漸近的双曲空間・漸近的複素双曲空間における幾何解析

松本 佳彦（阪大理）*

1 漸近的（複素）双曲空間とは何か

漸近的双曲空間（asymptotically hyperbolic spaces，以下「AH 空間」）とは，コンパクトでない完備 Riemann 多様体 (X^{n+1}, g) であって，その計量が遠方において

$$g \sim \frac{dx^2}{x^2} + \frac{h}{x^2} \tag{1.1}$$

という漸近挙動をもつようなものである．ここで h はある閉多様体 M^n の Riemann 計量．$x = 0$ が無限遠境界に対応する．

漸近挙動 (1.1) の意味は個別の問題に応じて定めるのだが，本稿では，「左辺と右辺の差 R が k 階連続微分可能，さらにある $\tau > 0$ が存在し，$x^{-\tau}R$ の $x^{-2}(dx^2 + h)$ に関する $C^{k,\alpha}$ ノルムが有限」という条件がみたされるとき (X, g) は「$C^{k,\alpha}$ 級 AH 空間」であるということにする．とくに何も書かなければ「C^∞ 級 AH 空間」，すなわち任意の k，α に対し $C^{k,\alpha}$ 級 AH 空間であるものを考える．

漸近的複素双曲空間（asymptotically complex hyperbolic spaces，以下「ACH 空間」）とは，コンパクトでない完備 Riemann 多様体 (X^{2n+2}, g) であって，その計量が遠方において

$$g \sim 4\frac{dx^2}{x^2} + \frac{\theta^2}{x^4} + \frac{h}{x^2} \tag{1.2}$$

という漸近挙動をもつものである．ここで θ は閉接触多様体 (M^{2n+1}, H) の接触形式で（$H^\perp$ にあらかじめ向きを与えておき，θ はその向きについて正となるようとる），h は接触分布 H の $d\theta$ と両立するファイバー計量．ただし「h が $d\theta$ と両立する」とは，$h(v, w) = d\theta(v, Jw)$ なる $J \in \Gamma(\mathrm{End}(H))$，$J^2 = -\mathrm{id}$ が存在するという意味である．逆に，$d\theta$ と組み合わせると H のファイバー計量が得られるような J を，接触多様体 (M, H) の整合的な概 CR 構造 (compatible almost CR structure)，または日本語としてこなれていないが「整合概 CR 構造」ということにしよう*．J の「整合性」は，接触形式 θ の選び方にはよらない概念である．

AH 空間のときと同様に「$C^{k,\alpha}$ 級 ACH 空間」「C^∞ 級 ACH 空間」という表現を用いる．

---

* Email: matsumoto@math.sci.osaka-u.ac.jp

*この整合性 (compatibility) をさして，一部の文献では「partial integrability」という用語が使われてきた（正確にいうと，本稿の語法では，「compatible」とは「strictly pseudoconvex partially integrable」のこと）．松本も [35, 36, 38, 37] でこれを使ってきたが，しばしば誤解を生む．そこで [40, 39] では呼称を変えることにした．

(1.1) や (1.2) によると，無限遠境界 $\partial X = \{ x = 0 \} = M$ において，一見，AH 空間では Riemann 計量 h が，ACH 空間では接触形式 θ と接触分布 H のファイバー計量 h が，それぞれ定まっているようにみえる．しかしこれらは，実際には X のエンドをどのように $(0,1)\times M$ と同一視するかに依存しており，同一視に依存せず定まっているものは，AH 空間では h の属する共形類 $[h]$，ACH 空間では整合概 CR 構造 J である．これらの $[h]$ や J を備えた境界 ∂X，または $[h]$ や J そのもののことを，AH 空間ないし ACH 空間の**共形無限遠** (conformal infinity) という．

AH 空間や ACH 空間についてとくに興味深いのは Einstein 方程式をめぐる問題である．よく行われる問題設定は「与えられた共形無限遠をもつ AH (ACH)-Einstein 空間について調べよ」（構成せよ／一意性の有無を調べよ／……）というものである*．本講演は，この **AH-Einstein 充塡**，**ACH-Einstein 充塡**の問題の諸側面を，AH 空間や ACH 空間における線型微分方程式の基礎理論を紹介しつつ論じることを目的とする．またその中で，松本による [41, 37, 39] の位置づけを説明する．

なお，AH-Einstein 充塡の問題は，物理学における AdS/CFT 対応（ゲージ・重力対応）の基礎としても知られている．ただしその場合は不定値計量を考える．

2　例

まず，AH (ACH)-Einstein 充塡の問題については，さまざまな興味深い例があり，繊細な現象がみられることを紹介したい．

2.1　双曲空間の凸ココンパクト商

実双曲空間 $\mathbb{H}^{n+1}$ はもちろん AH 空間である．$\mathbb{H}^{n+1}$ の計量 g が (1.1) の形をしていることは，測地的極座標系によって $g = dr^2 + (\sinh r)^2 g_{S^n}$ だから，$x = e^{-r}$ とおけばわかる．

Klein 群 $\Gamma \subset PO(n+1,1)$ の作用による商空間 $X = \Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ も AH 空間になる場合がある．$\Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ にはカスプがあってはならない．**凸ココンパクト商**のとき，すなわち極限集合 $\Lambda(\Gamma)$ の凸包の商がコンパクトであるとき，$\Gamma\backslash\mathbb{H}^{n+1}$ は AH 空間となる．

