7　公理的記述 2——自然数の公理系，実数の公理系

現代数学における公理とは，個々のひとつながりの数学的理論において，取り扱う対象について設ける前提ないし仮定であり，その対象が何かということを間接的に規定するものでした。

自然数の公理系

われわれが直観的に「知っている」自然数 0，1，2，……を公理的に記述する方法として，次の**ペアノの公理系**（1889 年／ 1891 年）を使う方法があります*。

> 自然数とは次のような性質をもつものである。
>
> (i) 0 とよばれる自然数がある。
> (ii) どんな自然数 x に対しても，その「直後の自然数」（successor，後継者）とよばれる自然数 x^+ が定められている。
> (iii) $x \neq y$ ならば $x^+ \neq y^+$ である。
> (iv) $x^+ = 0$ となる自然数 x は存在しない。
> (v) 次の条件をみたす自然数の集合 A は，すべての自然数からなる集合以外に存在しない。
> (a) $0 \in A$ である。(b) $x \in A$ ならば $x^+ \in A$ である。

同じことですが，集合の概念を積極的に使って述べれば次のようにいえます。

> 次のような集合 X が与えられたとき，X の個々の要素のことを自然数という。
>
> (i) 0 とよばれる X の要素がある。
> (ii) X には，とある写像 $s\colon X \to X$ が定められている。
> (iii) s は単射である（つまり，x，$y \in X$ が $x \neq y$ をみたすとき $s(x) \neq s(y)$ である）。
> (iv) $s(x) = 0$ となるような $x \in X$ は存在しない。
> (v) 次の条件をみたす X の部分集合 A は $A = X$ 以外に存在しない。
> (a) $0 \in A$ である。(b) $x \in A$ ならば $s(x) \in A$ である。

この公理系から出発して，自然数の演算（加法と乗法）を定義し，そのよく知られた性質を証明することができます。そうして自然数の概念を確立することができれば，整数，有理数，……を順番に構成していけるのはこれまでの授業で見たとおりです。

*デデキントの先行する仕事（1888 年）を考慮にいれて，デデキント・ペアノの公理系ともいいます。

実数の公理系

実数を公理的に記述することもできます。よく使われる公理系の概略は次のようにまとめられます（より詳しくは，杉浦光夫『解析入門 I』（東京大学出版会）の冒頭を参照してください)。

> 実数とは次のような性質をもつものである。
>
> I. 実数には四則演算がある。それらの演算は通常期待するようないくつかの性質をみたす。
> II. 実数には順序関係（大小関係）があり，これも通常期待するようないくつかの性質をみたす。また，この順序関係は四則演算と整合的である。
> III.（**実数の連続性**または**完備性**）実数からなる集合 A が上に有界で，かつ A が空集合でなければ，A は上限をもつ。

問題

ペアノの公理系に関連して，

(1) 公理 (iii) だけをみたさないような自然数以外の体系を見つけてください。
(2) 公理 (iv) だけをみたさないような自然数以外の体系を見つけてください。
(3) 公理 (v) だけをみたさないような自然数以外の体系を見つけてください。

次回予告

前々回および前回は「唯一の対象」を記述するために公理を使いましたが，共通の性質をもついくつもの対象についてまとめて議論するために公理を使う場合もあります。そのような例として，群の概念をとりあげたいと思います。