

2. 共変微分

① 曲線に沿ったベクトル場の共変微分
測地線には「加速度=0」という定式化も
可能ではなないかい。

$$\ddot{y}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{y}^j \dot{y}^k \quad (i=1, \dots, n)$$

は曲線 γ の加速度をあらわす？

より一般に曲線に沿った

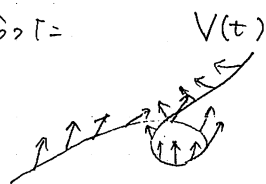
ベクトル場を考える。

$$\gamma: I \rightarrow M$$

$$V(t) \in T_{\gamma(t)} M$$

t について C^∞ 級 (座標表示で定義する)

その「 γ に沿った微分」を定義する。



定義 γ に沿ったベクトル場 $\nabla_{\dot{\gamma}} V$ を,

各 $t \in I$ について $\gamma(t)$ のまわりのチャートを

とて,

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} V)^i = \frac{dV^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \dot{\gamma}^j V^k$$

によって定める ($\nabla_{\dot{\gamma}} V = (\nabla_{\dot{\gamma}} V)^i \frac{\partial}{\partial x^i}$).

$\nabla_{\dot{\gamma}} V$ を V の γ に沿った共変微分 という。

命題 2.1 $\nabla_{\dot{\gamma}} V$ は各 $t \in I$ における

チャートの選び方に依存せず定まる。

問題 これを確かめよ。

また Christoffel 記号の変換則が必要。

② 多様体上のベクトル場の共変微分

曲線に沿った共変微分の類似

定義 (M, g) Riemann 多様体

(1) $p \in M$ の開近傍 U で定義された

ベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(U)$ と $v \in T_p M$ に対し

$$\nabla_v Y \in T_p M, (\nabla_v Y)^i = v(Y^i) + \Gamma^i_{jk} v^j Y^k.$$

(2) $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対し $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y$$

によって定義する。 Y の X による 共変微分

Y は微分されるものの p のまわりの 値の問題

X は点 p での値だけの問題

命題 2.2 (1) $\nabla_v Y$ はやはりチャートの

選び方によらない。

(2) $\nabla_X Y$ は X について関数線形
($C^\infty(M)$ 線形):

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y.$$

(3) $\nabla_X Y$ は Y について $\mathbb{R}$ 線形かつ
次の Leibniz 則をみたす:

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y.$$

注 いまは Riemann 計量の定める

共変微分 (Levi-Civita 接続) に関する

——) を考えているので、上記 (2), (3)

をみたす操作を一般に共変微分という。

命題 2.3 Riemann 多様体について

共変微分は次のように定義する:

$$(1) \quad X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

(これは $\nabla g = 0$ と書ける: 次項)

$$(2) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

[証明] まず (1) の 左辺 - 右辺は

$$\begin{aligned} & X, Y, Z \text{ の各々について } C^\infty(M) \text{ 線形性で} \\ & \text{あることを確かめる. } f \text{ として } Y \text{ について} \\ & X(g(fY, Z)) - g(\nabla_X(fY), Z) - g(fY, \nabla_X Z) \\ &= X(f \cdot g(Y, Z)) - g(f \nabla_X Y + (Xf)Y, Z) \\ &= \cancel{X(f \cdot g(Y, Z))} - g(f \nabla_X Y + (Xf)Y, Z) \\ &= f \cdot g(Y, \nabla_X Z) - \cancel{(Xf) \cdot g(Y, Z)} + f \cdot X(g(Y, Z)) \end{aligned}$$

$$= f (X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)).$$

こうして $C^\infty(M)$ の線形性にかかわりなく

ある (各チャート上で) 次を示せばおわり:

$$\partial_i(g(\partial_j, \partial_k)) = g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) + g(\partial_j, \nabla_{\partial_i} \partial_k).$$

(∂_i は $\frac{\partial}{\partial x^i}$ のこと)

(2) も同様. $\square$

テンソルの共変微分

① $(0, r)$ 型テンソルの場合

定義 $(T^*M)^{\otimes r}$ の C^∞ 級切断のものを

$(0, r)$ 型テンソル と言う. つまり

$A = \{A_p\}_{p \in M}$ が $(0, r)$ 型テンソルとは

(i) $\forall p \in M$ として A_p は

多重線形写像 $\underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{r \text{ 個}} \rightarrow \mathbb{R}.$

(ii) A_p は p に関して C^∞ 級.

つまり各チャート $(U; x^1, \dots, x^n)$ 上で

$A_p((\partial_{i_1})_p, \dots, (\partial_{i_r})_p)$ は C^∞ 級関数.

定義 このとき $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対し

$$\begin{aligned} & (\nabla_X A)(Y_1, \dots, Y_r) \\ &= X(A(Y_1, \dots, Y_r)) - \sum_{s=1}^r A(Y_1, \dots, \nabla_X Y_s, \dots, Y_r). \end{aligned}$$

f として $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ は任意.

$\nabla_X A$ は $(0, r)$ 型テンソルになっている.

(非自明. $C^\infty(M)$ の多重線形性を示せばよい).
↑詳しくは問題

∇A は $(0, r+1)$ 型テンソルになっている.

($X, Y_1, \dots, Y_r$ を入力すると関数を返す).

② $(1, r)$ 型テンソルの場合

定義 $(T^*M)^{\otimes r} \otimes TM$ の切断のものを

$(1, r)$ 型テンソル と言う. つまり $A = \{A_p\}_{p \in M}$ として

(i) $A_p: \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{r \text{ 個}} \rightarrow T_p M$ 多重線形

(ii) A_p は p に関して C^∞ 級

であるものを.

このとき $\nabla_X A$ が定義され $(1, r)$ 型テンソル.

($X(A(\dots))$ を $\nabla_X(A(\dots))$ に変更.)

∇A は $(1, r+1)$ 型テンソルになっている.