5　集合論的記述 4――まとめ

「集合論的記述」とは

第 2 回・第 3 回・第 4 回で，複素数，整数，実数を純数学的に構成する方法について説明しました。その中で用いられてきた手法から，次に掲げるような操作を抽出したいと思います。これらは，特定の数学的対象とは無関係な，集合に関する一般的操作です。

こういった「許される」集合の操作をあらかじめ定めておき，それら（だけ）を用いて既存のものから新たな数学的対象を構成してゆく手法を指して，この授業では「**集合論的記述**」という言葉を使うことにします。

操作 1　既存の集合 A，B の要素の対（つい）を全部集めた集合をつくる（A と B の直積集合といい，$A \times B$ という記号で表します）。
操作 2　既存の集合 A の部分集合を全部集めた集合をつくる（A の冪（べき）集合といい，$\mathcal{P}(A)$ とか 2^A といった記号で表します）。
操作 3　既存の集合 A から，特定の条件をみたす要素だけを全部集めた部分集合 A' をつくる。

現代数学では，「通常の数学においては，あらゆる数学的対象は集合論的に記述されるべきである」という原則的な姿勢が共有されています*。ここで通常採用される「『許される』集合の操作」は，ほぼ上記の操作 1，2，3 と常識的な操作だけといっても差し支えないと思います†。

すべての複素数，整数，実数からなる集合の集合論的記述をあらためてまとめます。

すべての複素数の集合 $\mathbb{C}$ の構成

すべての実数の集合 $\mathbb{R}$ が与えられているものとします。すると，個々の複素数とは実数の対 (a, b) だと考えることにしたので，「$\mathbb{C}$ とは $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のことである」といえます。

すべての整数の集合 $\mathbb{Z}$ の構成

すべての自然数（0 を含めます）の集合 $\mathbb{N}$ が与えられているものとします。

私たちは，自然数の対 (m, n) の各々が整数を表していると考えることにしました。内心では $m - n$ のつもりです。そして整数 x を表す自然数のすべての対を集めた集合が，その整数 x の実体なのだと考えます。この見方を整理すると，$\mathbb{Z}$ の次のような構成がえられます。

*例外的に，自然数の集合だけは「集合論よりも前にあるもの」と理解する場合も少なからずあると思います。
†より慎重に述べるならばもう少しあります。集合論の「ZFC 公理系」としてまとめられています。

1. すべての自然数の対からなる集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ をつくります。
2. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ のすべての部分集合からなる集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ をつくります。
3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ の各要素 S は「自然数の対（全部でなくてもよい）のなす集合」ですが，すべてが整数に対応するわけではありません。そこで次の 3 条件を考えます。これらをみたす要素 S だけを集めてえられる $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ の部分集合が $\mathbb{Z}$ です。
   (i) S は空集合でない。 (ii) $(m,n)\in S$，$(m',n')\in S$ ならば $m+n'=m'+n$ である。
   (iii) $(m,n)\in S$，$m+n'=m'+n$ ならば $(m',n')\in S$ である。

すべての実数の集合 $\mathbb{R}$ の構成

すべての有理数の集合 $\mathbb{Q}$ が与えられているものとします。

私たちの直観的理解によると，実数 x に対し，$A=\{x$ 未満の有理数$\}$，$B=\{x$ 以上の有理数$\}$ とおくことによって有理数の切断 (A,B) がえられます。この (A,B) が実数 x の実体なのだと考えます。その見方を整理して，$\mathbb{R}$ の次のような構成がえられます。

1. $\mathbb{Q}$ のすべての部分集合からなる集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ をつくります。
2. すべての $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ の要素の対からなる集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})\times\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ をつくります。
3. $\mathcal{P}(\mathbb{Q})\times\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ の要素 (A,B) は「有理数（全部でなくてもよい）のなす集合の対」であって，すべてが実数に対応するわけではありません。そこで次の 4 条件を考えます。これらをみたす要素 (A,B) だけを集めてえられる $\mathcal{P}(\mathbb{Q})\times\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ の部分集合が $\mathbb{R}$ です。
   (i) $A\cup B=\mathbb{Q}$，$A\cap B=\{\ \}$（空集合）である。 (ii) A も B も空集合でない。
   (iii) $a\in A$，$b\in B$ ならば $a<b$ である。 (iv) A は最大数をもたない。

ミニレポート（11 月 10 日（月）17:00 締め切り）

第 2 回から第 5 回までの授業で学んだことから一部を選び，必要ならば追加で文献調査等をした上で，この授業に出席していない人にも趣旨が伝わるような形で，400 字〜800 字の文章にまとめてください。

A4 の PDF ファイルもしくは Word ファイルとし，名前と学籍番号を忘れずに記載してください。タイトルは不要ですが，つけてもかまいません。参考にした文献がある場合は記載してください（これは制限字数に含めません）。提出は CLE を通じて行ってください。

盗用・剽窃については厳格に対処します。

次回予告

第 2 部「公理的記述」に入ります。次回はまず，ユークリッド（エウクレイデス）の『原論』から出発して，現代的な「公理」の概念がどのように形成されてきたか説明したいと思います。