AH 空間における解析とは，$\mathbb{H}^{n+1}$ やその凸ココンパクト商，あるいはそれらにコンパクト部分集合だけで変更を加えて得られる空間における解析の一般化なのだと考えることができる．たとえば AH 空間のラプラシアンのスペクトルに関する Mazzeo–Melrose [42] の結果は，Lax–Phillips [28] の一部を一般的見地から説明したものになっている．

同じように，複素双曲空間の離散群による商を考えることにより，ACH 空間のさまざまな例が得られる．

2.2　AdS Schwarzschild 空間

定曲率をもたないが Einstein 方程式をみたす AH 空間の代表的な例は，Hawking–Page [25] の **AdS Schwarzschild 空間**である．本来の AdS Schwarzschild 空間は Lorentz 計量

*AH-Einstein 空間は「Poincaré–Einstein 多様体」とか「共形コンパクト Einstein 多様体」(conformally compact Einstein manifolds) とよばれることも多い．

をもつが，Wick 回転を施すことにより，

$$g_m = V(r)dt^2 + V(r)^{-1}dr^2 + r^2 g_{S^{n-1}}, \qquad V(r) = 1 + r^2 - \frac{2m}{r^{n-2}} \tag{2.1}$$

という Riemann 計量が得られる．ただし $n \geqq 3$．定数 $m > 0$ は任意に選んでよい．

この g_m は，まずは $\mathbb{R}^{n+1}$ の領域 $\{V(r) > 0\}$ で定義されるものと理解される．この領域は $\mathbb{R}\times(r_+,\infty)\times S^{n-1}$ という形をしている（$r_+ > 0$ は Schwarzschild 半径の AdS 版）．ここで g_m を $(\mathbb{R}/2\pi\beta\mathbb{Z})\times(r_+,\infty)\times S^{n-1}$ の計量とみなす．すると，$\beta > 0$ を適切に定めておけば，$r = r_+$ において S^{n-1} という部分多様体をつけ加えることで，g_m を $X = \mathbb{R}^2 \times S^{n-1}$ のなめらかな Riemann 計量と解釈することができる．具体的には $\beta = 2r_+/(nr_+^2 + n - 2)$ がそのための条件となる．こうして得られた (X, g_m) は AH-Einstein 空間であって，その共形無限遠は $S^1(\beta)\times S^{n-1}$ である（$S^1(\beta)$ は半径 β の円周）．

さらに Anderson [3] は，AdS Schwarzschild 計量 g_m が，AH-Einstein 充塡の一意性の反例を与えていることを指摘した．それを確認するためには，m が変わると β はどのように変化するかみればよい．写像 $m \mapsto \beta$ は単射ではなく，$\beta > \beta_0 = 1/\sqrt{n(n-2)}$ のとき，対応する m は 2 個ずつある．一方で，異なる m に対する g_m は互いに等長でない．したがって共形無限遠 $S^1(\beta)\times S^{n-1}$ を与える AH-Einstein 充塡が 2 個ずつあることがわかる．

同様の例は ACH-Einstein 空間については知られていない．

2.3 B^{2m} のユニタリ不変 AH-Einstein 計量

今度は無限遠境界が非自明な S^1 束であるケースである．m を 2 以上の整数とするとき，S^{2m-1} の Berger 計量 h_c について，$(S^{2m-1}, [h_c])$ は AH-Einstein 充塡をもつ．これは $m = 2$ のとき Pedersen [46] がツイスター理論の手法で構成したもので，一般の次元では Page–Pope [45] の構成の特別な場合としてつくれる（松本 [41]）．

Berger 計量 h_c とは，Hopf ファイブレーション $S^{2m-1} \to \mathbb{C}P^{m-1}$ のファイバー S^1 の大きさを拡大・縮小して得られる計量である．つまり，まず，S^{2m-1} の標準的な Riemann 計量 h を，ファイバー方向とそれに直交する方向に分けて $h = h_1 = \theta^2 + g_{\mathrm{FS}}$ とあらわす．g_{FS} は $\mathbb{C}P^{m-1}$ の Fubini–Study 計量を $\operatorname{Ker}\theta$ へと持ち上げたものになっている．そして一般に $c > 0$ に対し $h_c = c\theta^2 + g_{\mathrm{FS}}$ とおく．

われわれの AH-Einstein 充塡は B^{2m} において与えられる．h_c はユニタリ群 $U(m)$ の作用で不変だから，AH-Einstein 計量も $U(m)$ 不変なものを考えるのが自然だろう．実際にそれで構成できる．定理として述べれば次のとおりである．

定理 2.1 (Pedersen [46], 松本 [41])**.** 任意の $c > 0$ に対し，B^{2m} の $U(m)$ 不変な AH-Einstein 計量 g_c であって，共形無限遠が Berger 球面 $(S^{2m-1}, [h_c])$ であるようなものが存在する．

[41] の構成法は論理的には容易である．

$$g_c = (r^2-1)^{m-1}V(r)^{-1}dr^2 + c^2(r^2-1)^{-m+1}V(r)\theta^2 + c(r^2-1)g_{\mathrm{FS}}$$

