

4. 調和関数

Euclid空間上の調和関数

$$\mathbb{R}^n \text{ 上 } \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u = 0 \leftarrow \Delta u = 0$$

とも書く

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0 \text{ とも表せる}$$

(熱平衡状態)

u の Dirichlet エネルギー

$$\int |\operatorname{grad} u|^2 dx^1 \dots dx^n \text{ を適切に理解}$$

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} u_{x^1} \\ \vdots \\ u_{x^n} \end{pmatrix} \quad |\operatorname{grad} u|^2 = \sum_{i=1}^n u_{x^i}^2$$

$|du|^2$ と書くこともある $du = u_{x^i} dx^i$ である
 $|\nabla u|^2$ と書くこともある ∇u は du と同義

命題 4.1 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の調和関数

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ に対し}$$

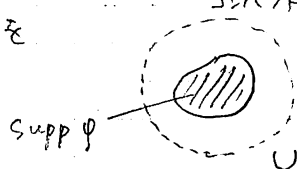
コンパクト

$$\frac{d}{dt} \int_U |d(u+t\varphi)|^2 dx^1 \dots dx^n \Big|_{t=0} = 0$$

相対コンパクト (U の閉包がコンパクト)

$t=0$ として $U \subset \mathbb{R}^n$ を

図のようにとる



[証明] 右側の条件

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^n u_{x^i} \varphi_{x^i} \right) = 0 \quad (\forall \varphi)$$

$$\Leftrightarrow - \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u) \varphi = 0 \quad (\forall \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \Delta u = 0 \text{ (変分法の見本補題)}$$

□

Riemann多様体の調和関数

(M, g) において

定義 $u \in C^\infty(M)$ の調和関数

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Delta u = 0. \quad t=0 \text{ として}$$

$$\Delta u := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_{x^i} (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_{x^j} u) \\ = g^{ij} (\nabla^2 u)_{ij} \quad (\nabla^2 u = \nabla du)$$

これも次のように成立するようにしている

命題 4.2 $u \in C^\infty(M)$ の調和関数

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(M) \text{ に対し}$$

$$\frac{d}{dt} \int_U |d(u+t\varphi)|^2 dV_g \Big|_{t=0} = 0$$

$\langle dx^i, dx^j \rangle = g^{ij}$ $\sqrt{\det g} dx^1 \dots dx^n$ のこと
 という内積でいえる U は M と同様に

$\mathbb{R}^n$ の有界領域で

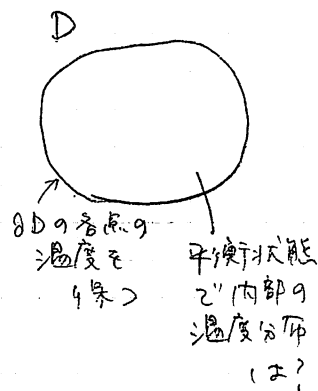
境界値を与え

調和関数を作る

問題 (Dirichlet

問題) は古典的.

一般の Riemann 多様体でも考える.



最大値原理

定理 4.3 $D \subset M$ 相対コンパクト領域

$$u \in C^0(\bar{D}) \cap C^\infty(D) \quad D \text{ 上調和}$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{D}} u, \min_{\bar{D}} u \text{ は } \partial D \text{ 上で達成される}$$

さらに, $u \equiv \text{const}$ でない限り D 内ではいっしょにも達成されない

$\mathbb{R}^n$ の有界領域 D には

- 直観的にはあてはまる
- 論理的にも「平均値の性質」から可

Riemann 多様体 M では?

$$\Delta u = g_{ij}(\nabla^2 u)_{ij} = g_{ij}(\partial_{x_i} \partial_{x_j} u - \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k} u)$$

定理 4.4 (E. Hopf) $U \subset \mathbb{R}^n$ 連結

$$Lu := a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + b_i \partial_{x_i} u$$

かつ $a_{ij}, b_i \in C^0(U)$,

(a_{ij}) は各点で正定値対称行列

と仮定 $u \in C^2(U)$, $Lu \geq 0$

$\Rightarrow u \equiv \text{const}$ かつ U 内で最大値も最小値も取る

注 U 内で $Lu > 0$ ならば当然

$\left(\begin{array}{l} p \in U \text{ で最大値をもてば} \\ (Lu)(p) \leq 0 \text{ となってしまう} \end{array} \right)$

仮定 $Lu \geq 0$ に対してよいという

と示す必要がある。

[定理 4.4 $\Rightarrow$ 定理 4.3 の証明]

$$A = \{p \in D \mid u(p) = \max u\} \neq \emptyset \text{ と仮定}$$

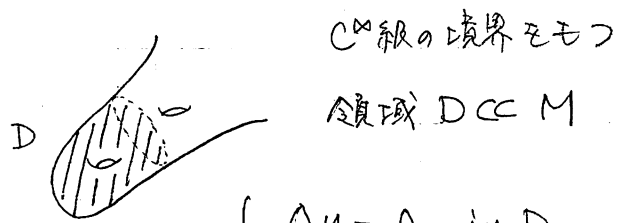
$p \in A$ に対し p の属する連結成分 K をとる

とすれば「定理 4.4 より K の上で $u \equiv \text{const}$ 」

$\therefore A \subset D$. $A \subset D$ は明らかに $A = D$.

最大値をもつときも同様。 $\square$

⑧ Dirichlet 問題の解



$$(*) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = \varphi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

↑
与える

定理 4.5 $\varphi \in C^\infty(\partial D)$ を与えると

$\exists! u \in C^0(\bar{D}) \cap C^\infty(D)$ s.t. $(*)$ をみたす。

かつ $u \in C^\infty(\bar{D})$.

[一意性の証明] 2つあるとすると

$v = u_1 - u_2$ かつ $\Delta v = 0$ かつ ∂D 上で 0 .

$\therefore$ 定理 4.3 より $v \equiv 0$. $\square$

存在証明は別の方法が必要。

たとえば「Sobolev 空間」を使う。

$\Delta: H_0^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ が全単射

($\|u\|_2 \leq \|du\|_2$ ($u \in C_0^\infty(D)$) と Hilbert 空間論)

$\varphi \in C^\infty(\partial D)$ を任意に $\psi \in C^\infty(\bar{D})$ に延長

$v = u - \psi$ のみたすべき条件:

$$\begin{cases} \Delta v = -\Delta \psi & \text{in } D \\ v = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

上記をみたす v を $H_0^1(D)$ においてとれる

楕円型正則性 (と Sobolev の埋め込み

定理) より $v \in C^\infty(\bar{D})$.