幾何学 1（担当：松本）期末試験

2026 年 1 月 30 日（金）実施（120 分）

以下の問題に答えよ．多様体や微分形式は，断り書きがなくても C^∞ 級のものだけを考える．S^n の de Rham コホモロジー群 $H^k_{\mathrm{dR}}(S^n)$ は既知としてよい．de Rham の定理は使わずに済むように出題したつもりだが，使ってもかまわない．

1. $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする単位球面 S^2 は，C^∞ 級多様体とみなすことができる．なぜそのようにみなせるのか，具体的に説明せよ．

   ただし，座標変換の写像について同様の計算が多数生じる場合には，示すべきことを明確に述べた上で，代表的な計算をひとつ示し，残りは省略してよい．

2. $\mathbb{R}^3$ において

$$\omega = (-2y + z)\, dx \wedge dy + x\, dy \wedge dz - 2y\, dz \wedge dx$$

   とおく．$d\omega = 0$ を確かめよ．また，$d\eta = \omega$ をみたす微分 1 形式 η をひとつ見つけよ．

3. M，N を多様体とし，$F\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする．そのとき，M と N の de Rham コホモロジー群のあいだには，F によって誘導される線形写像

$$F^*\colon H^k_{\mathrm{dR}}(N) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$$

   がある．上記の F^* の定義と，その定義によってたしかに $H^k_{\mathrm{dR}}(N)$ から $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ への写像が定まる理由を説明せよ．F^* が線形写像となることの説明は省略してよい．

4. $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする単位球面を S^2 として

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\, (x, y, z) \in S^2 \mid -1/100 < x < 1/100 \,\}, \\ U_2 &= \{\, (x, y, z) \in S^2 \mid -1/100 < y < 1/100 \,\}, \\ U_3 &= \{\, (x, y, z) \in S^2 \mid -1/100 < z < 1/100 \,\} \end{aligned}$$

   と定める．$M = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ の de Rham コホモロジー群 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を $k = 0$，1，2 について求めよ．

5. m を正整数とし，$2m$ 次元球面 S^{2m} を考える（S^{2m} は向きづけ可能なので，向きをひとつ与えておく）．S^{2m} 上には，閉微分 2 形式 ω であって

$$\int_{S^{2m}} \omega^m \neq 0 \qquad （ただし\ \omega^m = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{m\ 個}）$$

   をみたすようなものは存在するか．必要ならば m の値により場合分けをして答えよ．

6. de Rham コホモロジー群に関する Mayer–Vietoris 完全列の連結準同型がどのようにして定義されるか説明せよ．