とおいて，Einstein 方程式が導く $V(r)$ の常微分方程式を考えればよい．明らかでないのは，常微分方程式の解がもつ任意定数の値をうまく決めれば $r \to \infty$ でない側の特異性を取り除けること，またそうして得られる g_c が AH 計量になることである．

今度もまた，同様の例は ACH-Einstein 空間については知られていない．

2.4 Cheng–Yau の Kähler-Einstein 計量

2.2 節や 2.3 節とは逆に，ACH-Einstein 空間の場合にしかないような，非常に一般的な存在定理もある．それは Kähler 幾何にもとづく．

定理 2.2 (Cheng–Yau [16]). $n \geqq 1$ とする．なめらかな境界をもつ有界強擬凸領域 $\Omega \Subset \mathbb{C}^{n+1}$ には，負スカラー曲率をもつ完備 Kähler-Einstein 計量 g が，定数倍の自由度を除いてただ一つ存在する．

この Cheng–Yau の計量 g は ACH 計量にもなっているのである（そうみるとき，定数倍の自由度は要請 (1.2) により失われる）．共形無限遠 $\partial\Omega$ の整合概 CR 構造 (H, J) は，$\mathbb{C}^{n+1}$ の複素構造が誘導する $\partial\Omega$ の自然な CR 構造に一致する．

なお，J による $\mathbb{C}H$ の固有分解を $\mathbb{C}H = T^{1,0}\partial\Omega \oplus T^{0,1}\partial\Omega$ とすれば，$\Gamma(T^{1,0}\partial\Omega)$ は Lie 括弧積について閉じていることを注意しておく．この可積分条件をみたす概 CR 構造をふつう単に「CR 構造」という．CR 幾何の従来の研究対象はこの意味での CR 構造にほぼ集中している*．この意味での CR 構造を扱うだけなら基本的には Cheng–Yau 計量があればよく，ACH-Einstein 計量が力を発揮することはあまりない（$2n + 2 = 4$ 次元のときは例外的 [6, 10, 34]）．6 次元以上の空間では，境界で一般の整合概 CR 構造を扱いたいからこそ，ACH-Einstein 計量を考えるのである．

2.5 Gursky–Han の非存在定理

Gursky–Han [23] による AH-Einstein 充填に関するある非存在定理に触れたい．球面 S^{4m-1} の正スカラー曲率をもつ計量のなす空間を $\mathcal{R}^+(S^{4m-1})$ とし，$h \in \mathcal{R}^+(S^{4m-1})$ が定める共形類の B^{4m} における AH-Einstein 充填について考える．Gromov–Lawson [22], Rosenberg [48] によれば，$m \geqq 2$ のとき，$\mathcal{R}^+(S^{4m-1})$ には無限に多くの連結成分がある．

定理 2.3 (Gursky–Han [23]). $m \geqq 2$ とする．そのとき，$\mathcal{R}^+(S^{4m-1})$ の連結成分 $\mathcal{C}$ であって以下の性質 $(*)$ をもつものが無限に多く存在する．

$(*)$ 任意の $h \in \mathcal{C}$ に対し，$(S^{4m-1}, [h])$ は開球 B^{4m} のいかなる AH-Einstein 計量の共形無限遠にもならない．

これは，Gursky–Han–Stolz [24] の説明のしかたによれば次のような事情による．一般に $\overline{X}$ をスピン構造を許す $4m$ 次元境界つきコンパクト多様体とし，$h \in \mathcal{Y}^+(\partial X)$ とする（$\mathcal{Y}^+$ は $\mathcal{R}^+$ の元に共形同値な計量のなす空間）．これらに対し不変量 $I(\overline{X}, h) \in \mathbb{Z}$ を，h の $\overline{X}$ への全測地的な拡張 $\overline{g}$ を任意にとって，$I(\overline{X}, h) = \operatorname{index} D^+(\overline{X}, \overline{g})$ とおくことで定義する（D^+ は Atiyah–Patodi–Singer 境界条件に関する Dirac 作用素の $S^+ \to S^-$ 成分）．指数定理から，右辺は $\overline{g}$ に依存しないし，また $I(\overline{X}, h)$ は $\mathcal{Y}^+(\partial X)$ の連結成分では一定値をとる．

ここで Qing による以下の観察 [47, 15] が重大な意味をもつ．かりに X に AH-Einstein 計量 g があって，その共形無限遠が $h \in \mathcal{Y}^+(\partial X)$ の定める共形類 $[h]$ だとすると，g に共形同値な Riemann 計量であって，（必要ならあらかじめ X の微分同相で g を引き戻しておけば）$\overline{X} = X \cup \partial X$ までなめらかに拡張され，正スカラー曲率をもち，さらに ∂X が全測

*これは偏った見方かもしれない．接触 Riemann 多様体 (contact Riemannian manifolds) に関する，丹野による [51] などの一連の仕事があるが，接触 Riemann 構造とは，整合概 CR 構造と接触形式の組にほかならない．

地的となるようなものが存在する．このことから，$[h]$ を共形無限遠とする AH-Einstein 計量 g が存在するためには，$I(\overline{X}, h) = 0$ の成立が必要であることが従う．

