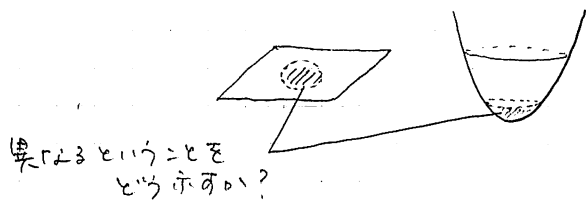


3. 曲率

(M, g) Riemann 多様体

局所的に与えられる $(\mathbb{R}^n, g_{\text{Euc}})$ と

関係する量を



① 曲率テンソル

定義 $((1,3)$ 型の曲率テンソル)

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

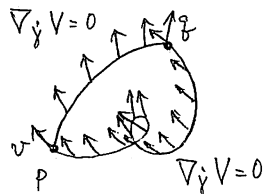
$\mapsto (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$ は

$C^\infty(M)$ の 3 重線形 $((1,3)$ 型テンソル) を定める。

接ベクトルの平行移動の

経路依存性を表すという

説明がよくわかる (略)。



座標表示: $\text{Chart}(U; x^1, \dots, x^n)$ 上では

$$R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R_{ij}{}^k{}_l \partial^l$$

定義 $((0,4)$ 型の曲率テンソル)

$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)W, Z) \in C^\infty(M)$$

座標表示: $R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}$

$T \mapsto T^* \mapsto R_{ijkl} = g_{km} R_{ij}{}^m{}_l$ がわかる。

命題 3.1

$$(1) R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

$$(2) R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

$$(3) R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

$$(4) R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$

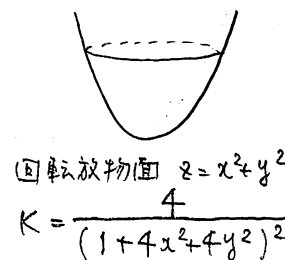
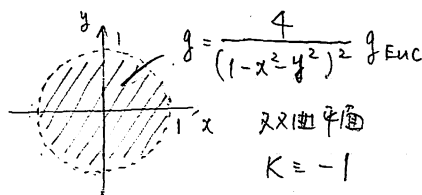
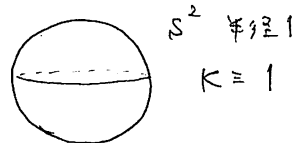
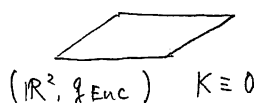
系 3.2 $\dim M = 2$ ならば

$p \in M$ 上 $T_p M$ の正規直交基底 v, w をとり

$$R(v, w, v, w) \in \mathbb{R}$$

を考えると、これは正規直交基底の選び方に
依存しない (M の Gauss 曲率 といい K で表す)。

例



② 断面曲率

一般次元でも 2次元部分空間 $\sigma \subset T_p M$

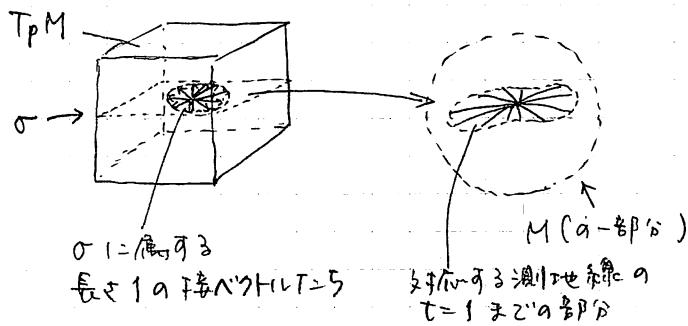
をとり、スカラー量がえられる。

定義 σ の正規直交基底 v, w をとって

$$K(\sigma) := R(v, w, v, w)$$

(M, g) の σ に関する 断面曲率

注 これは指数写像による σ の像として
えられる 2次元部分多様体の Gauss 曲率.

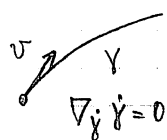


測地線の初速度依存性と曲率

(M, g) $p \in M$ $v \in T_p M$ 長さ 1 とする

$\gamma: [0, \infty) \rightarrow M$ 測地線

$\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$



$[0, \infty)$ まで延ばせたい

可能性も一般にはある

(M, g) の「完備」による (cf. Hopf-Rinow の定理)

(cf. Hopf-Rinow の定理)

例

$(\mathbb{R}^n, g_{\text{Euc}})$ $K(\sigma) \equiv 0$

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 単位球面 $K(\sigma) \equiv 1$

双曲空間 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ 単位開球に



$$g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} g_{\text{Euc}}$$

(1.1 は Euclid 型)

$$K(\sigma) \equiv -1$$

この説明と同じ中央部と(周縁部)があるよう

に、実は等質空間 (任意の 2 点から

等長変換でうつりあう)。

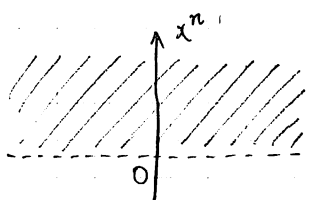
↑ 局微分同相で Riemann 計量も保つ

B^n は双曲空間のかりそめの姿

(Poincaré モデルという)

固定 $t=B^n$ のことと考えるのはまあいい

別のかりそめの姿 (上半空間モデル)



$$H_+^n = \{x^n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$g = \frac{1}{(x^n)^2} g_{\text{Euc}}$$

双曲空間を H^n で表す。

実際としては $B^n \cong H_+^n \cong H^n$ となる。

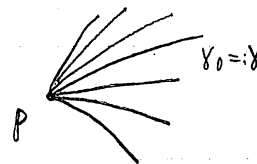
定理 3.3 上記のような測地線の族

$\gamma_s: [0, \infty) \rightarrow M$

$\gamma_s(0) = p$

$\dot{\gamma}_s(0) = v_s \leftarrow$ 長さ 1

$s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に C^∞ 級に依存



(1) $\Phi: [0, \infty) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ C^∞ 級写像

$(t, s) \mapsto \gamma_s(t)$

(2) (Gauss の補題)

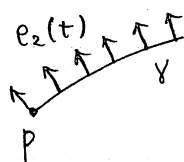
$$V(t) := \frac{\partial \Phi(t, s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \quad (\text{は } \dot{\gamma}(t) \text{ に直交する})$$

↑ 測地線の無限小変位をあらわすベクトル場

$$(3) \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} V = R(\dot{\gamma}, V) \dot{\gamma}$$

(Jacobi 方程式) V は自励的

例 $\dim M = 2, K \equiv \text{const } a$ とする



M oriented と仮定して γ 上各点で

$T_{\gamma(t)} M$ の正規基底 $\dot{\gamma}(t), e_2(t)$

90°回転

$$V(t) = f(t) e_2(t) \mapsto \ddot{f} = -K f$$

$$f(t) = \begin{cases} C \sin \sqrt{K} t & (K > 0) \\ C t & (K = 0) \\ C \sinh \sqrt{|K|} t & (K < 0) \end{cases}$$

円形に離れていく

指数的に離れていく