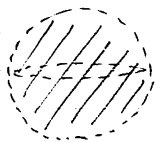


5. 双曲空間の調和関数に関する無限遠 Dirichlet 問題

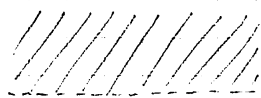
問題の説明

H^n 双曲空間 断面曲率 $\equiv -1$

B^n まりの姿を H^n_+

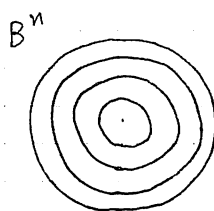


$$g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} g_{\text{Euc}}$$



$$g = \frac{1}{(x^n)^2} g_{\text{Euc}}$$

⑤ 汲み出し (exhaustion) の方法



$$0 < r_1 < r_2 < \dots \rightarrow 1$$

$$D_v := B(0, r_v) \subset\subset B^n \stackrel{H^n}{\hookrightarrow}$$

各 D_v 上で Dirichlet 問題を解いてはどうか。

問題 A (1) $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ に対し

$$u \in C^0(\overline{B^n}) \cap C^\infty(B^n) \text{ s.t.}$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^n \\ u = \varphi & \text{on } S^{n-1} \end{cases} \text{ をみたす } u \text{ はあるか}$$

g のラッパン

(2) 存在するとして u の境界正則性は?

注 この考えから u の一意性は明らか。

$\varphi = 0$ に対す解が $u = 0$ のみと示す。

各 v に対し (定理 4.3 (最大値原理)) より

$$\max_{\overline{D_v}} |u| \leq \max_{\partial D_v} |u| \leq \max_{\partial D_{v+1}} |u| \leq \dots \rightarrow 0$$

$\therefore$ 各 D_v 上で $u = 0$ $\therefore B^n$ 全体で $u = 0$ 。

(あるいは定理 4.4 から直接的にもわかる)

PDE の一般論の観点からは何が難しいのか

$$\Delta u = g_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + (\text{1階以下項})$$

$$g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} g_{\text{Euc}} \text{ の場合は}$$

$$\Delta u = \frac{(1-|x|^2)^2}{4} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u + (\text{1階以下})$$

これが境界で 0 に近づく 「一様楕円性」がでない

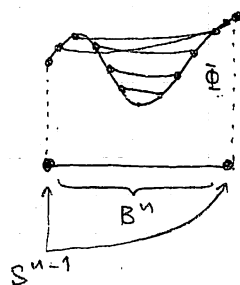
定理 5.1 問題 A の u は存在する。

[証明] $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ を任意に拡張し

$$\Phi \in C^\infty(\overline{B^n}) \text{ とする。}$$

各 D_v で Φ を解く。

$$\begin{cases} \Delta u_v = 0 & \text{in } D_v \\ u_v = \Phi & \text{on } \partial D_v \end{cases}$$



たとえば $n=2$ のときは

事実 (M, g) $\dim M = 2$ のとき

$$\hat{g} = e^{2u} g \Rightarrow \Delta \hat{g} = e^{-2u} \Delta g. \quad (u \in C^\infty(M))$$

$\rightarrow g_{\text{Euc}}$ に関する調和関数を考えるのと同じ

問題 A が興味深いのは $n \geq 3$ のとき。

定理 4.5 より 解 $u \in C^\infty(\overline{D_v})$ を得る。

$$\text{このとき定理 4.3 より } |u_v| \leq \max_{\overline{B^n}} |\Phi|$$

$$\text{さらに楕円型評価により } |\nabla^k u_v| \leq C_k \cdot \max_{\overline{B^n}} |\Phi|$$

Ascoli-Arzelà の定理により

$$B^n \text{ の各コンパクト集合上で } u_v \xrightarrow{C^\infty} \exists u. \quad \square$$

⑧ 球面調和関数を用いる方法

$$P = \{x^1, \dots, x^n \text{ の多項式} \}$$

$$\mathcal{H} = \{ \quad \quad \quad \text{の調和多項式} \}$$

$$\mathcal{H} \subset P$$

部分ベクトル空間

$$\mathbb{R}^n \text{ の 3 点 の ラッポラシアン}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 \text{ について調和}$$

$$\mathcal{H} \text{ の 元 の 例 } 1, x^1, \dots, x^n, (x^1)^2 - (x^2)^2, x^1 x^2, \dots$$

$$P = \mathcal{H} \oplus (|x|^2) \mathcal{H} \oplus |x|^4 \mathcal{H} \oplus \dots$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i)^2$$

半径 r の球面

命題 5.2 $\forall \varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ は

球面調和関数 ($\mathcal{H}$ の元) の S^{n-1} への制限)

でいくらでもよく一様近似ができる。

[証明] Weierstrass の多項式近似定理。□

問題 A を解くには、球面調和関数

f について解いて制限をとる。

f が 斉次式 $h \in \mathcal{H}$ の制限のときを考える。

補題 5.3 $f = h|_{S^{n-1}}, f \in \mathcal{H}$ は k 次斉次式

$$\Rightarrow \Delta_{S^{n-1}} f = -k(n+k-2) f.$$

$$\text{例 } n=2 \text{ のとき } \cos k\theta, \sin k\theta \text{ に対し } \partial_\theta^2 h = -k^2 h.$$

[証明] $\mathbb{R}^n$ の原点からの Euclid 距離を

$$r \text{ として } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times (0, \infty).$$

後者の表示に関し $g_{\text{Euc}} = dr^2 + r^2 g_{S^{n-1}}$

$$\Delta_{g_{\text{Euc}}} = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}}$$

$$\text{仮定のもとで } h = r^k f \quad (r \geq 0)$$

$$0 = \Delta_{g_{\text{Euc}}} h$$

$$= k(k-1) r^{k-2} f + (n-1) k r^{k-2} f + r^{k-2} \Delta_{S^{n-1}} f.$$

$\mathbb{H}^n$ のラッポラシアンは? 今度は $(\mathbb{H}^n = B^n$

とみて) 原点からの双曲距離を r として

$$B^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times (0, \infty)$$

$$r = \log \frac{1+|x|}{1-|x|}$$

$$\text{したがって } g_{\mathbb{H}^n} = dr^2 + (\sinh r)^2 g_{S^{n-1}}$$

$$\Delta_{g_{\mathbb{H}^n}} = \partial_r^2 + (n-1) \frac{\cosh r}{\sinh r} \partial_r + \frac{1}{(\sinh r)^2} \Delta_{S^{n-1}}$$

$$u = \alpha(r) f \text{ である。これは正しいか。}$$

α のみに関する ODE を得られ、解ける。

定理 5.4 上記の f に対する問題 A の解は

$$u = \alpha(r) f,$$

$$\alpha(r) = c_{n,k} (\sinh r)^{1-\frac{n}{2}} P_{\frac{n}{2}-1}^{-k-\frac{n}{2}+1}(\cosh r)$$

ただし P は Legendre 陪関数。

Gauss の超幾何関数で表せる。

$P_{\frac{n}{2}} \succ$ 整数のときは $\frac{n}{2}$ 階級

n が偶数 したがって u は B^n 上 C^∞ 級

n が奇数 u は一般に B^n 上 C^∞ 級で

ない。境界において「対称性」をもつ

一般の $\varphi \in C^\infty(S^{n-1})$ に関する結論を

これから与えるのは難しいが、大まかな示唆を与える