ところで不変量 $I(\overline{X}, h)$ は，$\overline{X} = \overline{B}^{4m}$ で h が [22] や [48] にあらわれる計量であるときは，それらが $\mathcal{R}^+(S^{4m-1})$ の異なる連結成分に属することを証明するために用いられた不変量と本質的に同じものである．したがって [22] と [48] の議論は，$I(\overline{X}, h) \neq 0$ をみたす h を元としてもつような $\mathcal{R}^+(S^{4m-1})$ の連結成分が（より強く，$\mathcal{Y}^+(S^{4m-1})$ の連結成分がといってもよい）無限に多く存在することを示している．

ACH-Einstein 空間について似たような議論が可能だとはまったく思われない．「共形コンパクト化」，すなわち共形同値な計量を $\overline{X}$ 全体で定義されるようにとる操作が重要なのだが，ACH 空間では (1.2) からわかるようにそれはできないのである．この困難は，AH 空間で行われる構成を ACH 空間にも持ち込もうとするとき，しばしば顔を出す．

3　線型 PDE に対する Fredholm 型定理と Einstein 変形

2 節では AH-Einstein 空間，ACH-Einstein 空間が各々の個別事情をもつことに焦点があたった．一方，本節では，AH 空間や ACH 空間の（幾何学的な）線型微分方程式について，$\mathbb{R}H^{n+1}$，$\mathbb{C}H^{n+1}$ の対応する微分方程式の性質が適度に遺伝してよい結論が得られること，また AH 空間と ACH 空間の両者について統一的な扱いができることを述べる．また応用として，ある種の AH (ACH)-Einstein 空間については，もとの共形無限遠に十分近い共形無限遠も AH (ACH)-Einstein 充填をもつことが示せることを説明する．このタイプの結果をはじめに与えたのは Graham–Lee [21] だった．

われわれは楕円型線型微分作用素 P を考える．簡単のため 2 階としておく．Einstein 方程式に応用するためには，関数だけでなく，一般のテンソルに作用する微分作用素を扱う必要がある．われわれの仮定は以下のとおり．$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ をまとめて $\mathbb{K}$ と書く．

(i) $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ である．ここで E は，テンソル束 $\bigotimes^r TX \otimes \bigotimes^s T^*X$ の，直交群の作用で不変な部分束，または有限個のそのようなベクトル束の直和．

(ii) P は Levi-Civita 接続による共変微分 ∇_i，および計量テンソル g_{ij}，g^{ij}，曲率テンソル $R_{ij}{}^k{}_l$，それと定数だけを用いてあらわされる．

(iii) P は 2 階線型微分作用素で，楕円型，形式的自己共役である．

(iv) 同じ表示によって与えられる $\mathbb{K}H^{n+1}$ の微分作用素 P_0 を考えると，

$$\|u\| \leqq C\|P_0 u\| \tag{3.1}$$

という L^2 評価式がなりたつ．ここで $u \in C_c^\infty(\mathbb{K}H^{n+1}, E)$，$C$ は正定数．

関数に作用するラプラシアンは仮定をみたす（条件 (iv) だけは非自明．もちろん難しくはない．[43] の冒頭の計算）．微分 k 形式に作用する Hodge ラプラシアンは，k が取りうる値の範囲（$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき $0 \leqq k \leqq n+1$，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき $0 \leqq k \leqq 2n+2$）の中央付近にある場合を除けば大丈夫である [17, 19]．あとで出てくるゲージ固定条件つき線型化 Einstein 作用素 (3.4) は，対称 2 テンソルに作用する微分作用素で，やはり仮定をみたす．

条件 (iv) からの帰結として，L^2-Sobolev 空間を H^k であらわすと，$\mathbb{K}H^{n+1}$ では，P_0 の定める有界作用素 $H^{k+2}(E) \to H^k(E)$ が可逆であることがわかる．

ここで重みつきの関数空間 $H^k_\delta(E)$ および $C^{k,\alpha}_\delta(E)$ を考える．これらの空間は，一般に AH 空間，ACH 空間において，計量を (1.1) や (1.2) のようにあらわしたときの x を用い

て，$\|u\|_{H^k_\delta} = \|x^{-\delta}u\|_{H^k}$，$\|u\|_{C^{k,\alpha}_\delta} = \|x^{-\delta}u\|_{C^{k,\alpha}}$ として定義する（δ が大きいほど，その空間に属する切断の無限遠方における減衰が速い）．

するとまず，$\mathbb{K}H^{n+1}$ の重みつきの関数空間についても，重みが適切な範囲に入っているかぎり，P_0 の可逆性がなりたっていることが証明できる．さらにそれは，一般の AH 空間，ACH 空間における $Pu = f$ でもおおむねそうなっているのである．

重みの「適切な範囲」は，微分作用素 P の「特性半径」で記述される．だがその説明をする前に定理を述べてしまおう．

定理 3.1 (Roth [49], Biquard [5], Lee [29])**.** AH 空間または ACH 空間において，上記の条件をみたす微分作用素 $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ を考え，その特性半径を R とする．そのとき，任意の $k \geqq 0$，$0 < \alpha < 1$ について，$-R < \delta < R$ に対して

(i) 重みつき Sobolev 空間のあいだの作用素 $P\colon H^{k+2}_\delta(E) \to H^k_\delta(E)$ は Fredholm.

