

6. 解の対数特異性

対数特異性

定理 6.1 (Mazzeo-Melrose 1987 といふ)
 “安全”な n より以前より既知かも

問題 A の解は (1) n が偶数なら $u \in C^\infty(\bar{B}^n)$.

(2) n が奇数なら

図のようには“境界座標系”をとると



$$u(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + G(\xi, \eta) \eta^{n-1} \log \eta$$

(F, G は $\eta=0$ まで C^∞ 級). $\forall \alpha \in C^{n-2, \alpha}(\bar{B}^n)$
 ($\forall \alpha \in (0, 1)$)

問題 n が奇数のとき

$\varphi \mapsto G|_{\eta=0} =: \psi$ を調べよ.

第1対数項の係数 ψ の決定

(F, G は一意に決まる $G|_{\eta=0}$ は一意)

注 座標系を $(\xi, \tilde{\eta})$ にとると η の影響:

$$\begin{aligned} u &= F + G \eta^{n-1} \log \eta \\ &= \tilde{F} + \tilde{G} \tilde{\eta}^{n-1} \log \tilde{\eta} \quad \text{とある.} \end{aligned}$$

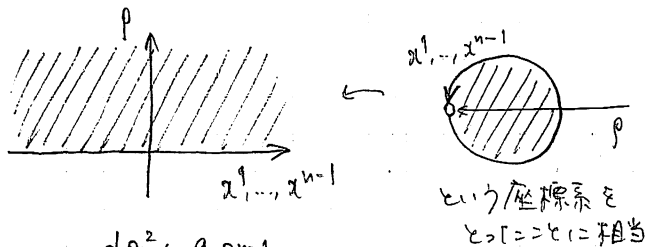
$$\tilde{\eta}(\xi, \eta) = \eta \cdot A(\xi, \eta), \quad A \text{ は } C^\infty \text{ 級, } A > 0 \text{ で}$$

$$\log \tilde{\eta}(\xi, \eta) = \log \eta + \log A(\xi, \eta)$$

$$\therefore G|_{\eta=0} = A(\xi, 0)^{n-1} \tilde{G}|_{\eta=0}. \quad \text{一つの座標系で調べるはず.}$$

第1対数項の係数の決定

上半空間モデルを使う



$$g = \frac{d\rho^2 + g_{R^{n-1}}}{\rho^2}$$

$$u(x, \rho) \sim \varphi(x) + a_1(x) \rho + a_2(x) \rho^2 + \dots$$

$$+ \psi(x) \rho^{n-1} \log \rho + b_1(x) \rho^n \log \rho + \dots$$

この漸近展開の係数を順番に決定する

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j u)$$

$$= \rho^n \partial_\rho (\rho^{-n} \cdot \rho^2 \partial_\rho u) + \rho^2 \Delta_{R^{n-1}} u$$

$$= \rho^2 \partial_\rho^2 u - (n-2) \rho \partial_\rho u + \rho^2 \Delta_{R^{n-1}} u$$

$n=3$ の場合

$$\Delta = \rho^2 \partial_\rho^2 - \rho \partial_\rho + \rho^2 \Delta_{R^2}$$

a_1 を決定: $u = \varphi + a_1 \rho + o(\rho)$ を代入

$$(\Delta u \bmod o(\rho)) = -a_1 \rho + o(\rho)$$

$$\therefore a_1 = 0 \text{ で } \rho^2 \partial_\rho^2 u \text{ は } \rho^2 \text{ 以上}$$

a_2, ψ を決定:

$$u = \varphi + a_2 \rho^2 + \psi \rho^2 \log \rho + o(\rho^2) \text{ を代入}$$

$$(\Delta u \bmod o(\rho^2))$$

$$= \rho^2 (2a_2 + 2\psi \log \rho + 3\psi)$$

$$- \rho \cdot (2a_2 \rho + 2\psi \rho \log \rho + 4\rho) + \rho^2 \Delta_{R^2} \varphi$$

$$= 2\psi \rho^2 + \rho^2 \Delta_{R^2} \varphi$$

$$\therefore a_2 \text{ は決定できず. } \psi = -\frac{1}{2} \Delta_{R^2} \varphi.$$

($\leadsto$ ほとんどの φ に対し $\psi \neq 0$)

