) = D_{d_{\pm j}}^{\lambda_\sigma} \end{cases}$$

の形に書ける。ここで各 Dehn twist や $\omega_i$ は、

$\pi_1(M_{g,1}) = \pi_0 \mathrm{Diffeo}^+ \Bigg($




$\Bigg)$

とみなした時のものであり、$\omega_i$ は $(D_{a_1} \cdots D_{a_{i-1}})^i$ をあらわす。

## 4 Teichmüller 塔の積み木 (lego) の一端の紹介

ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ のタイヒミュラー塔への作用は Dehn twist 達の relation を保たなければならない。曲面 $\Sigma_{g,n}$ 上の単純閉曲線を $\alpha, \beta, ...$ であらわすとき、一般に

$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = \phi \Rightarrow D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha \\ |\alpha \cap \beta| = 1 \Rightarrow D_\alpha D_\beta D_\alpha = D_\beta D_\alpha D_\beta \end{cases}$$

が成り立つ。さらに次のような relation も知られている:

**Lantern relation** $D_\alpha D_\beta D_\gamma = D_{\delta_1} D_{\delta_2} D_{\delta_3} D_{\delta_4}$

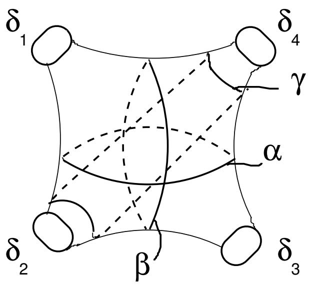



図 6: Lantern relation

**Doughnut relation** $(D_\alpha D_\beta D_\alpha)^4 = (D_\alpha D_\beta)^6 = D_\delta$

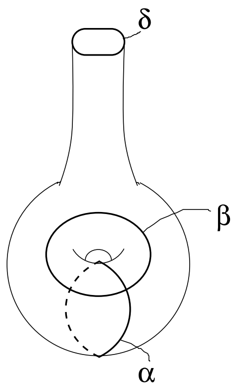



図 7: ドーナツ relation

モジュライ空間 $\mathfrak{M}_{g,n}$ 上に有限個の極大退化点があるが、これらのあらわす marked stable 曲線は $\mathbb{P}^1_{0,1,\infty}$-の複合体の形、言い換えると曲面 $\Sigma_{g,n}$ のパンツ分割に対応している。各 $\mathbb{P}^1$ 成分の上に $\{0,1,\infty\}$ を mark する座標系を決めると、$\Sigma_{g,n}$ のパンツ分解&キルト構造が決まる。さらに極大退化点同士を $\mathbb{P}^1_{0,1,\infty}$ の実軸に沿った標準的なパス (move) で結び、それらに対する $G_{\mathbb{Q}}$-作用を記述することができる。

前節の $\pi_1(M_{g,1})$ の図で、$a_1, d_2, d_{-2}$ でカットされた Lantern に対応する $M_{0,4}$ を $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ と思ったとき、move "$a_3 \to e_1$" へのガロア作用に現れるのは $f_\sigma(D_{e_1}, D_{a_3})$ のはずだが、実際には $f_\sigma(\omega_3, D_{a_3}^2)$ が表れていた。ドーナツ relation $D_{e_1} = (D_{a_1}D_{a_2})^6 = {\omega_3}^2$ を考慮すると $f_\sigma({\omega_3}^2, D_{a_3})$ と $f_\sigma(\omega_3, D_{a_3}^2)$ は、ほぼ等しいはず, ということを示唆している：実際

$$\text{equation}\,(IV):\ f_\sigma(x^2,y^2) \doteqdot f_\sigma(x,y^4) \qquad \text{if } xyx = yxy$$

を厳密化した方程式が $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対して成立することがきちんと証明できる。そして

$$\widehat{GT}^{new} := \{\widehat{GT}\text{の 3 条件} + (IV)\}$$

で定義すると, $\widehat{GT}^{new}$ は $G_{\mathbb{Q}}$ を含む $\widehat{GT}$ の部分群であり、かつタイヒミュラー亜群の塔

$$\Big\{\pi_1(M_{g,n});\ \text{“パンツ分解&キルト構造” が定める tangential base points}\Big\}$$

に well defined に作用する。特に各 Dehn twist 生成元への作用を パラメーター $(\lambda, f)$ の言葉でで完全に記述できる ([NS])。

**未解決問題:** 上の包含関係 " $G_{\mathbb{Q}} \subseteq \widehat{GT}^{new} \subseteq \widehat{GT}$ " に現れる $\subseteq$ の一方または両方が等号である可能性の検証、あるいはそれらの否定を確定すること。

## 参考文献


[As] M.Asada, *The faithfulness of the monodromy representations associated with certain families of algebraic curves*, J. Pure and Applied Alg. **159** (2001) 123–147.

