

3 集合論的記述 2——負の数とは何か

ふり返りと今日の内容

前回は、実数の概念は既知であるという前提のもとで、複素数の概念を純数学的に構築するしかたを説明しました。具体的なやり方は複数考えられますが、実数の対（より詳しい言い方をすれば順序対）を用いて、「複素数とは実数の対 (a, b) である」とする立場をとりました。

「実数の概念だけを共有している宇宙人が目の前にいるとして、日常的経験をいっさい用いずに複素数の概念を説明しようとしているのだ」と考えるのもよいと思います。

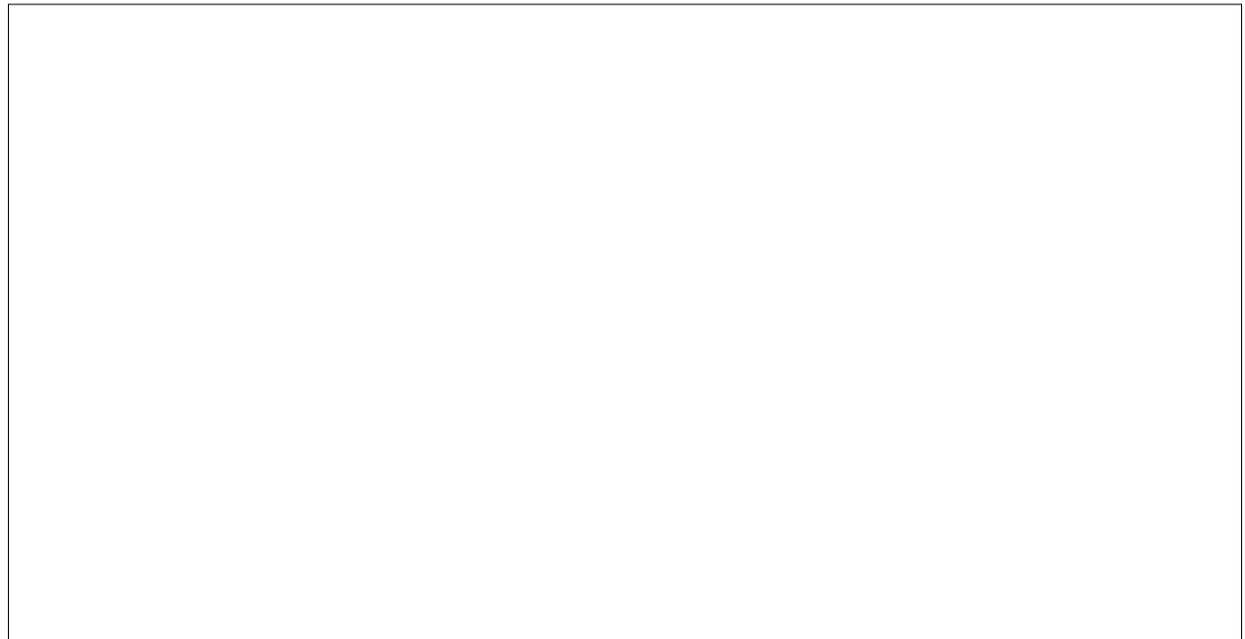
今回は、「負の数をまだ知らない」という立場にたって正負の符号をもつ数の概念をつくります。自然数（ここでは $0, 1, 2, 3, \dots$ とする）の概念を既知として、整数の概念を構築することにします。別のいい方をすれば「自然数の概念だけを共有している宇宙人が目の前にいるとして、日常的経験をいっさい用いずに整数の概念を説明する」ことを試みます。

問題

1. 自然数の対 (m, n) の表す整数と (m', n') の表す整数を考えます。
 - (1) それらの和は、どんな自然数の対で表される整数のことと定めればいいでしょうか。
 - (2) それらの積は、どんな自然数の対で表される整数のことと定めればいいでしょうか。

2. 私たちは $(1, 4)$ は整数 -3 を表すと内心思っているし、 $(5, 8)$ も整数 -3 を表すと内心思っています。しかし「 $(1, 4)$ と $(5, 8)$ は同じ整数を表す。なぜならどちらも整数 -3 を表すから」という説明は、整数 -3 を知らない立場では意味をなしません。

いつ「 (m, n) と (m', n') が同じ整数を表す対だ」ということにするのか、その判定基準を、自然数の概念だけにもとづいて説明したいと思います。どのようにしたらいいでしょうか。



補足

上記の問題 2 でふれた問題点や「自然数の対からなる集合を整数とみなす」というアイデアの部分をもっと一般化して述べると、「同値関係」とか「同値類」という概念の話になります。そういった一般的な説明がほしい人は、松坂和夫『集合・位相入門』（岩波書店）の第 1 章 §6 や、和久井道久『大学数学ベーシックトレーニング』のトレーニング 30, 31 などを参考にしてください。

今回説明した整数の概念の構成法そのものは、「同値関係」や「同値類」についての知識を前提とするかたちで、たとえば松坂和夫『代数系入門』（岩波書店）の付録 §4 で解説されています。

次回予告

私たちの実数概念の把握を反省し、「実数とは何か」ということについて考えてみたいと思います。