

8 公理的記述 3——無数の対象を統一的にあつかう手法として

現代数学における公理とは、個別の数学的理論における前提ないし仮定であり、その理論であつかう対象が何かということの間接的に規定するものでした。

ところで、ユークリッド平面（ユークリッド幾何学における平面）、自然数、実数といった対象はいずれも「本質的には一つしかない」ものです。

ですが公理的記述を使うと、「本質的には一つしかない」ような対象に関する理論だけではなく、ある特定の性質をもつ複数の（ふつうは無限に多くの）対象をいっせいに取りあつかう理論をつくることもできます。今回はそういう事例をとりあげたいと思います。

群の概念

群（group）というのは、ものの置きかえ、ないし対称性の観察から発生した概念です。

例をあげましょう。「換字暗号」という古典的な暗号方式があります。もっとも単純な方式の換字暗号では、個々のアルファベットを別のアルファベットに置きかえます。仮にアルファベットが26文字あるならば、具体的な暗号化のルール（換字ルールとよぶことにします）は $26!$ （ $= 26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ ）通り存在します。 $26!$ 通りある換字ルールの一つ一つを a, b といった記号で書くことにします。

ここで、2つの換字ルール a, b を続けて適用する操作を $a * b$ であらわすと、それで生じる結果は、また（一般的には）別の換字ルール c により生じる結果に一致することに注目しましょう。 $a * b$ も c も「換字ルールとしては一緒」なので、 $a * b = c$ と書きます。

すると、 $26!$ 通りある換字ルール全部を要素とする集合 G は、下記の意味で「群」になっています。この G は「26次の対称群」とよばれ、 S_{26} とか \mathfrak{S}_{26} であらわされることが多いです（ \mathfrak{S} はドイツ風の装飾文字のS）。

集合 G に次のような二項演算 $*$ が定められているとき、 G は（より正確には「演算 $*$ をそなえた集合 G 」は）群であるという。（さらに、通常は $a * b$ のことを単に ab と書き、これを a と b の積とよびます。）

- (i) どんな $a, b, c \in G$ に対しても $(a * b) * c = a * (b * c)$ が成り立つ。
- (ii) 「どんな $a \in G$ に対しても $e * a = a * e = a$ 」という性質をみたす特別な要素 $e \in G$ が存在する。（ e を群 G の単位元びんといいます。）
- (iii) どんな $a \in G$ に対しても、ある $a' \in G$ であって $a * a' = a' * a = e$ であるようなものが存在する。（ a' を群 G における a の逆元といい、通常は a^{-1} と書きます。）

問題

3 次の対称群 S_3 を考えます。その 6 個の要素を次のように書くことにします。

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) S_3 における乗積表をつくってください。
- (2) a_1, a_2, a_5 という 3 つの要素と a_3, a_4 という 2 つの要素のあいだには、性格の違いがあるように思われます。どのように違うか考えてください。

補足

ベクトル空間（線形空間）も公理的に定義される概念で、「平面ベクトルの全体」や「空間ベクトルの全体」だけでなく、「数列の全体」や「関数の全体」のような多様な対象を統一的に考察するのに役立ちます。現在「線形代数学・同演義 II」で学んでいる人もいるでしょう。

次回予告

第 6 回，第 7 回，第 8 回で行ってきたことをふり返り，公理的記述とはどのように数学的対象をあつかう手法なのかまとめます。

次回の後半では「公理的記述」に関するミニレポートの執筆作業に入ってもらいます。課題は「集合論的記述」のときと同様です。何について書くか考えてきてください。