[An] G.Anderson, The hyperadelic gamma function, Invent. Math. **95** (1989), 63–131.

[B] G.V.Belyi, *On Galois extensions of maximal cyclotomic fields*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **8** (1979), 267–276.

[C] R. Coleman, *Anderson-Ihara theory: Gauss sums and circular units*, Adv. Studies in Pure Math. **17** (1989), 55–72.

[Dr] V.G.Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* $Gal(\bar{Q}/Q)$, Leningrad Math. J. **2(4)** (1991), 829–860.

[Fuc] H.Fuchizawa, *Quilt decompositions of surfaces and Torelli group action on extended Hatcher complex*, Preprint.

[Fur] H. Furusho, *Geometric and arithmetic subgroups of the Grothendieck-Teichmüller group*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 97–108.

[G] A.Grothendieck, *Esquisse d'un Programme, 1984*, in "Geometric Galois Actions I", P.Lochak, L.Schneps (eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **242** (1997), 5–48.

[Ic] T.Ichikawa, Teichmüller groupoids, and monodromy in conformal field theory, Commun. Math. Phys. **246** (2004), 1–18.

[I0] Y.Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations and complex multiplications*, Ann. of Math. **123** (1986), 43–106.

[I1] Y.Ihara, *On the embedding of* $Gal(\bar{Q}/Q)$ *into* $GT^{\wedge}$, in "The Grothendieck theory of Dessin's d'Enfants", L.Schneps (ed.), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **200**, (1994), 289–306.

[I2] Y.Ihara, *On beta and gamma functions associated with the Grothendieck-Teichmüller group modular group*, in "Aspects of Galois Theory", H. Voelklein et.al (eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser. **256** (1999), 144–179; *Part II*, J. Reine Angew. Math. **527** (2000), 1-11.

[IKY] Y.Ihara, M.Kaneko, A.Yukinari, *On some properties of the universal power series for Jacobi sums*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987), 65–86.

[IM] Y.Ihara, M.Matsumoto, *On Galois actions on profinite completions of braid groups*, in "Recent Developments in the Inverse Galois Problem", M. Fried et.al. (eds.), (1995), 173–200.

[LNS] P. Lochak, H. Nakamura, L. Schneps, *On a new version of the Grothendieck-Teichmüller group*, Note aux C.R.A.S., Série I **325** (1997), 11–16.

[LS] P.Lochak and L.Schneps, *A cohomological interpretation of the Grothendieck-Teichmüller group*, Invent. Math. **127** (1997), 571–600.

[Ma] M.Matsumoto, On Galois representations on profinite braid groups of curves, J. reine angew. Math. **474** (1996), 169–219.

[MT] M.Matsumoto, A.Tamagawa, Mapping class group action versus Galois action on profinite fundamental groups, Amer. J. Math. **122** (2000), 1017–1026.

[Mo] S.Mochizuki, *The local pro-p Grothendieck conjecture for hyperbolic curves*, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.

[NTM] 中村博昭, 玉川安騎男, 望月新一, 代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想, 数学 **50** (1998), 113-129.

[N99] 中村博昭, ガロア・タイヒミュラー群の Lego 理論, 北海道大学数学講究録 **65** (2000) *available at* http://www.math.okayama-u.ac.jp/∼h-naka/hokudai99

[N-I,II] H.Nakamura, *Limits of Galois representations in fundamental groups along maximal degeneration of marked curves, I*, Amer. J. Math. **121** (1999), 315–358; *Part II*, Proc. Symp. Pure Math. **70** (2002), 43–78.

[NS] H.Nakamura, L.Schneps, *On a subgroup of the Grothendieck-Teichmüller group acting on the tower of profinite Teichmüller modular groups*, Invent. Math. **141** (2000), 503–560.

[NT] H.Nakamura, H.Tsunogai, *Harmonic and equianharmonic equations in the Grothendieck-Teichmüller group*, Forum Math. **15** (2003), 877–892.

[S] L.Schneps, *Automorphisms of curves and their role in Grothendieck-Teichmüller theory*, preprint 2003.

[Ta] A.Tamagawa, The Grothendieck conjecture for affine curves, Compositio Math. **109** (1997), 135–194.

[Ts] H.Tsunogai, *Some new-type equations in the Grothendieck-Teichmüller group arising from geometry on* $M_{0,5}$, preprint 2003.