参考文献

書きかけのレクチャーノートが

http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~matsumoto/lecnotes/ah/

に置いてあります．

❖ 背景など

[1] C. L. Fefferman, Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains, *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), no. 2, 395–416.

[2] P. D. Lax and R. S. Phillips, The asymptotic distribution of lattice points in Euclidean and non-Euclidean spaces, *J. Functional Analysis* **46** (1982), no. 3, 280–350.

[3] C. Fefferman and C. R. Graham, Conformal invariants, *Astérisque Numero Hors Serie* (1985), 95–116, The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984).

[4] R. R. Mazzeo and R. B. Melrose, Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature, *J. Funct. Anal.* **75** (1987), no. 2, 260–310.

[5] C. R. Graham and J. M. Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, *Adv. Math.* **87** (1991), no. 2, 186–225.

[6] O. Biquard, Einstein deformations of hyperbolic metrics, *Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds*, Surv. Differ. Geom. vol. 6, Int. Press, Boston, MA, 1999, pp. 235–246.

❖ 幾何的楕円型線型作用素についての一般論

[7] L. Andersson, Elliptic systems on manifolds with asymptotically negative curvature, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), no. 4, 1359–1388.

[8] O. Biquard, Métriques d’Einstein asymptotiquement symétriques, *Astérisque* **265** (2000), vi+109.

[9] ______, *Asymptotically symmetric Einstein metrics*, SMF/AMS Texts and Monographs vol. 13, American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2006. Translated from the 2000 French original by Stephen S. Wilson.

[10] J. M. Lee, Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* **183** (2006), no. 864, vi+83.

なお，[9] は [8] の英訳です．

❖ AdS Schwarzschild 計量について

[11] S. W. Hawking and D. N. Page, Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space, *Comm. Math. Phys.* **87** (1982/83), no. 4, 577–588.

[12] M. T. Anderson, Boundary regularity, uniqueness and non-uniqueness for AH Einstein metrics on 4-manifolds, *Adv. Math.* **179** (2003), 205–249.

❖ L^2 調和微分形式について

[13] J. Dodziuk, L^2 harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **77** (1979), 395–400.

[14] H. Donnelly, The differential form spectrum of hyperbolic space, *Manuscripta Math.* **33** (1980/81), no. 3-4, 365–385.
[15] H. Donnelly and F. Xavier, On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.* **106** (1984), no. 1, 169–185.
[16] R. Mazzeo, The Hodge cohomology of a conformally compact metric, *J. Differential Geom.* **28** (1988), no. 2, 309–339.
[17] N. Yeganefar, Sur la L^2-cohomologie des variétés à courbure négative, *Duke Math. J.* **122** (2004), no. 1, 145–180.
[18] G. Carron, L^2 harmonic forms on non compact manifolds, `arXiv:0704.3194`.
[19] P. Albin, Analysis on non-compact manifolds, `https://faculty.math.illinois.edu/~palbin/18158/18158May26.pdf`.

❖ 漸近的双曲 Einstein 計量について

講義で扱う変形定理については [5, 6, 8, 10] を参照してください．次の論文も参考になるかもしれません．

[20] Y. Matsumoto, Deformation of Einstein metrics and L^2 cohomology on strictly pseudoconvex domains, `arXiv:1603.02216`. To appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*

その後の発展については，たとえば——

[21] J. Qing, On the rigidity for conformally compact Einstein manifolds, *Int. Math. Res. Not.* **21** (2003), 1141–1153.
[22] S.-Y. A. Chang, J. Qing, and P. Yang, On the topology of conformally compact Einstein 4-manifolds, *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, Contemp. Math. vol. 350, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 49–61, DOI 10.1090/conm/350/06337.
[23] O. Biquard, Désingularisation de métriques d'Einstein. I, *Invent. Math.* **192** (2013), no. 1, 197–252.
[24] ———, Désingularisation de métriques d'Einstein. II, *Invent. Math.* **204** (2016), no. 2, 473–504.
[25] M. J. Gursky and Q. Han, Non-existence of Poincaré-Einstein manifolds with prescribed conformal infinity, *Geom. Funct. Anal.* **27** (2017), no. 4, 863–879.
[26] O. Biquard, Non dégénérescence et singularités des métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques en dimension 4, *Math. Ann.* **372** (2018), no. 1-2, 531–553.
[27] S.-Y. A. Chang and Y. Ge, Compactness of conformally compact Einstein manifolds in dimension 4, *Adv. Math.* **340** (2018), 588–652.
[28] Matthew J. Gursky, Qing Han, and Stephan Stolz, An invariant related to the existence of conformally compact Einstein fillings, `arXiv:1801.04474`.
[29] S.-Y. A. Chang, Conformal Geometry on Four Manifolds, `arXiv:1809.06339`.
[30] S.-Y. A. Chang and Y. Ge, Compactness of conformally compact Einstein 4-manifolds II, `arXiv:1811.02112`.

