

7. Möbius 共変性

復習 双曲空間 $\mathbb{H}^n \cong B^n \cong \mathbb{H}_+^n$
 単位開球: 上半空間

問題 A: $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ に対し

$u \in C^0(\overline{B^n}) \cap C^\infty(B^n)$ s.t.

$$(*) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^n \\ u = \varphi & \text{on } S^{n-1} \end{cases} \quad \text{を調べる}$$

このように u は存在する. 以下 $n=3, 5, 7, \dots$

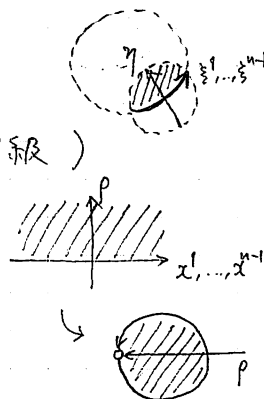
図のようは "境界チャート" では

$$u = F + G \eta^{n-1} \log \eta$$

(F, G は $\eta=0$ 付近 C^∞ 級)

とくに 上半空間モデルを

"境界チャート" とみて



$$u = F + G \rho^{n-1} \log \rho \quad \text{と表すと}$$

$$G|_{\rho=0} = c_n \Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{n-1}{2}} \varphi. \quad \text{次々目標:}$$

定理 7.1 $P = c_n \Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}^{\frac{n-1}{2}}$ (は次をみる):

$\mathbb{R}^{n-1}$ の任意の Möbius 変換 T に対し

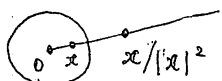
$$P(T^* \varphi) = (\text{正値関数}) \times T^*(P \varphi)$$

$$(T \text{ に対し } T^* \varphi = \varphi \circ T \quad \varphi \text{ の引き戻し})$$

● Möbius 変換

$\mathbb{R}^{n-1}$ の Möbius 変換 とは 下記の合成:

- 平行移動 $x \mapsto x + v$
- 相似拡大・縮小 $x \mapsto \lambda x \quad (\lambda > 0)$
- 直交変換 $x \mapsto Rx \quad (R \text{ は直交行列})$
- 反転 $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$

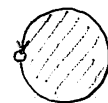


正確には $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ 上の変換と解可べき

$$\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\} \cong S^{n-1} \quad \begin{array}{c} \infty \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} x_1, \dots, x_{n-1} \end{array}$$

とみれば Möbius 変換は

$T: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ C^∞ 級写像



これは $\mathbb{H}^n$ の等長変換と密接に関係する

$$\begin{array}{ccc} \text{B}^n \text{ とみれば} & & \text{H}_+^n \text{ とみれば} \\ g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} g_{\text{Euc}} & & g = \frac{g_{\text{Euc}}}{\rho^2} \end{array}$$

定義 $\Phi: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ 微分同相写像

これが 等長写像 $\iff \Phi$ が g を保つ.

すなわち $\forall p \in \mathbb{H}^n$ について

$$g((\Phi^*)_p(v), (\Phi^*)_p(w)) = g(v, w)$$

$$!! \quad (v, w \in T_p \mathbb{H}^n)$$

$$(\Phi^* g)(v, w)$$

g の引き戻しの定義

定理 7.2 (1) $\mathbb{H}^n$ の任意の等長変換 Φ は,

$$\text{これを } \begin{array}{ccc} \text{B}^n & \xrightarrow{\Phi} & \text{B}^n \\ \text{微分同相} & & \\ \text{B}^n \rightarrow \text{B}^n & & \\ \text{とみれば,} & & \end{array}$$

$$\text{また } \begin{array}{ccc} \text{B}^n & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \text{B}^n \\ \text{微分同相} & & \\ \text{B}^n \rightarrow \text{B}^n & & \\ \text{拡大できる.} & & \end{array}$$

($\bar{\Phi}$ はむしろ等長変換ではない.)

(2) 上記の $\bar{\Phi}$ を制限して与える

写像 $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ は Möbius 変換.

