

2 集合論的記述 1——虚数はいかなる意味で存在するといえるか

今日の内容のまとめ

複素数をつくる。

- 実数の対^{ついで}を使う複素数の構成法
 - 「既知の対象の対を考える」という集合論的構成法がある
 - 演算はあとから〈構造〉として追加する
- 行列を使う複素数の構成法
 - 「対」でなく「三つ組」「四つ組」……を用いることも許容する
 - 一つのもの構成法は一通りとはかぎらない
 - 異なる人が異なる構成法を思い描いていたとしても、会話は通じる
 - 既知の対象のもつ演算を流用できるような構成法は見通しがよい

問題

1. 「複素数とは実数の対 (a, b) である」という立場にしたがって、複素数 z, w に対して $zw = wz$ がなりたつことを確かめてください。また、それ以外に確かめておくべきことをできるだけ挙げてください。

2. 「複素数 $a + bi$ とは行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ のことである」という立場にたつことにします。す

ると複素数 $1 + 0i$ とは $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のことであり、 $0 + 1i$ とは $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のことになります。

$a + 0i$ のことを a とも書き、 $0 + bi$ のことを bi とも書くことにします。さらに $1i$ のことを i とも書きます。

(1) 上記の立場のもとで、たしかに $i^2 = -1$ であることを確認してください。

(2) 立場を少し変更して「 $a + bi$ とは $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ のことである」と約束しても $i^2 = -1$ となることを確認してください。

発展的な疑問

ミニレポートや期末レポートのことも念頭において、発展的な疑問の例を書いてみます。他にも思い浮かんだことがあれば、なるべく書きとめておいてください。

- 実数の三つ組 (a, b, c) を新たな数だと思えることができるでしょうか (W. Hamilton の疑問)。関連して——どういう性質をもつものなら「数 (の体系)」とみなしていいのでしょうか。
- 「既知の対象の対 (または三つ組, 四つ組, ……) として構成する」という方法が適用できそうな他の数学的対象はあるのでしょうか。
- (行列についての知識を仮定します。) 行列の計算では $AB = BA$ が成立しない場合があります。それにもかかわらず、複素数を行列とみなす立場を採用したときに、あらゆる複素数 z, w について $zw = wz$ がなりたちます。なぜでしょうか。

次回予告

「負の数とは何か」について、虚数とは何かという問題と同様に考えてみたいと思います。