

8. さまざまな無限遠境界値問題

微分形式に関する問題

Mazzeo (1988)

Hodge ラポラシアン $\Delta = d^*d + dd^*$

(微分形式に作用するラポラシアン)

$$\Delta w = 0 \quad \text{ある} \dots \Delta - \lambda \quad w = 0$$

注意を要する点

- w が関数ではなくベクトル束のセクション
- 境界値を与えようとするとき「接方向」と「法方向」は対等ではない



$d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_k}$ の項と
 $d\eta \wedge d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_{k-1}}$ の項は異質

類似の例: 対称 $(0,2)$ テンソルに関する

$$(\Delta_L - 2(n-1)) \sigma = 0$$

松本 (2013) が実質的に扱っている

問題 $\varphi \in C^\infty(S^{n-1}, S^{m-1})$ を与える

$$\exists \text{ 調和写像 } u \in C^0(\overline{B^n}, \overline{B^m}) \cap C^\infty(B^n, B^m)$$

$$\text{s.t. } u|_{S^n} = \varphi ?$$

Li-Tam (1993 x 2) 斎田和雄 (1994)

Economakis (1993)

斎田-松本 (2016)

注意を要する点

- 求めるものが関数ではなく写像
- 方程式が非線形
- 境界正則性を阻む項として $\rho^k \log \rho$ だけでなく $\rho^{\text{非整数}}$ の項も現れる

定理 (Li-Tam, Economakis)

(1) $d\varphi$ が S^{n-1} 上 nowhere vanishing

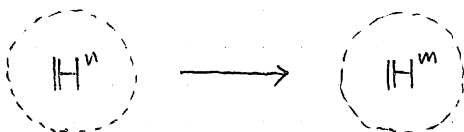
$\Rightarrow$ 問題の u は存在する

(2) u は一意とはいえない (反例あり)

(3) $u \in C^1(\overline{B^n}, \overline{B^m})$ まで要請すれば

存在して一意. 実は $u \in C^{n,\alpha}(\overline{B^n}, \overline{B^m})$.
 $(\forall \alpha \in (0,1))$

調和写像に関する問題



$u: H^n \rightarrow H^m$ が調和写像

def $\Leftrightarrow u$ が Dirichlet エネルギーの臨界点.
 (コンパクトな多様体に関する)

関数のときと
 同様に定義

極小部分多様体



H^n k 次元部分多様体

$N \subset S^{n-1}$ を与えて

$k+1$ 次元極小部分多様体

$\Sigma \subset H^n$ を作る

Σ が極小部分多様体

def $\Leftrightarrow \Sigma$ が $k+1$ 次元面積の臨界点.
 (コンパクトな多様体に関する)

ここで Σ の $k+1$ 次元面積:

$\mathbb{H}^n$ の Riemann 計量 g から誘導される

Σ の " を h として

$$\text{Area}(\Sigma) = \int \sqrt{\det h} dx^1 \dots dx^{k+1}$$

注意を要する点

- 求めるものが関数でも写像でもなく部分多様体。存在証明は難。

Henningsson-Skenderis (1998)

Graham-Witten (1999) Graham (2000)

Alexakis-Mazzeo (2010)

Graham-Reichert (2020) etc.

⑧ 舞台を漸近的双曲空間に一般化する



$$\mathbb{H}^n \cong B^n$$

$$g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} g_{\text{Euc}}$$

これを一般化。

定義 (X, g) が (共形コンパクトな)

漸近的な双曲空間

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (i) X が C^∞ 級境界付き多様体

$\bar{X}$ の内部として与えられている

(ii) $p \in C^\infty(\bar{X})$ を境界定義関数

とすると $p^2 g$ は $\bar{X}$ 上の Riemann 計量で

$$|dp|_{p^2 g} \equiv 1 \quad \text{on } \partial \bar{X}.$$

↑

$p^2 g$ は各点 p で $T_p \bar{X}$ の内積を定める

$\rightsquigarrow T_p^* \bar{X}$ の内積を定める

(X, g) で調和関数その他を考へる

cf. Lee (2006) Fredholm Operators and Einstein Metrics on Conformally Compact Manifolds

$\partial \bar{X}$ 上の共形幾何の観点からは

さらに Einstein 方程式 $\text{Ric}(g) = -(n-1)g$ がみたされる場合が面白い。

問題 (Fefferman-Graham (1985))
(Graham-Lee (1991))

$\partial \bar{X}$ に Riemann 計量の共形類 c を与える。 $(g \sim \hat{g} \iff \hat{g} \text{ は } g \text{ の正値関数倍})$

このとき漸近的な双曲計量 g で

$$(i) \quad \text{Ric}(g) = -(n-1)g$$

$$(ii) \quad (p^2 g \text{ の } \partial \bar{X} \text{ 上の引き戻し}) \in c$$

をみたすものが存在するかい?

定理 (Graham-Lee) $\bar{X} = \bar{B}^n$, c が

S^{n-1} の標準的な共形類に十分近いときは存在する。

定理 (Gursky-Han (2017))

$$\bar{X} = \bar{B}^8 \quad c \text{ の 選 び 方 に よ っ て は}$$

g が存在しない場合がある。