(ii) 重みつき Hölder 空間のあいだの作用素 $P\colon C^{k+2,\alpha}_{\mu_\mathbb{K}+\delta}(E) \to C^{k,\alpha}_{\mu_\mathbb{K}+\delta}(E)$ も Fredholm.

ここで $\mu_\mathbb{R} = n/2$，$\mu_\mathbb{C} = n+1$.

さらに $\mathbb{K}H^{n+1}$ ではこれらの作用素はすべて可逆である．一般にも，これらの Fredholm 作用素はすべて指数 0 をもち，またその核は，k，α，δ によらず，すべて $\mathrm{Ker}_{(2)} P = \mathrm{Ker}(P\colon H^2(E) \to L^2(E))$ に一致する．

「特性半径」の説明を，AH 空間の関数に作用するラプラシアン $\Delta = d^*d$ を例にとって試みる．この場合，$\mathbb{R}H^{n+1}$ において Δ が同型 $H^{k+2}_\delta \to H^k_\delta$ を定めることは，初等的にも議論できる．上半空間モデルを用いると

$$\Delta = -x^2\partial_x^2 + (n-1)x\partial_x + x^2\Delta_{\mathbb{R}^n} \tag{3.2}$$

で，条件 (iv) を確かめる計算を Δ のかわりに $x^{-\delta}\circ\Delta\circ x^\delta$ について行えば，ある範囲の δ については，$x^{-\delta}$ で重みをつけたノルムに関する L^2 評価が得られる．（最終的には上半空間モデルの $x \in \mathbb{R}_+$ を使ったままではいけないのだが，上半空間モデルとの同一視を二通りの方法で行えばこの問題点は解消する．）これが許される δ の範囲をみるには，(3.2) を

$$\Delta = -(x\partial_x)^2 + nx\partial_x + x^2\Delta_{\mathbb{R}^n} \tag{3.3}$$

と書きかえるとよい．$x\partial_x$ の多項式 $-(x\partial_x)^2 + nx\partial_x$ の根は 0, n であり，これらは $\mu_\mathbb{R} = n/2$ を挟んで左右に $n/2$ ずつ離れた位置にある．このことに対応して，上記の議論は δ が $-n/2 < \delta < n/2$ の範囲にあるときに可能であることが確かめられる．

根 0，n は AH 空間における Δ の**特性根**とよばれる．一般に，本節の仮定をみたす任意の線型微分作用素について，それを $\mathbb{K}H^{n+1}$ においてテンソルの成分ごとに (3.3) のように書きあらわすことで，やはり特性根を定義することができる．特性根が $\mu_\mathbb{K}$ に関して対称にあらわれるのは，形式的自己共役性に起因する一般的事実である．特性根の実部のうち $\mu_\mathbb{K}$ にもっとも近いものをとり，その $\mu_\mathbb{K}$ までの距離を**特性半径**とよぶ．

定理 3.1 の $\mathbb{K}H^{n+1}$ の場合の証明は，微分作用素 P の $O(n+1)$ 対称性ないし $U(n+1)$ 対称性を利用し，Fuchs 型常微分方程式の理論によって Green 核の減衰度を結論することでなされる．一般の AH 空間や ACH 空間では，$\mathbb{K}H^{n+1}$ で構成した逆作用素を 1 の分割で貼り合わせてパラメトリクスをつくり，Fredholm 性を結論する．

定理 3.1 の応用について述べよう．本節の仮定をみたすある $P\colon \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ について，微分方程式 $Pu = f$ を考える．定理 3.1 は，$\mathrm{Ker}_{(2)} P = 0$ ならばある範囲の重みつ

き関数空間では方程式が一意的に解けることをいっている．これを用いると，たとえば Anderson [2]，Sullivan [50] が扱っている Laplace 方程式の漸近的 Dirichlet 問題を，任意の AH 空間や ACH 空間で解くこともできる．与えられた境界値 $\varphi \in C^\infty(\partial X)$ に対しその任意の延長 $u_0 \in C^\infty(\overline{X})$ は $\Delta u_0 \in C_1^\infty(X)$ をみたす（0 が特性根であることによる）．すると $\Delta u_0 = \Delta v$ をみたす $v \in C_1^\infty(X)$ があり，$u = u_0 - v$ が求める解になる．

同じことが，非線型微分方程式である Einstein 方程式にゲージ固定条件をつけ加えて線型化した

$$P\colon \Gamma(S^2T^*X) \to \Gamma(S^2T^*X), \qquad Pu_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^*\nabla u_{ij} - 2R_i{}^k{}_j{}^l u_{kl}) \tag{3.4}$$

についてもいえる．特性半径がたまたま Δ と同じ（$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ では $n/2$，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ では $n+1$）で，0 が特性根であることから，ある種の境界データを任意に与えて $Pu = 0$ が解ける．ここで指定することができる境界データは，まさに，共形無限遠の無限小変化に対応する，漸近挙動 (1.1)，(1.2) の主要部の無限小変化に相当するものである．