❖ 予備知識

[31] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版, 1980.
[32] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics vol. 94, Springer-Verlag, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.
[33] 加須栄篤, リーマン幾何学, 培風館, 2001.
[34] L. I. Nicolaescu, *Lectures on the Geometry of Manifolds*, World Scientific, 2007. 2nd ed.

演習問題 1

問 1.1　任意のコンパクトかつなめらかな境界つき多様体が境界定義関数をもつことを証明せよ．

問 1.2

(1)　次の等式を証明せよ：

$$R_{ij}{}^{k}{}_{l}\xi^{l} = \nabla_i \nabla_j \xi^k - \nabla_j \nabla_i \xi^k.$$

(2)　曲率テンソルの共形変換則

$$\begin{aligned} e^{-2f}\hat{R}_{ijkl} = R_{ijkl} &- g_{ik}f_{jl} + g_{il}f_{jk} + g_{jk}f_{il} - g_{jl}f_{ik} \\ &+ g_{ik}f_j f_l - g_{il}f_j f_k - g_{jk}f_i f_l + g_{jl}f_i f_k - (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})f^m f_m \end{aligned}$$

を証明せよ．ここで $\hat{g} = e^{2f}g$ であり，g，$\hat{g}$ の曲率テンソルを R_{ijkl}，$\hat{R}_{ijkl}$ と書いた．［ヒント：まずはじめに，ベクトル場 ξ によらないテンソル $C^k{}_{ij}$ が存在して $\hat{\nabla}_i \xi^k = \nabla_i \xi^k + C^k{}_{ij}\xi^j$ であることを確かめ，$C^k{}_{ij}$ を f を用いて具体的に表してみよ.］

問 1.3　$m > 0$ に対する AdS Schwarzschild 計量 g を講義で述べるようなやり方で $(\mathbb{R}^2 \setminus \{o\}) \times S^{n-1}$ の計量とみなしたとき，g が $\mathbb{R}^2 \times S^{n-1}$ のなめらかな計量に拡張されるためには

$$\beta = \frac{2r_+}{nr_+^2 + n - 2}$$

が必要十分であることを証明せよ．ただし，r_+ は $V(r) = 1 + r^2 - 2m/r^{n-2} = 0$ の唯一の正の解を表す.

問 1.4　$m > 0$ に対する AdS Schwarzschild 計量を g_m で表す．ただし，この g_m は講義で述べるようなやり方で $X = \mathbb{R}^2 \times S^{n-1}$ の計量とみなされている．そのとき，$m_1 \neq m_2$ ならば (X, g_{m_1}) と (X, g_{m_2}) のあいだに等長写像は存在しないことを証明せよ．$n = 3$ としてもよい．［ヒント：たとえば，曲率テンソルを計算し，$|R|^2 = R_{ijkl}R^{ijkl}$ の最大値を比較する．もし他の方法を思いついたら素晴らしいです.］

演習問題 2

問 2.1　双曲空間 $\mathbb{H}^{n+1}$ の（関数に作用する）ラプラシアン Δ の表示を，次の 2 通りの方法で導け．

(1)　上半空間モデル．$\mathbb{H}^{n+1} = (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ とみなす．計量は

$$g = \frac{dx^2 + (dy^1)^2 + \cdots + (dy^n)^2}{x^2}.$$

すると $\Delta = (x\partial_x)^2 - nx\partial_x + x^2\Delta_{\mathbb{R}^n}$.