逆に, すべての Möbius 変換は

ある等長変換 Φ に対する $\bar{\Phi}$ の

制限に一致する.

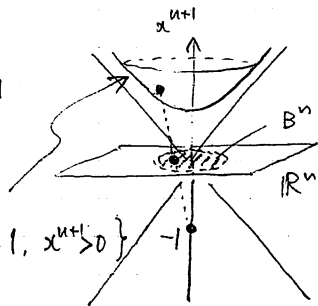
証明の方針

$H^n (\cong B^n)$ の等長変換をすべて具体的に決定する。

Minkowski 空間 $\mathbb{R}^{n,1}$

$$\{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - (x^{n+1})^2 = -1, x^{n+1} > 0\}$$

これを B^n と同一視



$$O(n,1) = \{ A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid$$

A は不定値内積

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i - x^{n+1} y^{n+1}$$

を保持

$O(n,1)$ は  上の、 L^2 によって B^n 上の変換を定める。これを等長変換のすべて。

Möbius 共変性

u が $H^n (\cong B^n)$ 上の調和関数

$\Rightarrow$ 等長変換 $\Phi: H^n \rightarrow H^n$ に対して

$\Phi^* u (= u \circ \Phi)$ も H^n 上の調和関数

① 一般に微分同相写像 $\Phi: M \rightarrow N$ と

N 上の Riemann 計量 g があると

M には $\Phi^* g$ という Riemann 計量が定まり

$$\Delta_{\Phi^* g}(\Phi^* u) = \Phi^*(\Delta_g u).$$

今の場合同 $M=N=H^n$ として $\Phi^* g = g$ ならば

$$\Delta_g(\Phi^* u) = \Phi^*(\Delta_g u).$$

$$\therefore \Delta_g u = 0 \Rightarrow \Delta_g(\Phi^* u) = 0. \quad \square$$

よって次が AA である。

命題 7.3 $\Phi: H^n \rightarrow H^n$ 等長写像

Φ の制限を $T: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ とする。

このとき $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ に対して (*) の解 u

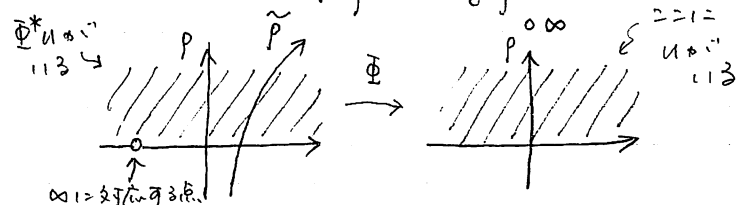
$\Rightarrow T^* \varphi$ に対して (*) の解は $\Phi^* u$ 。

$$H^n \cong H_+^n \text{ として}$$

$$u = F + G \rho^{n-1} \log \rho \text{ とおく。}$$

このとき $\tilde{\rho} = \Phi^* \rho = \rho \circ \Phi$ etc. とおくと

$$\Phi^* u = \tilde{F} + \tilde{G} \tilde{\rho}^{n-1} \log \tilde{\rho}.$$



領域の ∞ に対応する点が定義域の $\rho=0$ 上に存在する場合はその点を ρ 余剰範囲で

$$\tilde{\rho} = A \cdot \rho \left(A \text{ は } \rho=0 \text{ まで } C^\infty \text{ 級の正値関数} \right)$$

これを使うと定理 7.1 がえられる:

$$\Phi^* u = \tilde{F} + \tilde{G} (A \rho)^{n-1} \log (A \rho) \\ \log A + \log \rho$$

$$= \tilde{F} + \tilde{G} (A \rho)^{n-1} \log A \\ + A^{n-1} \tilde{G} \cdot \rho^{n-1} \log \rho.$$

$$\therefore P(T^* \varphi) = (A|_{\rho=0})^{n-1} \cdot \tilde{G}|_{\rho=0} \\ = (A|_{\rho=0})^{n-1} \cdot T^*(P \varphi).$$