もとの非線型微分方程式についてこれと似た議論を行うと，次の定理が得られる（陰関数定理を用いる）．

定理 3.2 (Graham–Lee [21], Roth [49], Biquard [5], Lee [29])**.** $k \geqq 2$，$0 < \alpha < 1$ とする．(X, g) を AH-Einstein 空間または ACH-Einstein 空間とし，ゲージ固定条件つき線型化 Einstein 作用素 (3.4) について $\operatorname{Ker}_{(2)} P = 0$ であるとする．$(M, [h])$ または (M, H, J) をその共形無限遠とする．そのとき，$[h]$ に $C^{k,\alpha}$ 位相に関し十分に近い共形類 $[\hat{h}]$，ないし J に $C^{k,\alpha}$ 位相に関し十分に近い整合概 CR 構造 $\hat{J}$ について，$(M, [\hat{h}])$ を共形無限遠とする $C^{k,\alpha}$ 級 AH-Einstein 計量，ないし $(M, H, \hat{J})$ を共形無限遠とする $C^{k,\alpha}$ 級 ACH-Einstein 計量が X 上に存在する．

ここで (3.4) について $\operatorname{Ker}_{(2)} P = 0$ がみたされるための条件が問題となる．たとえば X が非正曲率をもつ空間であれば十分．AH-Einstein 空間の場合は，$(M, [h])$ の山辺共形不変量の条件をつけ加え，かわりに X の曲率の条件を緩めた十分条件も知られている [29].

松本 [37] は，有界強擬凸領域 $\Omega \Subset \mathbb{C}^{n+1}$ の Cheng–Yau 計量（2.4 節）について，$n+1 \geqq 3$ ならば必ず $\operatorname{Ker}_{(2)} P = 0$ がなりたつことを示した．証明は，$\operatorname{Ker}_{(2)} P$ の消滅を境界近傍における $(0,1)$ 次 $T^{1,0}\Omega$ 値 L^2 Dolbeault コホモロジー群の消滅へと帰着することで行われる．その過程で小磯 [27]，大沢 [44] の議論を利用する．

本節では定理 3.1 の応用例として Einstein 方程式の解の変形を述べたが，たとえば，調和写像の方程式についても同じように解の変形を議論することができる．しかしその場合は，Li–Tam [30, 31, 32]，芥川–松本 [1]，Donnelly [18] などで変形にとどまらない存在定理が議論されている．今のところ，本節の議論が調和写像の存在に関して新たなインパクトのある結論をもたらすということはないように思う．

4　ACH-Einstein 空間の概複素構造

ACH-Einstein 空間 (X, g) の幾何を強化する目的で，松本 [39] は，空間 X に g と両立する概複素構造を導入するための標準的な方法を考察した．これはたとえば次の二通りの応用を見据えたものである．

1. 境界不変量の構成．Burns–Epstein [12, 11]，Biquard–Herzlich [10]，丸亀 [33] の構

成を，整合概 CR 構造へと一般化する．

2. 境界の正規 Cartan 接続の記述．より直接的には，共形多様体の正規 Cartan 接続と等価な標準トラクター接続 [4] の，Čap–Gover [13] で行われているような記述を，CR 幾何においても整備したい．可積分 CR 構造については [14] などがあるが，正規 Cartan 接続の観点からは整合概 CR 構造のほうが「自然」なクラスである．

ACH-Einstein 空間 (X,g) の g と両立する概複素構造 J について，Nijenhuis テンソルを N とする．また [20, 26, 52] などにならって，$\omega = g(J\cdot,\cdot)$ の外微分 $d\omega$ の $(2,1)$ 成分を T とおき，そのトレースを τ とおく．

$$\mathcal{E}_g[J] = \int_X \left(|N|^2 + \frac{1}{2}|\tau|^2\right) dV_g$$

と定め，その臨界点を考察する——もっとも右辺の積分は一般には収束しないので，コンパクト台をもつ摂動に関する相対的な値の変化を問題とする．Euler–Lagrange 方程式は，Ehresmann–Libermann 接続 ∇ を用いて

$$(\nabla^k + \tau^k)N_{[ij]k} + \frac{1}{2}\nabla_{[i}\tau_{j]} + \frac{1}{2}N_{[i|kl}T_{|j]}{}^{kl} - \frac{1}{4}N_{kij}\tau^k + \frac{1}{4}T^k{}_{ij}\tau_k = 0 \tag{4.1}$$

となる．N，T は J の 1 階微分のみを含むから，これは J の 2 階偏微分方程式である．

与えられた整合概 CR 構造 γ を充填するにあたり（概複素構造に J を用いるので，ここでは概 CR 構造に文字 γ をあてた)，ACH-Einstein 計量 g だけでなく，あわせてそれと両立する (4.1) をみたす概複素構造 J をつくることにしてみよう．ここで J は概 CR 構造 γ の延長となっていることを要請する．

つまり，ただの ACH-Einstein 充填ではなく，「Einstein 方程式および (4.1) をみたす ACH 概 Hermite 構造による充填」を考えたいのである．Kähler ならば (4.1) が自動的になりたつことに注意すれば，「ほぼ Kähler で，かつ Einstein な ACH 概 Hermite 構造による充填」を構成したいのだ，と表現することも許されるだろう．

