

レポート課題

下記から 1 問以上を選んで解答してください。

1. 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ を上半平面モデルにより $H_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ とみなす. その Riemann 計量は $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ である. a を正定数とする.

(1) 曲線 $\gamma: [-a, a] \rightarrow H_+^2$, $\gamma(t) = (t, a)$ の長さ $L(\gamma)$ を求めよ.

(2) 曲線 $\gamma: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow H_+^2$, $\gamma(t) = (\sqrt{2}a \sin t, \sqrt{2}a \cos t)$ の長さ $L(\gamma)$ を求めよ.

[ヒント: (1), (2) の答えはともに a に依存しないことがわかるはず. 原始関数の公式は適当に調べて使ってよい. (1) よりも (2) のほうが短い.]

2. Riemann 多様体におけるベクトル場の共変微分について, 任意のベクトル場 X, Y に対し $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ であることを示せ. [注: 講義の命題 2.3 の (2) である.]

3. 2 次元 Riemann 多様体 M では, 各点 $p \in M$ で $T_p M$ の正規直交基底 v, w をとり

$$K = R(v, w, v, w)$$

と定める. 右辺が正規直交基底の選びかたに依存しないことを示せ. [注: 講義の系 3.2 である. 命題 3.1 を使ってよい.]

4. 2 変数 x, y のすべての斉次 k 次調和多項式からなるベクトル空間を $\mathcal{H}_k$ であらわす (0 は特別に $\mathcal{H}_k$ の元であると定める). $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ の次元を求めよ.

5. 双曲空間 $\mathbb{H}^7$ を B^7 と同一視し, $\varphi \in C^\infty(S^6)$ に対する無限遠 Dirichlet 問題の解としてえられる調和関数を u とする. 上半空間モデルにより境界チャートを導入し, u を

$$u = F + G\rho^6 \log \rho$$

とあらわす (F, G は上半空間 H_+^7 の閉包 $\overline{H_+^7} = \{(x^1, \dots, x^6, \rho) \in \mathbb{R}^7 \mid \rho \geq 0\}$ において C^∞ 級). $\psi = G|_{\rho=0}$ を φ を用いて表示する式を導出せよ.

6. $\mathbb{R}^4$ 上の反転 $x \mapsto x/|x|^2$ を I であらわす. この I を, ここでは $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ という写像とみなす. $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ 上で定義された任意の C^∞ 級関数 φ に対し

$$\Delta_{\mathbb{R}^4}^2(I^*\varphi) = \frac{1}{|x|^8} \cdot I^*(\Delta_{\mathbb{R}^4}^2\varphi)$$

であることを, 直接的な計算によって確かめよ.