$n=5$ の場合

$$\Delta = \rho^2 \partial_\rho^2 - 3\rho \partial_\rho + \rho^2 \Delta_{R^4}$$

同様にして $a_1 = a_3 = 0$ がわかる. $\therefore$ を前提に

a_2 を決定: $u = \varphi + a_2 \rho^2 + o(\rho^2)$ を代入

$$(\Delta u \bmod o(\rho^2)) = 2a_2 \rho^2 - 6a_2 \rho^2 + \rho^2 \Delta_{R^4} \varphi$$

$$= -4a_2 \rho^2 + \rho^2 \Delta_{R^4} \varphi$$

$$\therefore a_2 = \frac{1}{4} \Delta_{R^4} \varphi.$$

a_4 と ψ を決定:

$$u = \varphi + a_2 p^2 + a_4 p^4 + \psi p^4 \log p + o(p^4) \text{ を代入}$$

$$(\Delta u \bmod o(p^4))$$

$$= p^2 \cdot (\cancel{2a_2} + \cancel{12a_4 p^2} + \cancel{12\psi p^2 \log p} + 7\psi p^2) \\ - 3p \cdot (\cancel{2a_2 p} + \cancel{4a_4 p^3} + \cancel{4\psi p^3 \log p} + \psi p^3) \\ + p^2 \cdot (\cancel{\Delta_{\mathbb{R}^4} \varphi} + p^2 \Delta_{\mathbb{R}^4} a_2)$$

$$= 4\psi p^4 + p^4 \Delta_{\mathbb{R}^4} a_2$$

$\therefore a_4$ は決定できない

$$\psi = -\frac{1}{4} \Delta_{\mathbb{R}^4} a_2 = \frac{1}{16} \Delta_{\mathbb{R}^4}^2 \varphi.$$

($\rightarrow$ ほとんどの φ に対し $\psi \neq 0$)

$n = 7, 9, \dots$ のとき: 同様に $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ と ψ を表すことができる

$n = 7, 9, \dots$ の場合

同様に $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ と ψ を表せる.

$$\text{とくに } \psi = c_n \Delta_{\mathbb{R}^{\frac{n-1}{2}}} \varphi.$$

系 6.2 問題 A の解は n が奇数のとき
ほとんどすべての φ について $u \notin C^{n-1}(\overline{B^n})$.

定義 $n = 3, 5, 7, \dots$ に対し

上半空間モデルに帰する

$$P: \varphi \mapsto \psi := G|_{p=0} = c_n \Delta_{\mathbb{R}^{\frac{n-1}{2}}} \varphi$$

の ψ を $\mathbb{R}^{n-1}$ の GJMS 作用素 という.

(正確には critical order の
GJMS 作用素)

注 (1) GJMS 作用素はより一般に任意の
偶数次元 Riemann 多様体上で定義される
(Graham-Jenne-Mason-Sparling 1992).

(2) GJMS 作用素には「共形不変性」がある.
この特別の場合として $\mathbb{R}^{n-1}$ の GJMS 作用素
には「Möbius 不変性」がある. $\leftarrow$ 次回やる

⊙ 第 1 対数項の係数 = 0 のとき

$\psi = 0$ のとき, $p^m \log p$ ($m > n-1$) の
係数もすべて 0 であることが

これまでと同じ方法で確かめられる.

したがって:

定理 6.3 n 奇数のとき 問題 A の

解について

$$u \in C^{n-1}(\overline{B^n}) \Rightarrow C^\infty(\overline{B^n}).$$

第 1 対数項の係数が u が境界まで
 C^∞ 級とするとその唯一の obstruction.