

1. Riemann 計量

多様体の復習

C^∞ 級多様体 M とは:

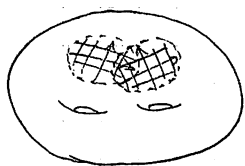
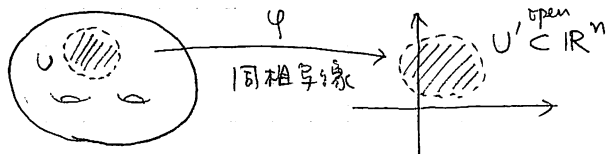


チャート (座標近傍) で
覆われており
座標変換は C^∞ 級写像

形式を整えれば次のとおり。

① M は Hausdorff 空間

② $U \subset M$ と



のペア (U, φ) を チャート という

(U, φ) のことを $(U; x^1, \dots, x^n)$ と書く

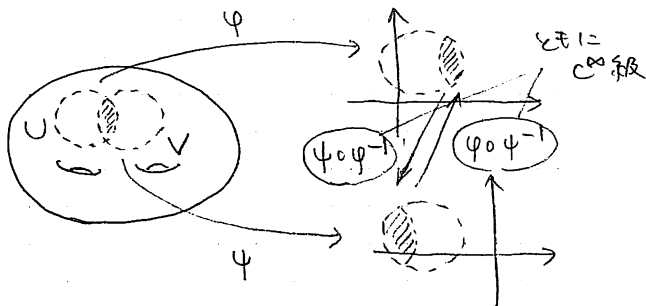
φ によって定まる U 上の座標関数

③ M には 全体を覆う アトラス

(チャートの集まり) $\mathcal{A}$ が備わっている

④ さらにどの $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ も

次の意味で C^∞ 級に交わる

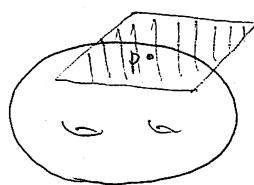


(※ $U \cap V = \emptyset$ のときこの条件は trivial に成立していると考え)

このような $\mathcal{A}$ が M に C^∞ 級多様体の構造を与える。

注 もともと $\mathcal{A}$ に属していいチャートでも, $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ と C^∞ 級に交わるものは, それも「 M のチャート」と考える。

接空間 $T_p M$ ($p \in M$)



p の属するチャート
 $(U; x^1, \dots, x^n)$ を
とけば

$$T_p M = \left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p}_{\text{線形独立}} \right\rangle$$

Riemann 計量

各 $p \in M$ において内積 g_p を

定められている状態を考える 省略可能なこと
 $g_p(v, w)$ を $\langle v, w \rangle_{g_p}$ と書く

$$\text{各チャートで } \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right\rangle_{g_p} =: g_{ij}(p)$$

定義 $g = \{g_p\}_{p \in M}$ を

(C^∞ 級) Riemann 計量

$\Leftrightarrow \forall$ チャート (U, φ) で

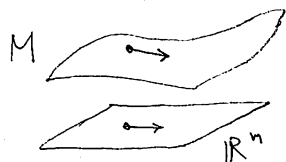
$g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$ が C^∞ 級関数。

U 上で $g = \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j \right)$ と表す
省略できる (Einstein の規約)

例 (1) Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad g = \delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$$

(2) $f = f(x^1, \dots, x^n)$ のグラフ $\subset \mathbb{R}^{n+1}$



「 $\mathbb{R}^{n+1}$ の Euclid 計量から誘導される計量」がある
↑ g とある

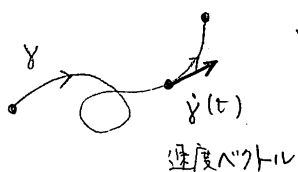
M の座標系として $x^1, \dots, x^n$ を採用

M 上の $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ は $\mathbb{R}^n$ の基底ベクトルとしては

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p + f_i \left(\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}\right)_p \quad (f_i \text{ は } \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ のこと})$$

$$\therefore \boxed{g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j}$$

測地線



$\gamma: [a, b] \rightarrow M$
 C^∞ 級曲線

7+1+1+2" $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$
と可なり

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} M$$

$$\text{定義 } L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_{g_{\gamma(t)}} dt$$

Riemann 多様体上を "まっすぐ" 進むこと

軌跡とは — 局所最短曲線のことを考える。

定義 $\gamma: I \rightarrow M$ を $\mathbb{R}$ 区間 測地線

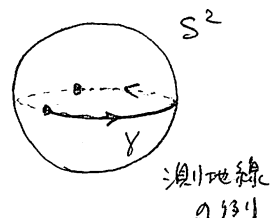
$$\Leftrightarrow \forall t_0 \in I \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t.}$$

$$\forall a, b \in I \cap (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), a < b$$

すなわち $\gamma|_{[a, b]}$ は

$\gamma(a)$ から $\gamma(b)$ に

いける最短の path.



以下 $|\dot{\gamma}(t)| \equiv \text{const} (> 0)$ とする

パラメタ化を与え (狭義の) 測地線とよぶ。

定理 1.1 γ を (狭義の) 測地線

$$\Leftrightarrow \forall t_0 \in I \quad \gamma(t_0) \text{ 近くでの座標表示}$$

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)) \text{ を}$$

次で表す:

$$\boxed{\ddot{\gamma}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0}$$

$$t \in I \text{ 上 } \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

g の逆行列の各成分

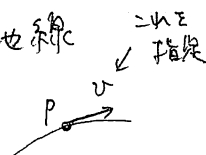
(Christoffel 記号)

という名の n^3 個の関数

系 1.2 $\forall p \in M \quad \forall v \in T_p M$

$\exists \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ 測地線

$$\text{s.t. } \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$$



事実 コンパクト上 (より一般には完備上)

Riemann 多様体ではどの測地線もいくらでも延ばせる。

(cf. Hopf-Rinow の定理)