

10. H^4 における無限遠 Plateau 問題 (2)

つまり a_3 は 0 と a_2 と a_4 によって決まる (明か).

a_4 の決定 $u \sim \varphi + a_2 \rho^2 + a_4 \rho^4 + \dots$

$(M[u] \bmod o(\rho^4))$

$$= (\rho^2 \partial_\rho - 3\rho) \left(\frac{2a_2 \rho + 4a_4 \rho^3}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi + \rho^2 \nabla a_2|^2 + (2a_2 \rho)^2}} \right) + \rho^2 \partial_x \left(\frac{\varphi_x + (a_2)_x \rho^2}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi + \rho^2 \nabla a_2|^2 + (2a_2 \rho)^2}} \right)$$

$$+ \rho^2 \partial_y \left(\frac{\varphi_y + (a_2)_y \rho^2}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi + \rho^2 \nabla a_2|^2 + (2a_2 \rho)^2}} \right)$$

次に注意する: $X = 2 \nabla \varphi \cdot \nabla a_2 + 4a_2^2$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi + \rho^2 \nabla a_2|^2 + (2a_2 \rho)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2 + \rho^2 X + \dots}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}} \cdot \left(1 + \rho^2 \frac{X}{1 + |\nabla \varphi|^2} + \dots \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R_\varphi} - \frac{1}{2} \rho^2 \frac{X}{R_\varphi^3} + \dots \quad \left(R_\varphi = \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2} \right)$$

$\therefore (M[u] \bmod o(\rho^4))$

$$= (\rho^2 \partial_\rho - 3\rho) \left(\frac{2a_2 \rho}{R_\varphi} + \frac{4a_4 \rho^3}{R_\varphi} - 2a_2 \rho \cdot \frac{1}{2} \rho^2 \frac{X}{R_\varphi^3} \right) + \rho^2 \partial_x \left(\frac{\varphi_x}{R_\varphi} + \frac{(a_2)_x \rho^2}{R_\varphi} - \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\varphi_x X}{R_\varphi^3} \right) + \rho^2 \partial_y \left(\frac{\varphi_y}{R_\varphi} + \frac{(a_2)_y \rho^2}{R_\varphi} - \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\varphi_y X}{R_\varphi^3} \right)$$

とすると a_4 の関係式が得られるので与えられ

$$(\rho^2 \partial_\rho - 3\rho) \left(\frac{4a_4 \rho^3}{R_\varphi} \right) = 0.$$

$\therefore a_4$ は決定できない。

さらに一般には ρ の形式ベキ級数の

範囲で $M[u] = 0$ の解 u は与えられる。

4 次の対数項の導入

$$u \sim \varphi + a_2 \rho^2 + a_4 \rho^4 + \psi \rho^4 \log \rho + \dots$$

$z'' \bmod o(\rho^4)$ の解を u とするのを調べる。

$$\left(\text{つまり } a_4 \rho^4 \text{ を } a_4 \rho^4 + \psi \rho^4 \log \rho \text{ に} \right. \\ \left. \text{入れかえる } z'' \right)$$

$(M[u] \bmod o(\rho^4))$

$$= (\rho^2 \partial_\rho - 3\rho) \left(\frac{4a_4 \rho^3 + \psi (4\rho^3 \log \rho + \rho^3)}{R_\varphi} - \frac{a_2 X}{R_\varphi^3} \rho^3 \right) + \rho^4 \partial_x \left(\frac{(a_2)_x}{R_\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\varphi_x X}{R_\varphi^3} \right) + \rho^4 \partial_y \left(\frac{(a_2)_y}{R_\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\varphi_y X}{R_\varphi^3} \right)$$

$$= \frac{4\psi \rho^4}{R_\varphi} + \rho^4 \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla a_2}{R_\varphi} - \frac{1}{2} \frac{X \nabla \varphi}{R_\varphi^3} \right).$$

$$\therefore \psi = -\frac{R_\varphi}{4} \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla a_2}{R_\varphi} - \frac{1}{2} \frac{X \nabla \varphi}{R_\varphi^3} \right)$$

とすれば $M[u] = o(\rho^4)$ の解とできる。

5 次以上の項

$M[u]$ は u について非線形

$$\rho^m (\log \rho)^l \quad (m \geq 5, l \geq 0)$$

の項をついて足していけば形式級数解が与えられる。

もし $\psi = 0$ ならば z 以外の対数項は不要。

定理 10.1

$M[u] = 0$ に形式へき級数解

(対数項を含めない) が存在する

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \left(\frac{\nabla a_2}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2}} \right) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi \cdot \nabla a_2 + 2a_2^2}{(1+|\nabla \varphi|^2)^{3/2}} \nabla \varphi \right) = 0.$$

Willmore 方程式 φ の 4 階 PDE

$$T=T=1 \quad a_2 = \frac{1}{4} \sqrt{1+|\nabla \varphi|^2} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \varphi}{\sqrt{1+|\nabla \varphi|^2}} \right).$$

系 10.2 Willmore 方程式は次で不変:

- $N \subset \mathbb{R}^3$ をグラフとみなせるような $\mathbb{R}^3$ の直交座標系の選び直し
- $\mathbb{R}^3$ の Möbius 変換

注 (1) 別のよく知られた $T=W$ 方程式の導出:

$N \subset \mathbb{R}^3$ についての汎関数

$$\int_N \underbrace{(H^2)}_{\substack{\uparrow \\ \text{平均曲率の2乗}}} dA \quad \text{の臨界点の方程式}$$

この汎関数が Möbius 不変なので

臨界点の方程式も Möbius 不変.

(2) 無限遠 Plateau 問題による方法の

利点:

- 高次元化が (理論的には) 容易
- $\mathbb{R}^{n-1}$ ではなく Riemann 多様体の部分多様体にも一般化できる

Graham-Reichert (2020) を見よ