これで問題の定式化はできた．一般的な解の存在定理を確立するのはもちろん絶望的に難しいが，定理 3.1 を用いて解の変形を行うことはできる．Cheng–Yau 計量について [37] で行った線型解析の結果を利用することで，次のことがわかる（[37] を使えるように $\mathcal{E}_g[J]$ を定義したのである)．

定理 4.1 (松本 [39])**.** $k \geqq 2$，$0 < \alpha < 1$ とする．$\Omega \Subset \mathbb{C}^{n+1}$ をなめらかな境界をもつ有界強擬凸領域とし，$\partial\Omega$ の自然な CR 構造を (H,γ) とする．そのとき，γ に $C^{k,\alpha}$ 位相に関し十分に近い整合概 CR 構造 $\hat{\gamma}$ について，Ω には，$(H,\hat{\gamma})$ を共形無限遠とする $C^{k,\alpha}$ 級 ACH 概 Hermite 構造であって，Einstein 方程式および (4.1) をみたすようなものが存在する．

先ほど述べたような応用のためには，解の境界における漸近挙動を精密に決定することが必要だが，そのための手続きも [39] で与えられている．

5 再びいくつかの例——AH-Einstein 空間の退化

最後にもう一つ，興味深い方向性を指摘しておきたい．それは，AH-Einstein 空間の極限としてどのような空間があらわれうるかという問題である．

Anderson [3] は，トーラス T^2 の任意の平坦計量 g_0 と $\beta > 0$ について，$T^3 = T^2(g_0) \times S^1(\beta)$ を共形無限遠とする $T^2 \times \mathbb{R}^2$ の AH-Einstein 計量の列であって，カスプ $dr^2 + e^{2r} g_{T^3}$ へと収束するようなものが構成できることを紹介している（これは与えられた共形無限遠の AH-Einstein 充塡が無数にある例にもなっている）．そして，4 次元 AH-Einstein 計量のある種の収束列については，その極限は必ずカスプをもつ双曲多様体になることを示した．

Biquard [7, 8, 9] はオービフォールド特異性の解消を扱っている．[7] では，$\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$ 型の特異点を一つもつ 4 次元 AH-Einstein 空間 (X, g) について，$\mathrm{Ker}_{(2)} P = 0$（P はゲージ固定条件つき線型化 Einstein 作用素）および曲率テンソルの特異点における値に関するある条件がみたされているとき，(X, g) に収束する，なめらかな AH-Einstein 空間の 1 パラメタ族があることを証明している．

さらに，2.3 節で紹介した，Berger 球面 $(S^{2m-1}, [h_c])$ を共形無限遠とする B^{2m} の AH-Einstein 計量 g_c を思い出そう．これは $c \to \infty$ とする極限において複素双曲計量に収束し，また $c \to 0$ の極限では，$\mathbb{C}P^{m-1}$ を共形無限遠とする，コーン型特異点を（$m = 2$ のときを除き）一つもつ $2m - 1$ 次元 ACH-Einstein 空間への収束（崩壊）がおこることが確かめられる．この現象については，何らかの一般化された理解があるのだろうか．

参考文献

[1] K. Akutagawa and Y. Matsumoto, Proper harmonic maps between asymptotically hyperbolic manifolds, *Math. Ann.* **364** (2016), no. 3-4, 793–811.
[2] M. T. Anderson, The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, 701–721 (1984).
[3] ———, Boundary regularity, uniqueness and non-uniqueness for AH Einstein metrics on 4-manifolds, *Adv. Math.* **179** (2003), 205–249.
[4] T. N. Bailey, M. G. Eastwood, and A. R. Gover, Thomas's structure bundle for conformal, projective and related structures, *Rocky Mountain J. Math.* **24** (1994), no. 4, 1191–1217.
[5] O. Biquard, Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques, *Astérisque* **265** (2000), vi+109.
[6] ———, Autodual Einstein versus Kähler-Einstein, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), no. 3, 598–633.
[7] ———, Désingularisation de métriques d'Einstein. I, *Invent. Math.* **192** (2013), no. 1, 197–252.
[8] ———, Désingularisation de métriques d'Einstein. II, *Invent. Math.* **204** (2016), no. 2, 473–504.
[9] ———, Non dégénérescence et singularités des métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques en dimension 4, *Math. Ann.* **372** (2018), no. 1-2, 531–553.
[10] O. Biquard and M. Herzlich, A Burns-Epstein invariant for ACHE 4-manifolds, *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 1, 53–100.
[11] D. Burns and C. L. Epstein, Characteristic numbers of bounded domains, *Acta Math.* **164** (1990), no. 1-2, 29–71.
[12] D. M. Burns Jr. and C. L. Epstein, A global invariant for three-dimensional CR-manifolds, *Invent. Math.* **92** (1988), no. 2, 333–348.
[13] A. Čap and A. R. Gover, Standard tractors and the conformal ambient metric construction, *Ann. Global Anal. Geom.* **24** (2003), no. 3, 231–259.
[14] ———, CR-tractors and the Fefferman space, *Indiana Univ. Math. J.* **57** (2008), no. 5, 2519–2570.
[15] S.-Y. A. Chang, J. Qing, and P. Yang, On the topology of conformally compact Einstein 4-manifolds, *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, Contemp. Math. vol. 350, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 49–61.
[16] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the existence of a complete Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 4, 507–544.
[17] H. Donnelly, The differential form spectrum of hyperbolic space, *Manuscripta Math.* **33** (1980/81), no. 3-4, 365–385.
[18] ———, Dirichlet problem at infinity for harmonic maps: rank one symmetric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **344** (1994), no. 2, 713–735.
[19] H. Donnelly and C. Fefferman, L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric, *Ann. of Math. (2)* **118** (1983), no. 3, 593–618.