(2)　Poincaré 開球モデル．$\mathbb{H}^{n+1} = B^{n+1}$（$\mathbb{R}^{n+1}$ の単位開球）とみなす．計量は

$$g = 4 \cdot \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n+1})^2}{(1 - |x|^2)^2}.$$

ここでさらに，$\rho = e^{-d(o,x)} = (1 - |x|)/(1 + |x|)$ とおき，$x \in B^{n+1}$ を $(\rho, x/|x|)$ に対応させることで $B^{n+1} \setminus \{ o \} \approx (0,1) \times S^n$ とみる．すると

$$\Delta = (\rho\partial_\rho)^2 - n\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} \cdot \rho\partial_\rho + \frac{4\rho^2}{(1-\rho^2)^2}\Delta_{S^n}.$$

［ヒント：地道にやってもいいですが，ワープ積（warped product）に対するラプラシアンの公式を証明して用いると見通しがよいかもしれません．］

問 2.2　双曲空間 $\mathbb{H}^{n+1}$ において，コンパクト台をもつなめらかな関数の空間 C_0^∞ と，L^2 Sobolev 空間 H^m を考える（$m = 0$，1，2，……）．

(1)　C_0^∞ が H^m の稠密な部分集合であることを示せ．

(2)　ラプラシアン Δ に関する評価式

$$\frac{n^2}{4}\|u\|^2 \leq (u, -\Delta u), \qquad u \in H^2$$

を証明せよ．ただし $\|\cdot\|$ は L^2 ノルム，$(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積を表す．

問 2.3　前問 (2) の結果を利用して，双曲空間のラプラシアン Δ が全単射有界作用素 $H^2 \to L^2$ を定めることを証明せよ．

問 2.4　$\alpha + \beta > n$，$\alpha > \beta$ をみたす実数 α，β に対し，ある $C > 0$ が存在して

$$\int_{\mathbb{H}^{n+1}} e^{-\alpha d(x,y)} e^{-\beta d(y,z)} dV_y \leq Ce^{-\beta d(x,z)}$$

である．この事実に美しい証明を与えよ．［それほど美しくない証明は Lee [10] の Lemma 5.4 にあります．］

演習問題 3

問 3.1　Riemann 多様体 (X, g) の Levi-Civita 接続を ∇ で表す．

(1)　微分 p 形式 α に対し，$d\alpha$ が

$$(d\alpha)_{i_1\cdots i_{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k-1}\nabla_{i_k}\alpha_{i_1\cdots i_{k-1}i_{k+1}\cdots i_{p+1}}$$

で与えられることを証明せよ．

(2)　微分 p 形式（$p \geq 1$）に対し $(d^*\alpha)_{i_1\cdots i_{p-1}} = -\nabla^j\alpha_{ji_1\cdots i_{p-1}}$ と書くことにして*, $\Delta = -(dd^* + d^*d)$ と定める．微分 1 形式 α に対する Weitzenböck の公式

$$(\Delta\alpha)_i = \nabla^j\nabla_j\alpha_i - R_i{}^j\alpha_j$$

を証明せよ．ただし R_{ij} は Ricci テンソルで，さらに $R_i{}^j = g^{jk}R_{ik}$ としている．

問 3.2　AH 空間において，$m_1 > m_2$ かつ $\delta_1 > \delta_2$ ならば，重みつき Sobolev 空間のあいだの自然な埋め込み写像 $H^{m_1}_{\delta_1} \hookrightarrow H^{m_2}_{\delta_2}$ がコンパクト作用素であることを証明せよ（Rellich コンパクト性の AH 空間版）．また，$m_1 > m_2$ であっても $\delta_1 = \delta_2$ のときはコンパクト作用素にならないが，その理由を説明せよ．

問 3.3　$n \geq 3$ とする．双曲空間 $\mathbb{H}^{n+1}$ の微分 1 形式に作用する Hodge ラプラシアン $\Delta = -(dd^* + d^*d)$ に関する強圧性評価

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 \|\alpha\|^2 \leq (\alpha, -\Delta\alpha), \qquad \alpha \in C_0^\infty(\mathbb{H}^{n+1}, T^*\mathbb{H}^{n+1}).$$

を証明せよ．

問 3.4　今日紹介した Fredholm 型定理の主張は，$R = \inf_{\zeta\in\Sigma_P}|\mathrm{Re}\,\zeta - n/2|$ とおくとき，δ が $-R < \delta < R$ の範囲になければ成立しない．$|\delta| \geq R$ の場合に成立しない例を挙げよ．

*p 階共変テンソルの内積はふつう $(u, v) = \int u_{i_1\cdots i_p}v^{i_1\cdots i_p}\,dV$ と定めるが，微分形式について d^* を定める際に用いる内積は $(u, v) = (1/p!)\int u_{i_1\cdots i_p}v^{i_1\cdots i_p}\,dV$ である．おかしな話だが仕方がない．（微分形式についてはさらに外積や外微分についても別の流儀があり，そちらを採用すれば (u, v) を与える式もまた変わってくる．）

