

4 集合論的記述 3——実数とは何か

ふり返りと今日の内容

第2回・第3回では、それぞれ

- 実数の概念を前提として、複素数の概念を構築する
- 自然数の概念を前提として、整数の概念を構築する

ことについて扱いました。（「○○の概念だけを共有している宇宙人を相手にして、日常的経験にいきなり頼らずに△△の概念を説明しようとしている」と考えるとよいのです。）

その際の手法としては、第2回でも第3回でも「既存の数の対」を利用しました。さらに第3回では最終的に「既存の数（具体的には自然数）の対からなる集合を整数だとみなす」という考え方をしたことも思い出しておきましょう。

今回は、有理数の概念を知っているという前提に立ち、実数の概念を構築する方法を紹介します。有名な方法は2つありますが、Dedekindの「切断」というアイデア（1872年）を採用します。

問題

1. 次にあげる有理数を $\sqrt{2}$ より小さいものと大きいものに分類してください。

$$1, 2, 0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}$$

$\sqrt{2}$ より小さいもの

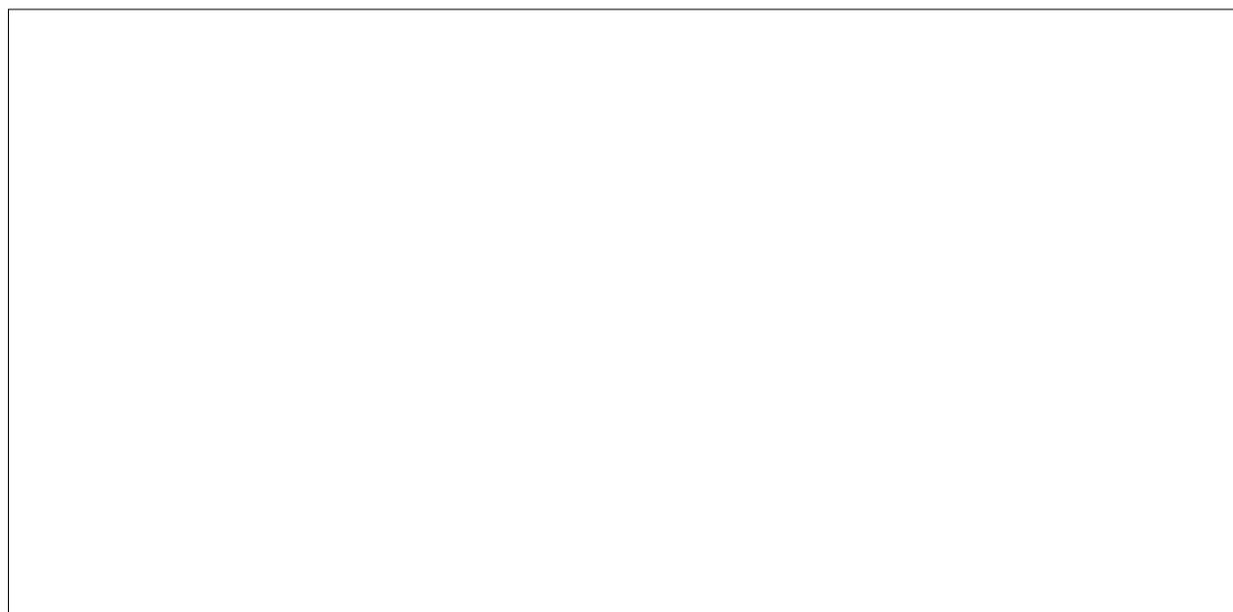
$\sqrt{2}$ より大きいもの

2. 実数とは有理数の切断 (A, B) のことであると考えます。実数 $x = (A, B)$ と $x' = (A', B')$ に対し、「 $x < x'$ 」とはどういうことであると定めるのが適切でしょうか。

(有理数を含む) 実数の大小がきちんと定義された暁には、実数 $x = (A, B)$ に対し

$$A = \{x \text{ 未満の有理数}\}, \quad A' = \{x \text{ 以上の有理数}\}$$

となるべきだし、また「 $x < x'$ 」という関係にあるどんな実数 x, x' に対しても、 $x < r < x'$ をみたす有理数 r が存在する」という状況になるべきことに注意してください。



補足

実数の概念の構成は、精密な解析学（ \equiv 微積分学）のいちばんの基礎にあたることからです。小平邦彦『解析入門 I』（岩波書店）の §1.1, §1.2 を見てみると、今回紹介したアイデアがより詳しく正確に展開されていることがわかつてと思います。

次回予告

第2回、第3回、第4回で行ってきたことをふり返り、ここではどういった集合論的手法が用いられてきたのかまとめます。さらにそれらの手法が、複素数、整数、実数の概念の構成のほかにもどのような数学的概念の構成に活用できるか、事例をあげたいと思います。

次回の後半ではミニレポートの執筆作業に入ってもらいます（授業中に完成させる必要はありません）。課題は「第2回から第5回までの授業で学んだことから一部を選び、必要ならば追加で文献調査等をした上で、この授業に出席していない人にも趣旨が伝わるような形で、400字～800字程度の文章にまとめてください」です。何について書くか考えてきてください。