6 公理的記述 1——公理概念の形成

ユークリッド『原論』における公理

「公理」の概念は紀元前 300 年頃に遡ります。

古代ギリシャでそれまでにえられた数学的成果の集大成として，ユークリッド（エウクレイデス）は全 13 巻からなる『原論』を著しました。その内容は主として幾何学です。ただし数に関する理論を扱っている部分もあります。

この『原論』の特徴は，それらの数学的成果を，わずかな数の前提から出発し，証明によって順繰りに積み重ねていくかたちで提示したことにありました。冒頭におかれた前提は「公準」および「共通概念」の 2 種類に分類されていますが，私たちはそれらをひとくくりにして「公理」ともよぶことにします。

ユークリッドにとっての公理は，幾何学を展開するための出発点となりうる最小限の前提であって，直観的に正しいと考えられるようなものでした*。

第 5 公準の検討と非ユークリッド幾何学の発見

ユークリッドのおいた第 5 公準は「直線 l が直線 m_1，m_2 に交わっており，l に関して同じ側にある内角の和が 2 直角よりも小さければ，m_1，m_2 はその側において交わる」というものです。これは内容が複雑なので，「最小限の前提」に含める必要はないのではないかと疑う人がいました。つまり，他の前提から第 5 公準を証明できるのではないかということです。

たとえば，プトレマイオス（2 世紀頃），プロクロス（5 世紀），サッケリ（1667〜1733），ランベルト（1728〜1777），ルジャンドル（1752〜1833），ボヤイ・ファルカシュ（1775〜1856）といった人々がそのような試みをしたとされます。

その試みは失敗に終わったのですが，それは新世界の発見をもたらす失敗でした。「ユークリッドのおいた他の前提をみたしつつ第 5 公準をみたさない幾何学の体系が存在する」ということを，ロバチェフスキーが 1829 年に，ボヤイ・ヤーノシュ（ファルカシュの息子）が 1831 年（まで）に発表したのです†。

「第 5 公準以外の前提をみたしつつ第 5 公準をみたさない幾何学が存在し，その幾何学の内

*正確にいえば，ユークリッド自身はもしかしたら「それらを承認することを読者に対して要請した」だけだったのかもしれません。中村幸四郎，寺阪英孝，伊東俊太郎，池田美恵（訳・解説）『ユークリッド原論』追補版（共立出版，2011 年）に収録されている「『原論』の解説」§2 の記述が興味深いです。ですが，その後の人たちは直観的に正しいことがらとして受け取っていたようです。

†ただし，この内容はガウスも知りながら未発表のままに留めていたとされます。ガウス（大数学者！）はファルカシュの大学時代からの友人で，ファルカシュは息子の発見をガウスに手紙で知らせましたが，その返事の中で，ガウスは 30〜35 年前にほぼ同じ結果を自分で得ていたと書いています。ガウスは 1824 年の別の手紙でも非ユークリッド幾何学に言及しているそうです（寺阪英孝『非ユークリッド幾何の世界』新装版（講談社，2014 年）の 96 ページ）。

部で矛盾はおこらない」のであれば，第 5 公準以外の前提から第 5 公準が証明されることはありえないことに注意してください。

ロバチェフスキー，ボヤイ・ヤーノシュの発見した幾何学の舞台を，現在では「双曲平面」といいます。現代数学では，ユークリッド平面，双曲平面やその高次元版だけでなく，無数の異なる舞台における幾何学が研究されています。

ヒルベルトの見解

上記のような状況があったので，幾何学の公理の相互独立性とか無矛盾性といったことが精密な検討を要する問題になりました。また，その問題に取り組むにはそもそも「ユークリッドの『原論』の論理は十分に厳密であるとはいえない」という課題もありました（それが意識されるようになった背景として，実数とは何であるかということが 1870 年代に判明したことは間違いなく決定的だったはずです）。

ヒルベルトは 1899 年に『幾何学基礎論』を著し，ユークリッド幾何学の公理を整理しなおして，ユークリッド幾何学の体系を厳密に再構築しました。また，ヒルベルトの設けた公理が相互に独立であること（どの公理もそれ以外の公理からは証明できないこと）を証明しました。相互独立性の証明は，ユークリッドの第 5 公準の場合と同様に，いくつもの新しい幾何学を生み出すことによってなされました。

おそらくヒルベルトにはその過程で，「ユークリッド幾何学こそが私たちが直観的に把握する特別な幾何学である」という想定が，怪しげな，もしくは独りよがりなものに思われるようになったのでしょう。ヒルベルトは次のような認識に至りました。

- 公理とは，それが直観的に正しいか否かを問題にすべきものではなく，個別のひとつながりの数学の理論における前提もしくは仮定にすぎない
- 数学的対象についての直観（たとえば「直線とはあんな感じのものだ」というイメージ）は理論的にはまったく不要であり，数学の理論は公理で記述される対象の性質だけにもとづいて展開できる。数学的対象とは，理論的にいえば，「公理で記述される性質によって間接的に規定される何物か」にすぎない

これはその後の数学で共有されるようになった公理観でもあります。この考えをヒルベルトは，1891 年にベルリンの駅の待合室で，「点，直線，平面のかわりにテーブル，椅子，ビールのジョッキという言葉を用いてもよいはずだ」と言いあらわしたといいます。

次回予告

数学的対象の公理的な記述は幾何学にとどまりません。自然数および実数の公理的記述について説明したいと思います。