演習問題 4

問 4.1　$n+1$ 次元 AH 空間の微分 p 形式に作用する Hodge ラプラシアン $\Delta^{(p)}$ について，その特性根の集合 $\Sigma_{\Delta^{(p)}}$ が

$$\Sigma_{\Delta^{(p)}} = \{\, p-1, p, n-p, n-p+1 \,\}$$

で与えられることを確かめよ．

問 4.2　(X, g) を AH 空間とし，その次元 $n+1$ は偶数であるとする．そのとき

$$\dim \mathcal{H}^{(n+1)/2}_{(2)} = \infty$$

であることを示せ．［Carron [18] の Lemma 3.1.］

演習問題 5

問 5.1　Riemann 計量に対しその Ricci テンソルを与える微分作用素 Ric について，計量 g における微分 $(d\,\mathrm{Ric})_g$ が

$$2((d\,\mathrm{Ric})_g u)_{ij} = (\Delta_L u)_{ij} + \nabla_i \nabla^k u_{jk} + \nabla_j \nabla^k u_{ik} - \nabla_i \nabla_j u_k{}^k$$

で与えられることを示せ．ただし $(\Delta_L u)_{ij} = -\nabla^k \nabla_k u_{ij} + R_i{}^k u_{jk} + R_j{}^k u_{ik} - 2R_i{}^k{}_j{}^l u_{kl}$. 式に現れる共変微分や曲率は，すべて g の Levi-Civita 接続に関するものである．

問 5.2　Banach 空間における陰関数定理を証明せよ．

問 5.3　(X, g) を $n+1$ 次元 AH 空間とし，$0 < \alpha < 1$，$0 \le \delta < n+1$ とする．ベクトル場 $\xi \in C^{2,\alpha}_\delta$ について，ξ の生成するフロー $\mathrm{Fl}^\xi_t \colon X \to X$ を考える．$\|\xi\|_{C^{2,\alpha}_\delta}$ が十分に小さければ，Fl^ξ_1 は局所 $C^{2,\alpha}$ 級微分同相写像を与える．$\varphi_\xi = \mathrm{Fl}^\xi_1$ と書くことにすると，

$$(\xi, u) \mapsto \varphi_\xi^*(g+u) - g$$

は $(0,0) \in C^{2,\alpha}_\delta \times C^{1,\alpha}_\delta$ の近傍 $U_1 \times U_2$ から $C^{1,\alpha}_\delta$ への連続 Fréchet 微分可能写像を与え，したがってまた

$$(\xi, u) \mapsto B_g(\varphi_\xi^*(g+u)), \qquad B_g = \delta_g + \frac{1}{2} d\,\mathrm{tr}_g$$

は $U_1 \times U_2$ から $C^{0,\alpha}_\delta$ への連続 Fréchet 微分可能写像を与える．

いま，$\mathrm{Ric}(g) < 0$ と仮定する．そのとき，0 に十分近い $u \in C^{1,\alpha}_\delta$ に対して，あるベクトル場 $\xi \in U_1 \subset C^{2,\alpha}_\delta$ が存在して $B_g(\varphi_\xi^*(g+u)) = 0$ であることを証明せよ．

［Biquard [8, 9] の Proposition I.4.6. Biquard は $\delta = 0$ を除外していますが，入れても問題ないと思います.］

問 5.4　n を 4 以上の偶数とし，$\overline{X}$ をなめらかな $n+1$ 次元コンパクト境界つき多様体とする．∂X の共形類 $[h]$ が与えられたとして，その Fefferman–Graham 障害テンソルが 0 でないと仮定する（すなわち，$[h]$ を共形無限遠とする smooth conformally compact AH 計量であって $\mathrm{Ric}(g) = -ng + o(\rho^n)$ であるようなものが存在しないと仮定する）．そのとき，$[h]$ を共形無限遠とするどんな AH Einstein 計量 g を考えたとしても，g は決して，smooth conformally compact AH 計量 g^{scc} を用いて

$$g = g^{\mathrm{scc}} + u, \qquad u \in C^{m,\alpha}_n \text{（任意の } m,\ \alpha \text{ に対して）}$$

という形に表されることはないことを証明せよ．

［おそらく正しいと思うのですが，うまく証明できないので問題にしました.］