9　公理的記述 4――まとめ

第 6 回〜第 8 回では，数学における「公理」について，事例を交えて説明しました。今回はそれらの内容をひととおり簡潔にふり返り，その意義を考えてみたいと思います。

「公理的記述」と「集合論的記述」の関係

私たちは，平面（ユークリッド平面）の幾何学，自然数，実数，群がそれぞれ公理系*により記述される様子を見てきました。公理系とは，その対象に関する理論の出発点となるような性質のあつまりのことでした。また，ヒルベルト『幾何学基礎論』以来の現代的な観点からいうと，公理（系）は「正しい」かどうかを問題にすべきものではなく，それらによって数学的対象が間接的に規定されているのだと考えるべきものでした。

その一方で，第 2 回〜第 5 回で話したように，あらゆる数学的対象は原則として集合論的に記述――構成といってもいいでしょう――されるべきだ，という基本的な考え方も存在します。平面の幾何学の体系（平面およびその上の点，直線などの概念），自然数，実数，（個々の）群も，実際に集合論的に構成することができます。

これらの二つの流儀は，どういった関係にあるのでしょう。

この疑問について考える際は，「本質的には一つしかないものに関する公理的記述」と「複数の対象をいっせいに取りあつかうための公理的記述」を区別すべきだと思います。そして，前者については，次のような説明が考えられるでしょう。

1. 集合論的構成ができることは，原則としてあくまでも必要である。ただし，公理的記述にもとづく理論展開をしておくと，（同じ公理系をみたしているかぎり）どういった集合論的構成法を採用しても同じ結論に到達する保証がえられる。
2. 「集合論的構成ができることは，原則としてあくまでも必要」と書いたが，望むならばその立場を放棄して，公理的に記述された数学的概念の存在を〈信じる〉ことに決める立場もとれる†。
3. 「集合論的構成を隠蔽する」こと，つまり「集合論的構成ができることは了解しつつも，その詳細にはふれない」という選択をすることが可能になり，理解する際や説明する際に，労力を節約することが可能になる。

*公理のあつまり。「系」は「system」。

†ヒルベルトはこの立場を積極的にとっているというべきで，「集合論的構成ができることは原則としてあくまでも必要」というのは，もっとあとの時代の数学者の考え方だと思います。

後者については話はもっと簡単です。話をわかりやすくするために群について書きますが,「群」を「ベクトル空間」などに換えても同じことです。

1. 群の（公理的記述にもとづく）理論は，あくまでも机上の抽象理論である。それが個別の群の存在を正当化するということはない。個別の群については，別途，集合論的に構成する作業（または公理的記述によって存在を〈信じる〉作業）が必要となる。
2. ただし,「あらゆる群が共通してみたす性質に関する理論」ができあがることで，群という抽象概念が浮き彫りになるとはいえる。
3. 個別の群の集合論的構成にふれずに抽象理論だけを展開することが可能になり，理解する際や説明する際に，労力を節約することが可能になる。

ミニレポート（12 月 22 日（月）23:59 締め切り）

第 6 回から第 9 回までの授業で学んだことから一部を選び，必要ならば追加で文献調査等をした上で，この授業に出席していない人にも趣旨が伝わるような形で，400 字〜800 字の文章にまとめてください。

A4 の PDF ファイルもしくは Word ファイルとし，名前と学籍番号を忘れずに記載してください。タイトルは不要ですが，つけてもかまいません。参考にした文献がある場合は記載してください（これは制限字数に含めません)。

ファイル名は「学籍番号_氏名_ミニレポート 2.pdf」または「学籍番号_氏名_ミニレポート 2.docx」として，CLE を通じて提出してください。

盗用・剽窃については厳格に対処します。

参考文献について

レポート・論文等を書くにあたり，参考文献としてよい資料とすべきでない資料には線引きがあります。一言では説明しづらいし，分野によっても差異があると思いますが，基本的な考え方は「専門性を持った人（や組織）によって顕名で発表されており，かつ，信頼に足ると判断されるものだけを用いる」ということです。この観点からよいと判断したものだけを使ってください。

それ以外のものからインスピレーションを受けてはいけないということではありません。

次回予告

第 3 部「証明の形式化」に入ります。次回はまず，命題（proposition）を記号によってあらわすことについて説明します。