[20] P. Gauduchon, La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte, *Math. Ann.* **267** (1984), no. 4, 495–518.
[21] C. R. Graham and J. M. Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, *Adv. Math.* **87** (1991), no. 2, 186–225.
[22] M. Gromov and H. B. Lawson Jr., Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **58** (1983), 83–196 (1984).
[23] M. J. Gursky and Q. Han, Non-existence of Poincaré-Einstein manifolds with prescribed conformal infinity, *Geom. Funct. Anal.* **27** (2017), no. 4, 863–879.
[24] M. J. Gursky, Q. Han, and S. Stolz, An invariant related to the existence of conformally compact Einstein fillings, preprint. arXiv:1801.04474.
[25] S. W. Hawking and D. N. Page, Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space, *Comm. Math. Phys.* **87** (1982/83), no. 4, 577–588.
[26] S. Kobayashi, Natural connections in almost complex manifolds, *Explorations in complex and Riemannian geometry*, Contemp. Math. vol. 332, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 153–169.
[27] N. Koiso, Einstein metrics and complex structures, *Invent. Math.* **73** (1983), no. 1, 71–106.
[28] P. D. Lax and R. S. Phillips, The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces, *J. Functional Analysis* **46** (1982), no. 3, 280–350.
[29] J. M. Lee, Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **183** (2006), no. 864, vi+83.
[30] P. Li and L.-F. Tam, The heat equation and harmonic maps of complete manifolds, *Invent. Math.* **105** (1991), no. 1, 1–46.
[31] ———, Uniqueness and regularity of proper harmonic maps, *Ann. of Math. (2)* **137** (1993), no. 1, 167–201.
[32] ———, Uniqueness and regularity of proper harmonic maps. II, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), no. 2, 591–635.
[33] T. Marugame, Renormalized Chern-Gauss-Bonnet formula for complete Kähler-Einstein metrics, *Amer. J. Math.* **138** (2016), no. 4, 1067–1094.
[34] ———, Self-dual Einstein ACH metric and CR GJMS operators in dimension three, preprint. arXiv:1802.01264.
[35] Y. Matsumoto, *Asymptotically complex hyperbolic Einstein metrics and CR geometry*, Ph.D. Thesis, 2013. The University of Tokyo.
[36] ———, Asymptotics of ACH-Einstein metrics, *J. Geom. Anal.* **24** (2014), no. 4, 2135–2185.
[37] ———, Deformation of Einstein metrics and L^2-cohomology on strictly pseudoconvex domains, preprint. arXiv:1603.02216.
[38] ———, GJMS operators, Q-curvature, and obstruction tensor of partially integrable CR manifolds, *Differential Geom. Appl.* **45** (2016), 78–114.
[39] ———, Canonical almost complex structures on ACH Einstein manifolds, preprint. arXiv:1812.09633.
[40] ———, Einstein metrics on strictly pseudoconvex domains from the viewpoint of bulk-boundary correspondence, *Geometric complex analysis*, Springer Proc. Math. Stat. vol. 246, Springer, Singapore, 2018, pp. 235–245.
[41] ———, A construction of Poincaré-Einstein metrics of cohomogeneity one on the ball, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), no. 9, 3983–3993.
[42] R. R. Mazzeo and R. B. Melrose, Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature, *J. Funct. Anal.* **75** (1987), no. 2, 260–310.
[43] H. P. McKean, An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature, *J. Differential Geometry* **4** (1970), 359–366.
[44] T. Ohsawa, Applications of the $\overline{\partial}$ technique in L^2 Hodge theory on complete Kähler manifolds, *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, Proc. Sympos. Pure Math. vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 413–425.
[45] D. N. Page and C. N. Pope, Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles, *Classical Quantum Gravity* **4** (1987), no. 2, 213–225.
[46] H. Pedersen, Einstein metrics, spinning top motions and monopoles, *Math. Ann.* **274** (1986), no. 1, 35–59.
[47] J. Qing, On the rigidity for conformally compact Einstein manifolds, *Int. Math. Res. Not.* **21** (2003), 1141–1153.
[48] J. Rosenberg, Manifolds of positive scalar curvature: a progress report, *Surveys in differential geometry. Vol. XI*, Surv. Differ. Geom. vol. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2007, pp. 259–294.
[49] J. C. Roth, *Perturbation of Kähler-Einstein metrics*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1999. Thesis (Ph.D.)–University of Washington.
[50] D. Sullivan, The Dirichlet problem at infinity for a negatively curved manifold, *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, 723–732 (1984).
[51] S. Tanno, Harmonic forms and Betti numbers of certain contact Riemannian manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 308–316.
[52] V. Tosatti, B. Weinkove, and S.-T. Yau, Taming symplectic forms and the Calabi-Yau equation, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **97** (2008), no. 2, 401–424.