

9. H^4 における無限遠 Plateau 問題 (1)

極小曲面 = 面積の臨界点を与える曲面
(コンパクトをもつ変分について)



石鹸膜の
形状

Plateau 問題: あらかじめ種 (閉曲線) を与え、それを境界とする極小曲面を見つける問題
高次元にも適用でき、また Riemann 多様体の枠内でも考えられる

← n 次元とする
Riemann 多様体 (M, g) の
 k 次元部分多様体 Σ の k 次元面積:

g から誘導される Σ の Riemann 計量を
 h とする. 座標表示 $h = h_{ab} dx^a dx^b$
($(x^1, \dots, x^k)$ は Σ の局所座標系)

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \sqrt{\det h} dx^1 \dots dx^k$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \sqrt{1 + (u+t\eta)_x^2 + (u+t\eta)_y^2} dx dy \Big|_{t=0} \\ &= \int \frac{u_x \eta_x + u_y \eta_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} dx dy \\ &= - \int \left[\partial_x \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \partial_y \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) \right] \eta dx dy \end{aligned}$$

よって $\mathbb{R}^2$ において $\nabla u = \text{grad } u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ と書くと

Σ が極小曲面:

$$\Leftrightarrow \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

注 $H := \frac{1}{2} \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$ 平均曲率

例 $\mathbb{R}^3$ 内のグラフの場合

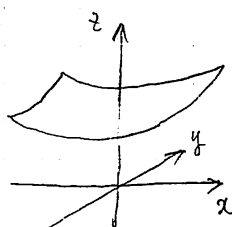
$$(M, g) = (\mathbb{R}^3, g_{\text{Euc}})$$

$$\Sigma = \{ z = u(x, y) \}$$

Σ の座標系として (x, y) を採用

Σ 上の $\partial x, \partial y$ は $\mathbb{R}^3$ 内の $\partial x + u_x \partial z, \partial y + u_y \partial z$

$$h = \begin{pmatrix} 1 + u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & 1 + u_y^2 \end{pmatrix}$$



$$\sqrt{\det h} = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$$

$$\text{Area}(\Sigma)$$

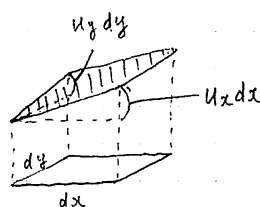
$$= \int \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u_y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$$

Σ の変分は u の変分として与えられる

$$u \mapsto u + t\eta \quad (\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2))$$



⑨ H^4 における無限遠 Plateau 問題

$$H^4 \cong B^4$$

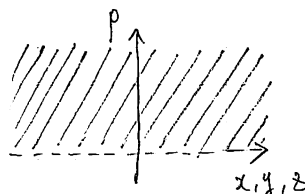


$S^3 \supset N$ 2次元
部分多様体

N を境界とする

H^4 内の極小超曲面は?

存在証明は難し、形式的漸近展開を考察



上半空間モデル

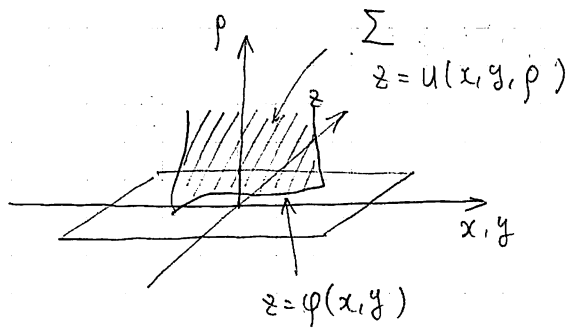
$$g = \frac{dp^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}{p^2}$$

$$\mathbb{R}^3 \cong S^3 \setminus \{\text{1点}\} \supset N \text{ としてよい}$$

さらに N は局所的には関数のグラフ

$$N = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \varphi(x, y) \}$$

であると以下仮定する。



Σ が H^4 の極小超曲面となる条件は？

Σ の座標系として (x, y, p) を採用.

Σ 上の $\partial_x, \partial_y, \partial_p$ は

$H^4 (\cong H_+^4)$ 内の $\partial_x + u_x \partial_z, \partial_y + u_y \partial_z, \partial_p + u_p \partial_z$.

Σ 上の Riemann 計量

$$h = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} 1+u_x^2 & u_x u_y & u_x u_p \\ u_x u_y & 1+u_y^2 & u_y u_p \\ u_x u_p & u_y u_p & 1+u_p^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\det h} &= \frac{1}{p^3} \sqrt{1+u_x^2+u_y^2+u_p^2} \\ &= \frac{1}{p^3} \sqrt{1+|\nabla u|^2} \end{aligned}$$

(∇ は $\mathbb{R}^3 (x, y, p)$ の grad)

(Σ の 3次元面積)

$$= \int \frac{1}{p^3} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx dy dp$$

∴ Σ が 極小超曲面

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \left(\frac{1}{p^3} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0. \quad (*)$$

$u(x, y, p)$

$$\sim \varphi(x, y) + a_1(x, y)p + a_2(x, y)p^2 + \dots$$

(*) が満たされるように $a_1, a_2, \dots$ を決定できるか？

必要に応じて右辺に更高次の項を導入する.

(*) の書き換え $(*) \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\partial_x \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \\ &+ p^3 \cdot \partial_p \left(\frac{1}{p^3} \frac{u_p}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[(p^2 \partial_p - 3p) \left(\frac{u_p}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) \right] =: M[u]$$

$$+ p^2 \partial_x \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + p^2 \partial_y \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

a_1 の決定 $u \sim \varphi + a_1 p + \dots$

$$(M[u] \bmod o(p)) = -3p \cdot \frac{a_1}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2 + a_1^2}}.$$

(※ 「 ∇u 」 には ∇ は $\mathbb{R}^3$ におけるもの
「 $\nabla \varphi$ 」 には ∇ は $\mathbb{R}^2$ におけるもの)

∴ $a_1 = 0$ だと 2 と 4 は 2 と 2 になる.

a_2 の決定 $u \sim \varphi + a_2 p^2 + \dots$

$$\begin{aligned} (M[u] \bmod o(p^2)) &= (p^2 \partial_p - 3p) \left(\frac{2a_2 p}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2}} \right) \\ &+ p^2 \partial_x \left(\frac{\varphi_x}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2}} \right) + p^2 \partial_y \left(\frac{\varphi_y}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2}} \right). \end{aligned}$$

$$\therefore a_2 = \frac{1}{4} \sqrt{1+|\nabla \varphi|^2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2}} \right).$$